

TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI DI PERSONE

RENDITE VITALIZIE

Ermanno Pitacco



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE



Agenda

0. Introduzione
1. Rendite e rendite vitalizie
2. Prodotti base e relativi aspetti attuariali
3. Prodotti di rendita su più persone
4. Verso prodotti più complessi
5. Estensione temporale delle rendite vitalizie
6. Strutture di garanzia
7. Benefici complementari
8. Profilo temporale delle rate
9. Classificazione dei rischi. Coefficienti di conversione
10. “Cross-subsidy” nelle rendite vitalizie
11. Rendite vitalizie e condizioni di salute
12. Gli “attori” nel mercato delle rendite vitalizie

0 INTRODUZIONE

- 0.1 La propensione alla conversione in rendita
- 0.2 Investimento o assicurazione ?
- 0.3 Il rischio longevità: assicurazione o auto-assicurazione ?
- 0.4 Innovazione: quale significato ?
- 0.5 Una prima conclusione . . .

0.1 La propensione alla conversione in rendita

L' "Annuity puzzle"

Teorema di M. E. Yaari (1965)



bassa propensione alla conversione in rendita

Da un lato:

- per massimizzare l'utilità, al pensionamento convertire tutto il patrimonio in rendita

dall'altro:

- scarsa propensione a convertire in rendita, anche in Paesi con alta propensione all'acquisto di assicurazioni

Materiale pubblicitario ...

'I hate annuities'

BY ADAM CUFR

OCTOBER 26, 2013 • REPRINTS



Advertisement

**“I HATE Annuities.
And you should too.”**

Ken Fisher
CEO, Fisher Investments

Let us tell you why ... **FREE**
Get 7-page Annuity Insights.

**Click Here for
FREE Download Now**

FISHER INVESTMENTS*

A man in a blue button-down shirt and a patterned tie is shown from the chest up, looking directly at the camera with a neutral expression. He is positioned on the right side of the advertisement graphic.

La propensione alla conversione in rendita *(cont.)*



What is a life annuity?



La propensione alla conversione in rendita (cont.)



0.2 Investimento o assicurazione ?

Caratteristiche tecnico-finanziarie della rendita vitalizia

1. La rendita vitalizia è basata sul meccanismo di mutualità; quindi:
 - (a) importi (riserve) rilasciati dagli assicurati che decedono sono ripartiti tra assicurati ancora in vita
 - (b) al decesso dell'assicurato, nulla è accreditato a eredi
2. Una rendita vitalizia dà una sequenza di pagamenti “non flessibile”: gli importi incassati dell'assicurato devono essere in linea con il profilo temporale delle rate come stabilito dal contratto
3. L'acquisto di una rendita vitalizia è una decisione irreversibile: il riscatto è generalmente vietato (possibile antiselezione !)

Investimento o assicurazione ? (cont.)

Caratteristiche 2 e 3 \Rightarrow la rendita vitalizia è un asset illiquido nel portafoglio individuale

Caratteristiche 1(b), 2 e 3: possono essere percepite come svantaggi \Rightarrow indebolimento della propensione a convertire in rendita l'intero ammontare accumulato disponibile al momento di pensionamento

Svantaggi riducibili mediante:

- acquisto di particolari prodotti di rendita vitalizia
- adozione di una specifica strategia di conversione in rendita

Il problema: la rendita vitalizia è:

- ▷ uno (strano) *investimento* ?
- ▷ o una *assicurazione* contro il “rischio longevità” (esaurimento delle risorse disponibili) ?

Investimento o assicurazione ? (cont.)

Quindi ...

Se considerata *investimento*:

- ▷ maggiore flessibilità può rendere il prodotto più attraente

Se considerata *assicurazione*:

- ▷ perché non consentire l'introduzione di una franchigia (temporale)?

0.3 Il rischio longevità: assicurazione o auto-assicurazione ?

Significato di “rischio longevità”

- nel *personal wealth management*
 - ▷ rischio (individuale) di longevità = rischio di esaurire le risorse disponibili al momento del pensionamento
- nel *risk management assicurativo e pensionistico*
 - ▷ rischio di scarti accidentali (o rischio idiosincratco, o rischio di processo, o rischio “individuale”, o volatilità): durate di vita individuali maggiori o minori della vita attesa \Rightarrow numero di superstiti fluttuante attorno al valore atteso
 - ▷ rischio di scarti sistematici (o rischio sistematico): durate di vita individuali in media maggiori della vita attesa \Rightarrow numero di superstiti sistematicamente maggiore del numero atteso
 - spesso chiamato rischio di incertezza, in quanto originato da incertezza nella scelta della tavola o della legge di mortalità

Il rischio longevità: assicurazione o auto-assicurazione ? (cont.)

Con riferimento al rischio longevità individuale (nel senso del wealth management), alternative di base:

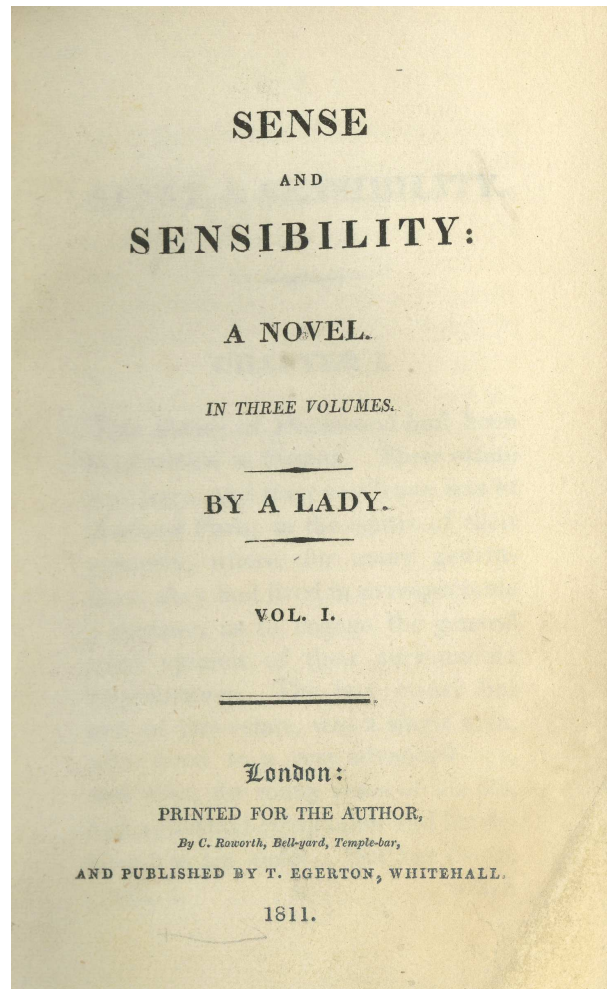
- *assicurazione* ⇒ rendita vitalizia
 - ▷ standard
 - ▷ old-age (ALDA)
 - ▷ Group-self annuitization
- *autoassicurazione* ⇒ processi di prelevamento
 - ▷ prelevamenti costanti
 - ▷ prelevamenti variabili
- *soluzioni ibride*
 - ▷ combinazioni di prelevamenti e rendite vitalizie

0.4 Innovazione: quale significato ?

Rispetto alla rendita vitalizia immediata “standard” (SPIA = single premium immediate annuity):

- benefici complementari
 - ▷ alcuni sono tradizionali (es. rate garantite)
 - ▷ altri sono innovativi (es. LTC uplift)
- variazioni innovative nella “struttura” e/o nel premio
 - ▷ limitazioni all’intervallo di età coperto dalla rendita
 - ▷ profilo temporale delle rate
 - ▷ “personalizzazione” del premio

0.5 Una prima conclusione ...



*Jane Austen,
Sense and Sensibility (1811)*

*"... if you observe, people
always live for ever when
there is any annuity to be
paid them.*

*... An annuity is very serious
business and there is no
getting rid of it."*

1 RENDITE E RENDITE VITALIZIE

1.1 Flussi di cassa e rendite

1.2 Assicurazioni di persone

1.3 Rendite nell'ambito delle assicurazioni di persone

1.1 Flussi di cassa e rendite

Definizioni e classificazioni

In generale, rendita è un *flusso di cassa*, cioè sequenza di importi pagati / incassati in vari istanti di tempo

Solitamente, il termine *rendita* è usato in presenza di:

- ▷ “regolarità” negli importi

e / o

- ▷ “regolarità” negli istanti di pagamento / incasso

e / o

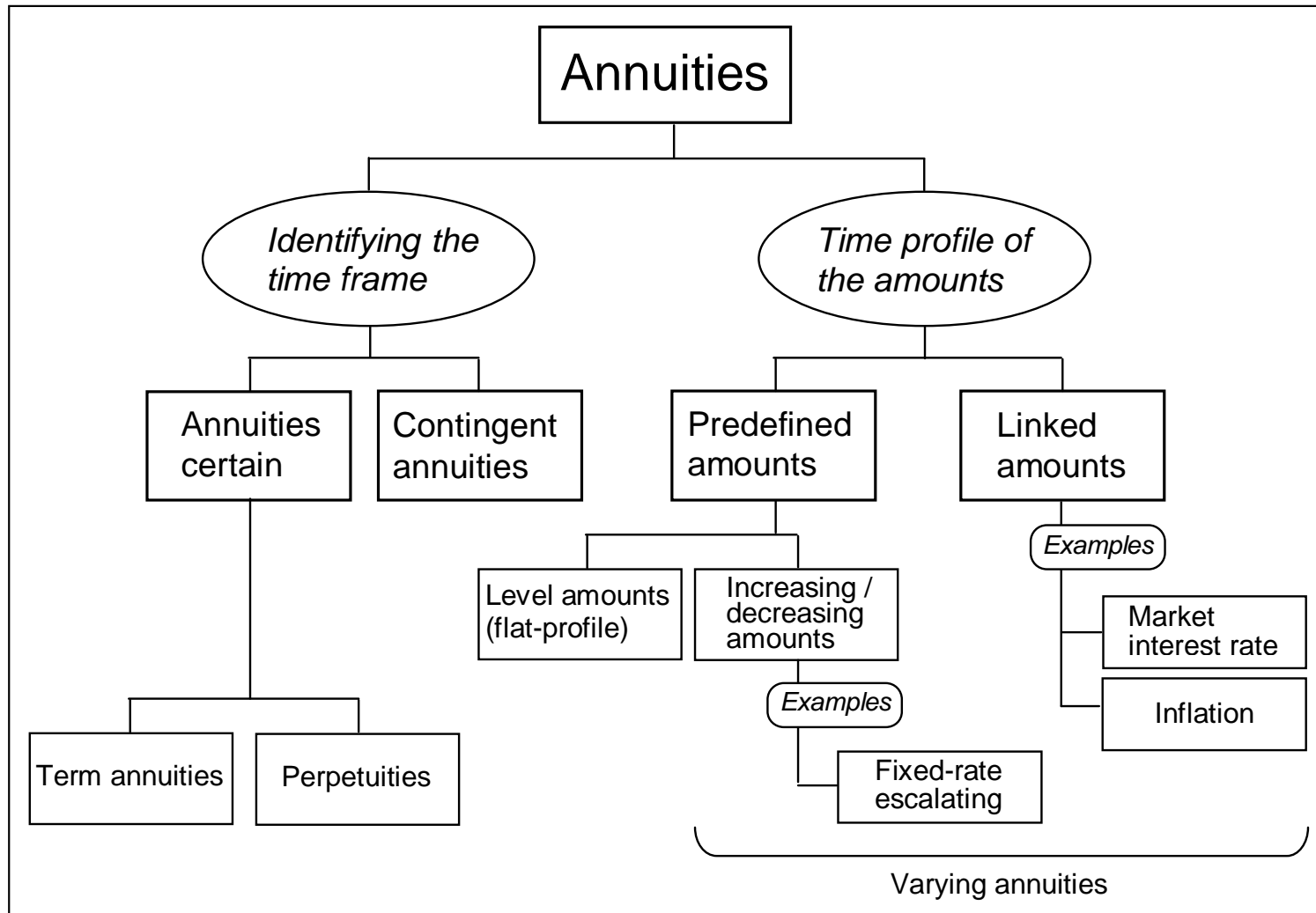
- ▷ definizione dell'intervallo temporale di pagamento / incasso

L'intervallo temporale è collegato alla “causa” che origina la rendita:

- rendite di durata certa
- rendite di durata aleatoria (dipendente dal verificarsi di dati eventi)

(Vedi figura seguente)

Flussi di cassa e rendite (cont.)



Due criteri di classificazione delle rendite

Altra classificazione, in base agli importi:

- importi *predefiniti*
 - ▷ costanti
 - ▷ variabili in modo prefissato
- importi *aleatori* dipendenti da un dato indice, per es.:
 - ▷ tasso di inflazione
 - ▷ rendimento di investimenti

Alcuni esempi

- cedole di un bond
- rate di ammortamento di un prestito
- reddito fornito da beni immobili (\Rightarrow rendita perpetua a fini di valutazione)
- rendita vitalizia immediata

1.2 Assicurazioni di persone

Assicurazioni di persone: insieme di prodotti assicurativi i cui benefici sono pagati in funzione della durata di vita di una o più persone, delle condizioni di salute (presenza di malattie, invalidazione, riattivazione, ecc.), o di altri eventi relativi alla vita (per es. nascita di figli)

Varie classificazioni possibili

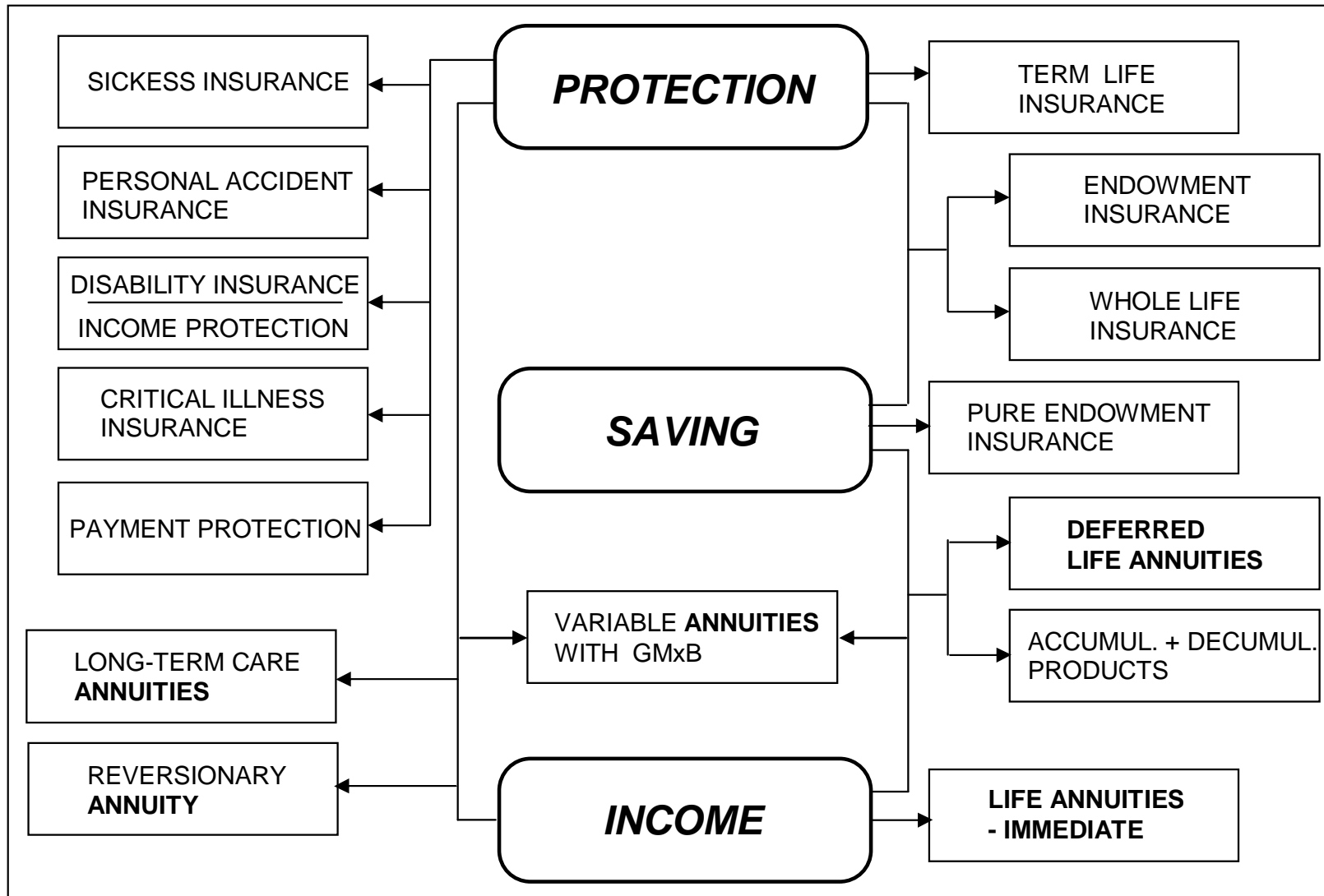
Classificazione secondo lo *scopo* dei vari prodotti assicurativi:

- *protezione* \Rightarrow fornire risorse finanziarie per far fronte ad eventi avversi (decesso, invalidazione, ecc.)
- *risparmio* \Rightarrow costituire un capitale (con possibile successiva conversione in rendita)
- *reddito* \Rightarrow fornire un'entrata, solitamente nel periodo post-pensionamento

Vari prodotti assicurativi possono avere contemporaneamente più scopi

(Vedi figura seguente)

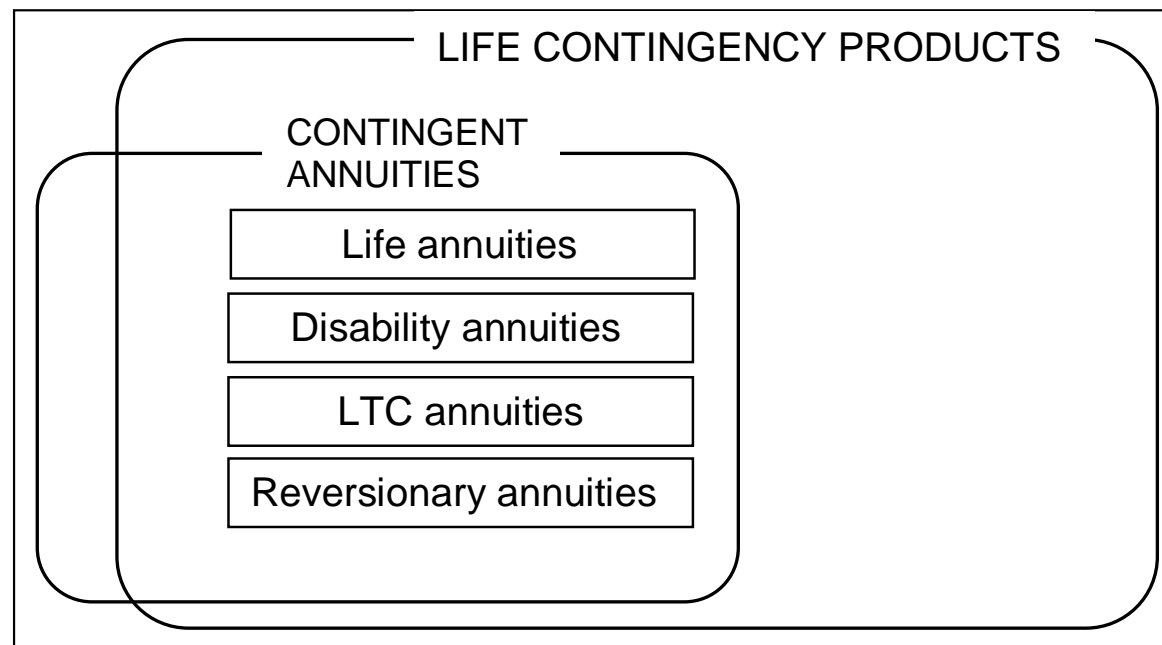
Assicurazioni di persone (cont.)



Prodotti nell'area delle assicurazioni di persone: classificazione secondo lo scopo

1.3 Rendite nell'ambito delle assicurazioni di persone

Prodotti di rendita e rendite vitalizie in particolare possono avere scopo di protezione, o risparmio, o reddito \Rightarrow collocabili nell'area delle assicurazioni di persone



Rendite nell'ambito delle assicurazioni di persone

2 PRODOTTI BASE E RELATIVI ASPETTI ATTUARIALI

2.1 Scopo. Rendite vitalizie standard

2.2 Basi tecniche

2.3 Premi

2.4 Riserva matematica

2.1 Scopo. Rendite vitalizie standard

Scopo: garantire un'entrata periodica da una prefissata età e (solitamente) per tutta la durata rimanente di vita

Beneficio = sequenza di importi periodici (rate), mentre l'assicurato è in vita

Frequenza di pagamento: mensile, trimestrale, semestrale, o annuale. Consideriamo il solo caso di rate annuali

Usuali classificazioni:

- rendite vitalizie *immediate*
- rendite vitalizie *differite*
- ▷ rendite vitalizie *anticipate*
- ▷ rendite vitalizie *posticipate*

Altre classificazioni: vedi più avanti

2.2 Basi tecniche

Elementi per il calcolo del *premio netto*:

1. *tasso d'interesse*, i , per calcolare valori attuali;
2. *tavola di mortalità*, $\{q_x\}$, dalla quale ottenere le probabilità ${}_h p_x$, per calcolare valori attesi e quindi valori attuariali:

$${}_h p_x = \prod_{j=0}^{h-1} (1 - q_{x+j})$$

Trascureremo spese e conseguenti caricamenti di premio

Ipotesi: mortalità espressa dalla prima legge di Heligman-Pollard:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = A(x+B)^C + D e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + G H^x \quad (A, B, C, D, E, F, G, H > 0)$$

Approssimazione per età adulte ed anziane:

$$q_x \approx \frac{G H^x}{1 + G H^x}$$

Negli esempi:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
HP1	0.00054	0.01700	0.10100	0.00014	10.72	18.67	2.00532×10^{-6}	1.13025
HP2	0.00054	0.01700	0.10100	0.00013	10.72	18.67	1.46400×10^{-5}	1.11000

Parametri della legge di Heligman-Pollard

	$\overset{\circ}{e}_0$	$\overset{\circ}{e}_{40}$	$\overset{\circ}{e}_{65}$	Lexis	q_0	q_{40}	q_{80}
HP1	85.138	46.134	22.351	90	0.00677	0.00029	0.03474
HP2	79.415	40.653	18.352	85	0.00678	0.00097	0.05826

Alcuni valori sintetici

HP1: tavola proiettata per rendite vitalizie

HP2: tavola per valutare benefici in caso morte (e per confronti)

2.3 Premi

Rendita vitalizia immediata posticipata, con rate costanti

Premio Π , secondo il principio di equità:

$$\Pi = b a_x = b \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_hE_x = b \sum_{h=1}^{\omega-x} (1+i)^{-h} {}_hp_x$$

Esempio 1

Premio unico in funzione di età e tasso d'interesse

	$i = 0$	$i = 0.01$	$i = 0.02$	$i = 0.03$
$x = 50$	3 584.83	2 964.49	2 490.23	2 122.33
$x = 55$	3 104.79	2 622.74	2 243.93	1 942.61
$x = 60$	2 636.42	2 274.15	1 981.66	1 743.15
$x = 65$	2 185.45	1 923.95	1 707.16	1 525.98
$x = 70$	1 759.51	1 579.64	1 426.65	1 295.69

Premio unico di una rendita vitalizia immediata; $b = 100$; HP1

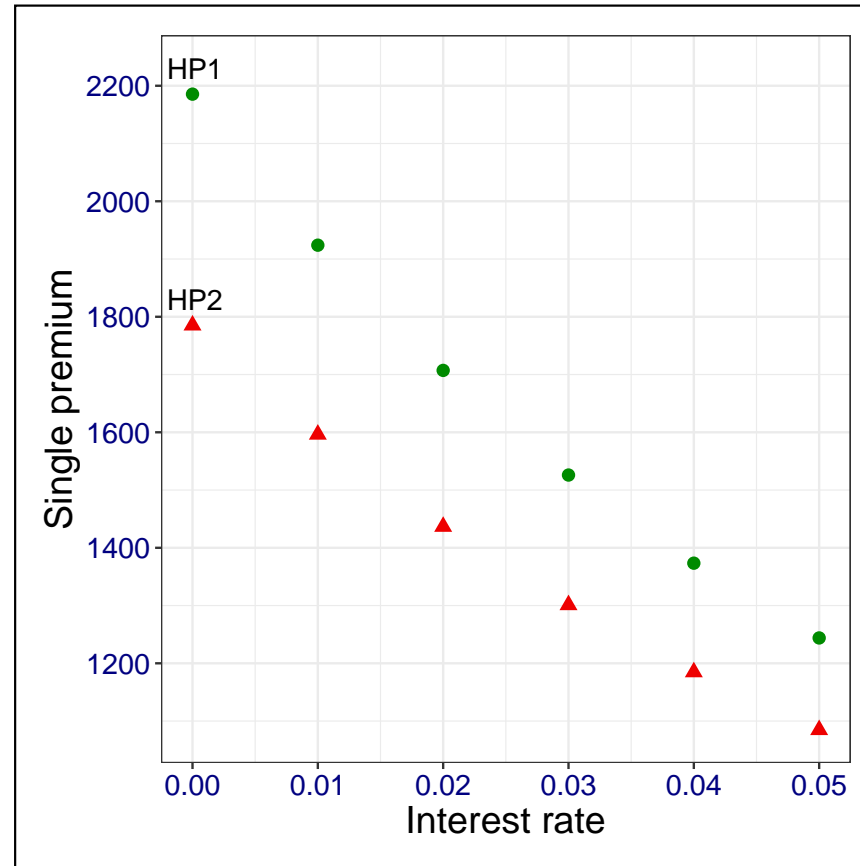
Esempio 2

Effetto congiunto delle componenti della base tecnica
(Vedi figura seguente)

	$i = 0$	$i = 0.01$	$i = 0.02$	$i = 0.03$	$i = 0.04$	$i = 0.05$
HP1	2185.45	1923.95	1707.16	1525.98	1373.39	1243.91
HP2	1785.24	1596.23	1436.66	1300.98	1184.81	1084.72

Premio unico di una rendita vitalizia immediata; $x = 65$, $b = 100$

Premi (cont.)



Premio unico in funzione del tasso tecnico; $x = 65$, $b = 100$

2.4 Riserva matematica

Riserva matematica prospettiva

Per rendita vitalizia immediata posticipata:

$$V_t = b a_{x+t}$$

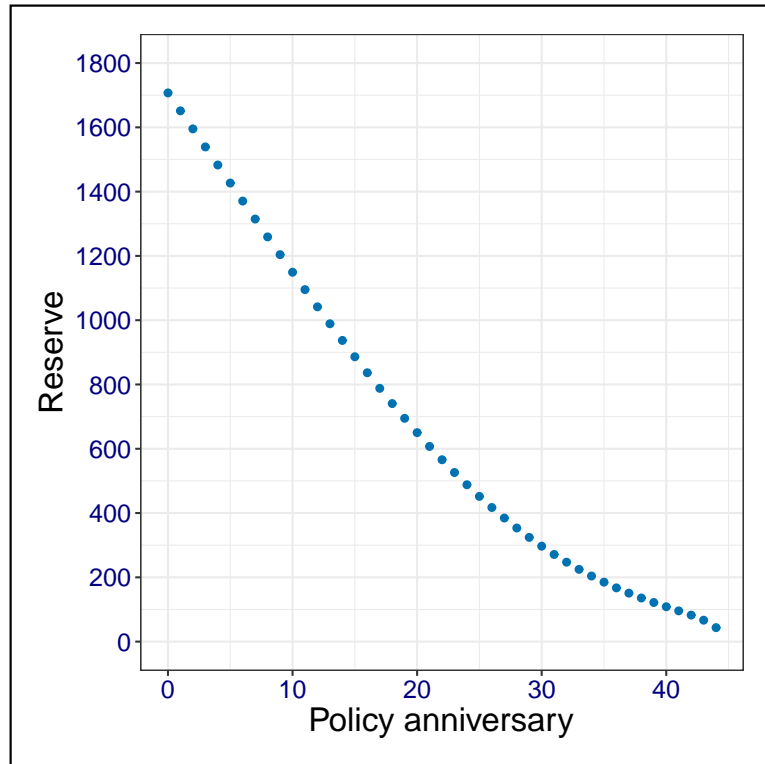
Esempio

Vedi figure seguenti

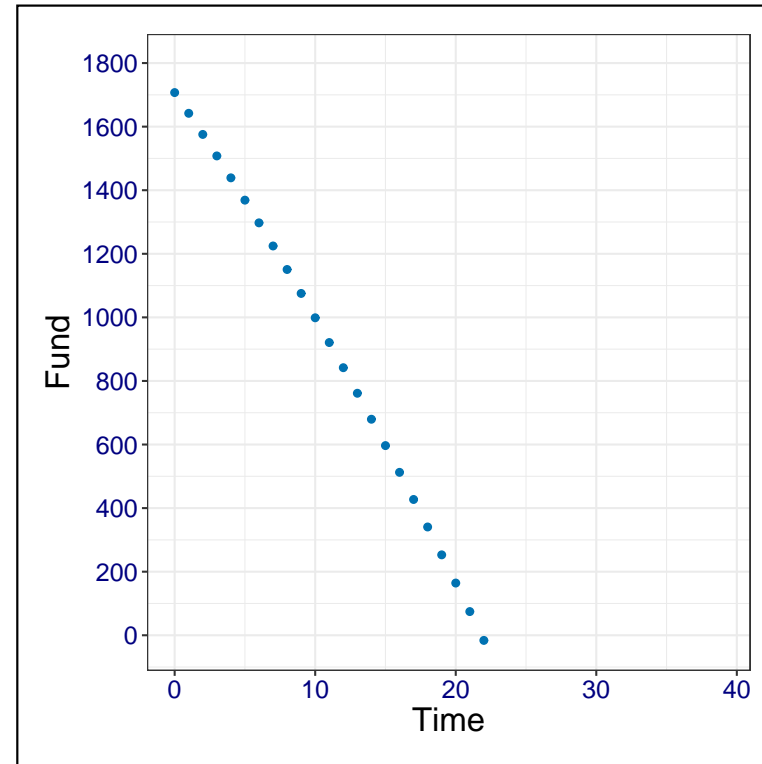
Notare:

- riserva decrescente lungo tutta la durata
- cause di variazione annua della riserva
- mutualità \Rightarrow *mortality credits* (o *mortality dividends*) a favore degli assicurati in vita
- confronto con il profilo temporale di un fondo che alimenta un processo di prelevamento

Riserva matematica (cont.)

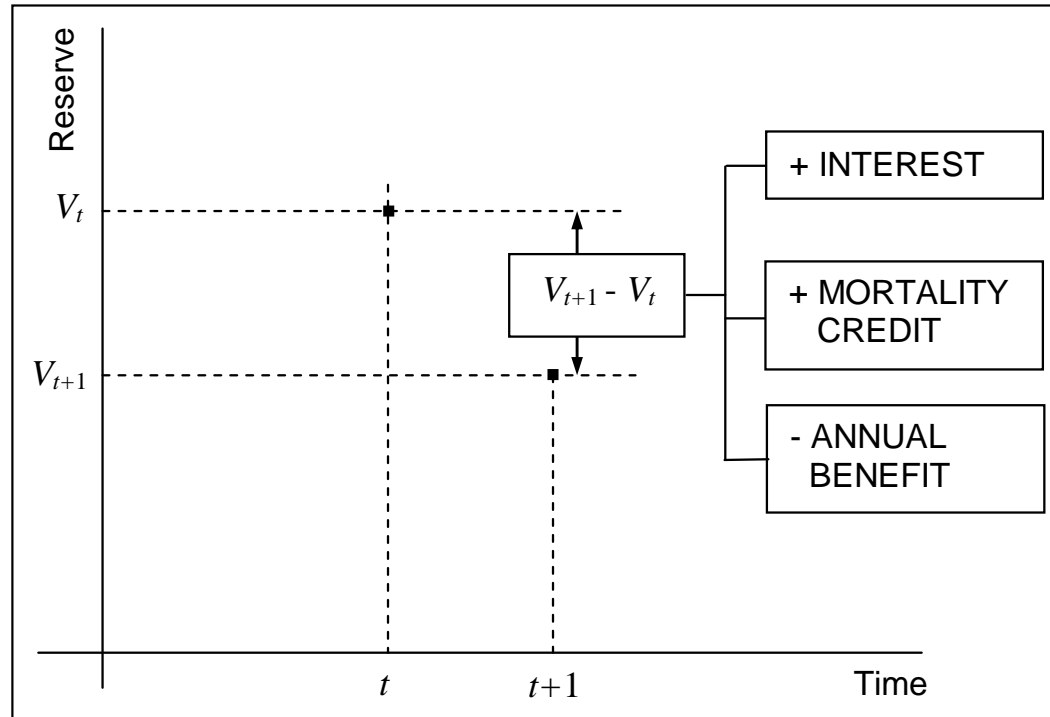


Rendita vitalizia immediata ($b = 100$)



Processo di prelevamento ($b = 100$)

Riserva matematica (cont.)



Componenti della variazione annua della riserva di una rendita vitalizia immediata

Equazione ricorrente

$$V_t = p_{x+t} (1 + i)^{-1} (b + V_{t+1}) \quad (*)$$

con $p_{x+t} = \frac{\ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t}}$; si trova:

$$V_{t+1} = \underbrace{V_t}_{\text{riserva iniziale}} + \underbrace{V_t i}_{\text{1. interessi}} + \underbrace{\frac{\ell_{x+t} - \ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t+1}} V_t (1 + i)}_{\text{2. mutualità}} - \underbrace{b}_{\text{3. rata}} \quad (**)$$

variazione annua della riserva

Variazione annua della riserva (vedi figura precedente):

1. addendo positivo costituito dall'interesse $V_t i$
2. addendo positivo costituito dalla quota di fondi individuali "liberati" a causa dei decessi di $\ell_{x+t} - \ell_{x+t+1}$ assicurati nell'anno $t + 1$ -esimo
3. addendo negativo dato dal pagamento della rata b

Il meccanismo di mutualità

Dall'Eq. (**) si ottiene:

$$V_{t+1} = V_t (1 + i) (1 + \theta_{x+t+1}) - b$$

con:

$$\theta_{x+t+1} = \frac{\ell_{x+t} - \ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t+1}}$$

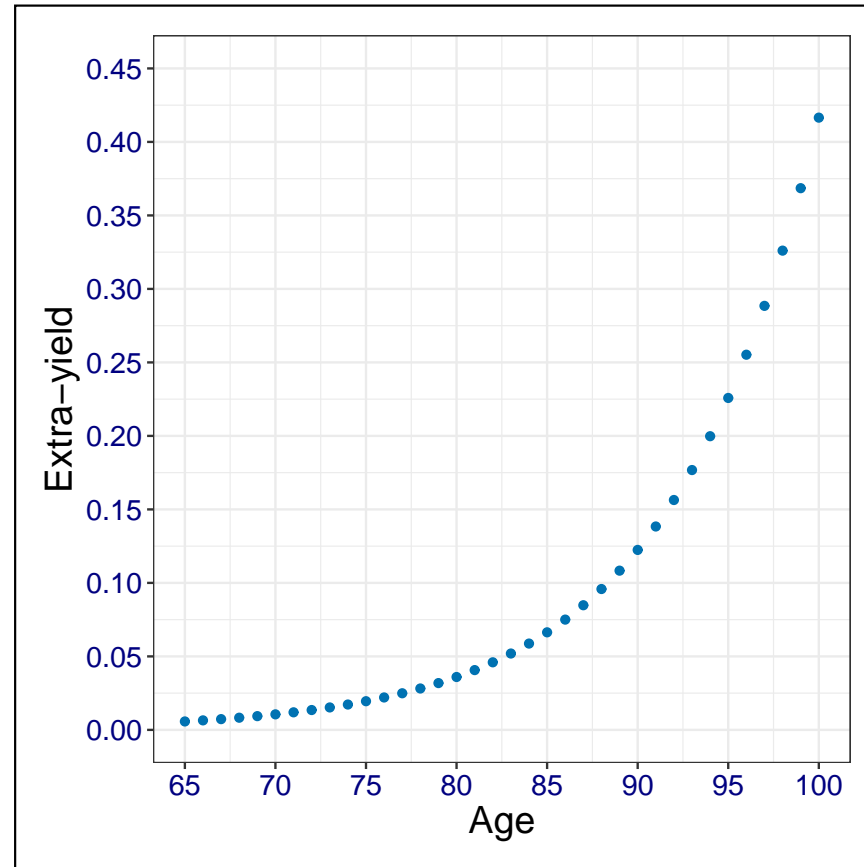
Interpretazione di θ_{x+t+1} :

- ▷ misura dell'effetto mutualità (tra età $x + t$ e $x + t + 1$)
- ▷ “extra-rendimento” (oltre il tasso i) richiesto per il mantenimento della riserva matematica \Rightarrow *mortality credits*

Dalla figura seguente:

- età non troppo elevate: mutualità sostituibile da extra-rendimento finanziario (\Rightarrow possibile alternativa: processo di prelievamento temporaneo da un fondo)
- età molto elevate: mutualità non sostituibile

Riserva matematica (cont.)



Extra-rendimento prodotto dalla mutualità

“Finanziamento” della rata annua

Dalla equazione (***) si ricava immediatamente una scomposizione della rata b :

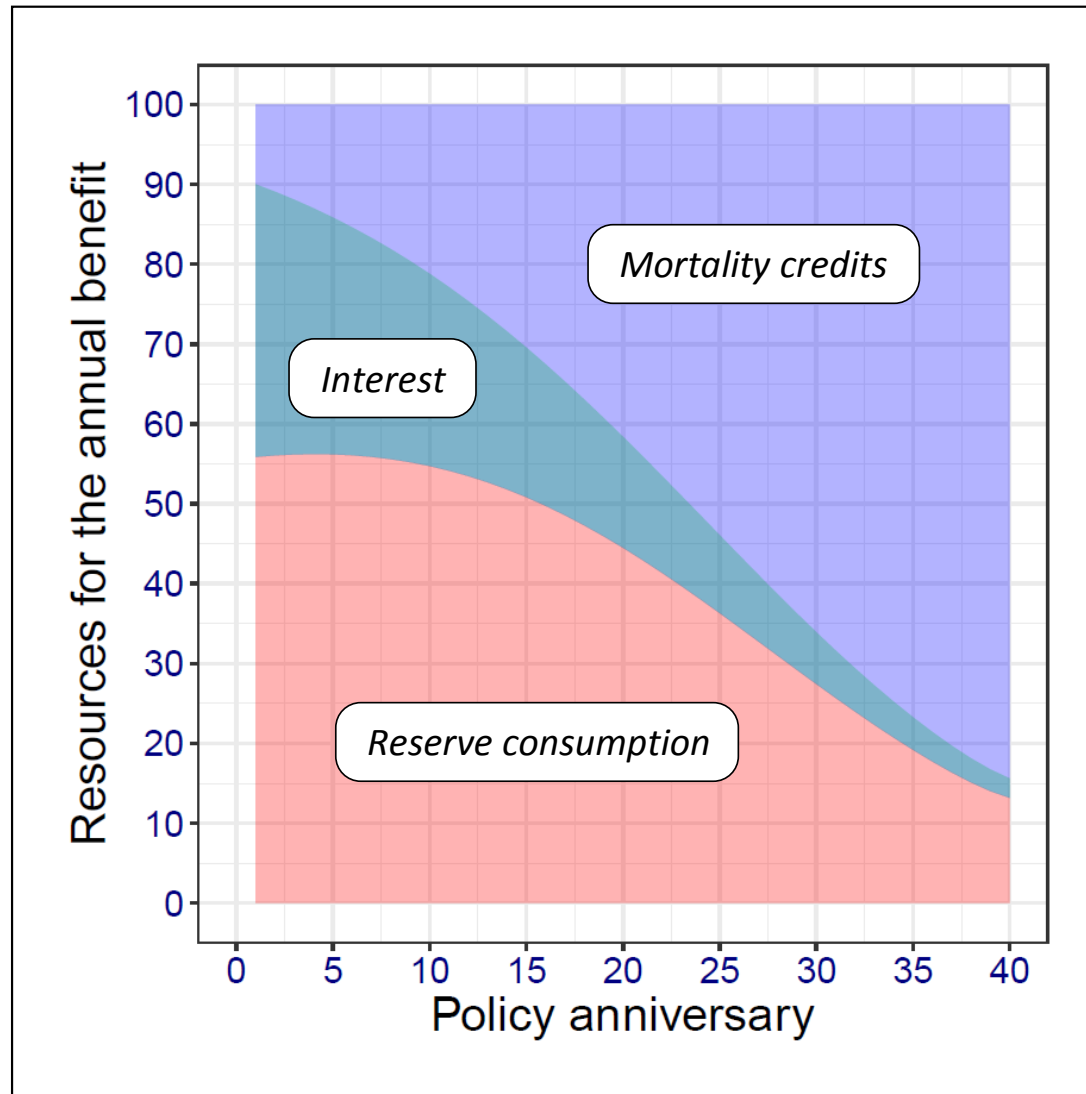
$$b = \underbrace{(V_t - V_{t+1})}_{\text{var. annua riserva}} + \underbrace{V_t i}_{\text{interessi}} + \underbrace{\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t+1}} V_t (1 + i)}_{\text{mutualità}}$$

Notare:

- contributi da tre “fonti di finanziamento della rata” b
- contributi variabili nel tempo, in particolare:
 - ▷ contributo crescente della mutualità, dovuto alla mortalità crescente con l’età

(Vedi figura seguente)

Riserva matematica (cont.)



Finanziamento del beneficio annuale

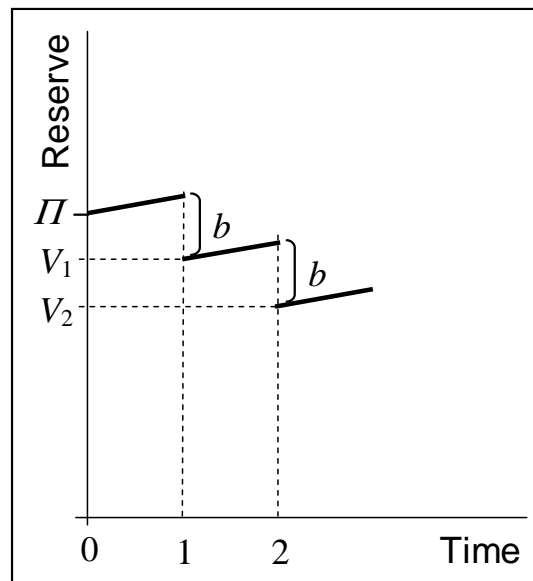
Riserva ad epoche non intere

Interpolazione lineare per epoche diverse da anniversari di contratto

⇒ definizione:

$$V_r = (1 - r) V_{0+} + r (V_1 + b) \quad \text{per } 0 < r < 1$$

$$V_{t+r} = (1 - r) V_t + r (V_{t+1} + b) \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$



La riserva di una rendita vitalizia immediata: interpolazione

3 PRODOTTI DI RENDITA SU PIÙ PERSONE

- 3.1 Il modello biometrico
- 3.2 Valori attuariali
- 3.3 Premi
- 3.4 Riserve matematiche

3.1 Il modello biometrico

Gruppo. Ipotesi

Gruppo inizialmente costituito da due persone, X e Y, di età x e y rispettivamente

Stato iniziale e finché entrambe le persone sono in vita: $[X, Y]$

Se X è il primo a decedere: $[X, Y] \rightarrow [\bar{X}, Y]$

Se Y è il primo a decedere: $[X, Y] \rightarrow [X, \bar{Y}]$

Dopo il secondo decesso: $[\bar{X}, \bar{Y}]$

Ipotesi:

- (a) uguali distribuzioni delle durate di vita
- (b) distribuzioni non dipendenti dallo stato
- (c) durate di vita indipendenti

Variabili aleatorie. Probabilità

T'_x = durata aleatoria di vita di X

T''_y = durata aleatoria di vita di Y

$T_{x,y}$ = durata aleatoria di vita del gruppo che si estingue al primo decesso

$$T_{x,y} = \min\{T'_x, T''_y\}$$

$${}_h p_{x,y} = \mathbb{P}[T_{x,y} > h] = \mathbb{P}[(T'_x > h) \cap (T''_y > h)]$$

Per l'ipotesi di indipendenza:

$${}_h p_{x,y} = \mathbb{P}[T'_x > h] \times \mathbb{P}[T''_y > h] = {}_h p_x {}_h p_y$$

$T_{\overline{x,y}}$ = durata aleatoria di vita del gruppo che si estingue al secondo decesso

$$T_{\overline{x,y}} = \max\{T'_x, T''_y\}$$

$${}_h p_{\overline{x,y}} = \mathbb{P}[T_{\overline{x,y}} > h] = \mathbb{P}[(T'_x > h) \cup (T''_y > h)]$$

Per il teorema delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}[(T'_x > h) \cup (T''_y > h)] = \mathbb{P}(T'_x > h) + \mathbb{P}(T''_y > h) - \mathbb{P}[(T'_x > h) \cap (T''_y > h)]$$

e quindi:

$${}_h p_{\overline{x,y}} = {}_h p_x + {}_h p_y - {}_h p_{x,y}$$

e per l'ipotesi di indipendenza:

$${}_h p_{\overline{x,y}} = {}_h p_x + {}_h p_y - {}_h p_x {}_h p_y$$

Si consideri infine la probabilità:

$${}_h p_{x|y} = \mathbb{P}[(T'_x \leq h) \cap (T''_y > h)]$$

che può essere riscritta:

$${}_h p_{x|y} = {}_h p_y - {}_h p_{x,y}$$

e per l'ipotesi di indipendenza:

$${}_h p_{x|y} = (1 - {}_h p_x) {}_h p_y$$

Dalle precedenti equazioni, si ottiene:

$${}_h p_{x|y} + {}_h p_{y|x} = {}_h p_{\overline{x,y}} - {}_h p_{x,y}$$

3.2 Valori attuariali

Capitali differiti

Capitale differito in caso di sopravvivenza di entrambi

$${}_hE_{x,y} = (1 + i)^{-h} {}_hp_x {}_hp_y$$

Capitale differito in caso di sopravvivenza di almeno uno

$${}_hE_{\overline{x,y}} = (1 + i)^{-h} {}_hp_{\overline{x,y}} = (1 + i)^{-h} ({}_hp_x + {}_hp_y - {}_hp_x {}_hp_y)$$

e quindi:

$${}_hE_{\overline{x,y}} = {}_hE_x + {}_hE_y - {}_hE_{x,y}$$

Capitale differito in caso di sopravvivenza di Y e decesso di X

$${}_hE_{x|y} = (1 + i)^{-h} {}_hp_{x|y} = (1 + i)^{-h} (1 - {}_hp_x) {}_hp_y$$

e quindi:

$${}_hE_{x|y} = {}_hE_y - {}_hE_{x,y}$$

Rendite vitalizie

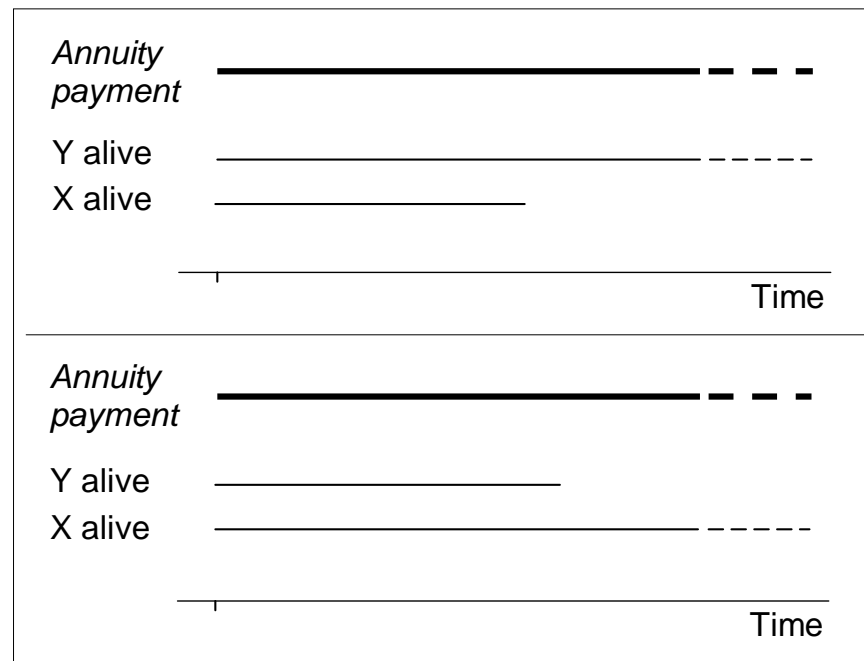
Rendita posticipata / anticipata pagabile fino al primo decesso

$$a_{x,y} = \sum_{h=1}^{+\infty} h E_{x,y} \qquad \ddot{a}_{x,y} = \sum_{h=0}^{+\infty} h E_{x,y}$$



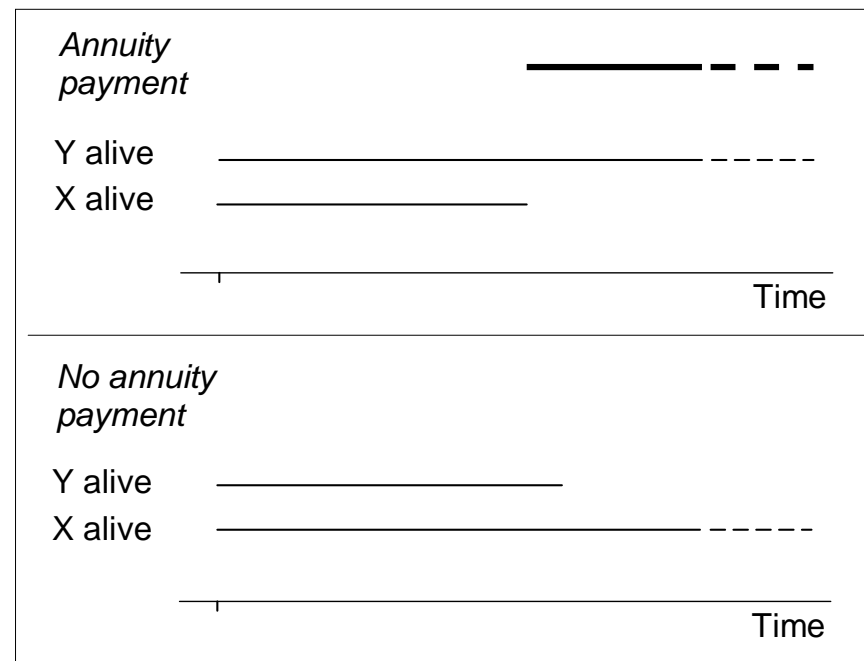
Rendita posticipata pagabile fino al secondo decesso (rendita reversibile)

$$a_{\overline{x,y}} = \sum_{h=1}^{+\infty} h E_{\overline{x,y}} = a_x + a_y - a_{x,y}$$



Rendita anticipata in caso di sopravvivenza di Y a X

$$\ddot{a}_{x|y} = \sum_{h=0}^{+\infty} h E_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$



3.3 Premi

In tutti gli esempi (se non diversamente indicato)
base tecnica: $i = 0.02$, HP1

Rendita pagabile fino al primo decesso

Premio unico:

$$II = b a_{x,y}$$

Esempio

	$x = 60$	$x = 65$	$x = 70$
$y = 50$	1 862.57	1 636.11	1 386.21
$y = 55$	1 782.07	1 584.03	1 354.93
$y = 60$	1 662.99	1 501.70	1 302.83

Premio unico di una rendita pagabile fino al primo decesso; $b = 100$

Rendita pagabile fino al secondo decesso

Premio unico di una rendita *totalmente reversibile*:

$$\Pi = b (a_x + a_y - a_{x,y})$$

In generale:

$$\text{beneficio} = \begin{cases} b & \text{se } [X, Y] \\ b' & \text{se } [X, \bar{Y}] \\ b'' & \text{se } [\bar{X}, Y] \end{cases}$$

Premio unico:

$$\Pi = b' a_x + b'' a_y + (b - b' - b'') a_{x,y}$$

Se $b' = b$ e $b'' < b \Rightarrow$ rendita *parzialmente reversibile*

Premi (cont.)

	$x = 60$	$x = 65$	$x = 70$
$y = 50$	2 609.32	2 561.28	2 530.67
$y = 55$	2 443.53	2 367.06	2 315.65
$y = 60$	2 300.34	2 187.12	2 105.49

Premio unico di una rendita totalmente reversibile; $b = b' = b'' = 100$

	$x = 60$	$x = 65$	$x = 70$
$y = 50$	2 358.26	2 219.63	2 089.06
$y = 55$	2 258.78	2 103.10	1 960.05
$y = 60$	2 172.87	1 995.14	1 833.95

Premio unico di una rendita parzialmente reversibile; $b = b' = 100$, $b'' = 60$

Rendita di sopravvivenza

Premio unico per una rendita anticipata:

$$II = b \ddot{a}_{x|y} = b (\ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y})$$

e per una posticipata:

$$II = b a_{x|y} = b (a_y - a_{x,y})$$

La rendita di sopravvivenza è un'assicurazione in caso morte di X
 \Rightarrow possibile temporaneità

In caso di temporaneità di n anni, per una rendita anticipata:

$$II = \sum_{h=0}^{n-1} {}_h|_1q_x (1+i)^{-(h+1)} b {}_{h+1}p_y \ddot{a}_{y+h+1}$$

e per una posticipata:

$$II = \sum_{h=0}^{n-1} {}_h|_1q_x (1+i)^{-(h+1)} b {}_{h+1}p_y a_{y+h+1}$$

Esempio

Base tecnica: $i = 0.02$, HP1 per la rendita, HP2 per la copertura caso morte

Età		$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	vita intera
$x = 50$	$y = 40$	107.75	190.47	295.20	784.51
$x = 50$	$y = 45$	98.48	171.97	262.41	623.73
$x = 50$	$y = 50$	88.43	151.97	227.20	472.98

Premio unico di una rendita anticipata di sopravvivenza; $b = 100$

Premi (cont.)

h	$h 1q_x$	$(1+i)^{-(h+1)}$	$h+1p_y$	\ddot{a}_{y+h+1}
0	0.002708765	0.9803922	0.9995048	27.75
1	0.002995845	0.9611688	0.9989453	27.30
2	0.003312509	0.9423223	0.9983134	26.84
3	0.003661551	0.9238454	0.9975997	26.37
4	0.004045967	0.9057308	0.9967937	25.90
5	0.004468959	0.8879714	0.9958835	25.42
6	0.004933935	0.8705602	0.9948559	24.94
7	0.005444490	0.8534904	0.9936957	24.45
8	0.006004398	0.8367553	0.9923862	23.95
9	0.006617582	0.8203483	0.9909083	23.44
10	0.007288077	0.8042630	0.9892408	22.93
11	0.008019977	0.7884932	0.9873596	22.41
12	0.008817369	0.7730325	0.9852379	21.88
13	0.009684243	0.7578750	0.9828458	21.35
14	0.010624378	0.7430147	0.9801494	20.82

Componenti del premio unico di una rendita anticipata di sopravvivenza

$$x = 50, y = 45, n = 15$$

Rendita di sopravvivenza vs Structured settlement

Confronto tra benefici:

- in una rendita di sopravvivenza
 - ▷ l'importo b è prefissato
 - ▷ il valore attuariale $b \ddot{a}_{y+h+1}$ decresce al crescere dell'età $y + h + 1$
- in un'assicurazione temporanea caso morte con capitale C costante, in caso di esercizio dell'opzione rendita vitalizia (uno degli structured settlement)
 - ▷ il beneficio $b^{(y+h+1)}$ soddisfa la:

$$C = b^{(y+h+1)} \ddot{a}_{y+h+1}$$

- ▷ cresce al crescere dell'età $y + h + 1$, in quanto \ddot{a}_{y+h+1} decresce

Esempio

(1)	(2)	(3)
h	Rendita di sopravv.: $100 \ddot{a}_{y+h+1}$	Struct. settlement: $b^{(y+h+1)}$
0	2 590.23	90.18
1	2 542.36	91.94
2	2 493.78	93.79
3	2 444.50	95.75
4	2 394.55	97.82
5	2 343.93	100.00
6	2 292.67	102.32
7	2 240.78	104.77
8	2 188.30	107.38
9	2 135.25	110.14
10	2 081.66	113.08
11	2 027.58	116.20
12	1 973.04	119.53
13	1 918.09	123.08
14	1 862.78	126.87

*Rendita di sopravv. con $b = 100$; Assic. temp. caso morte con $C = 2\,292.75$
 $x = y = 50, n = 15$*

3.4 Riserve matematiche

In generale la riserva, V_t , dipende dalla composizione del gruppo al tempo t

Rendita pagabile fino al primo decesso

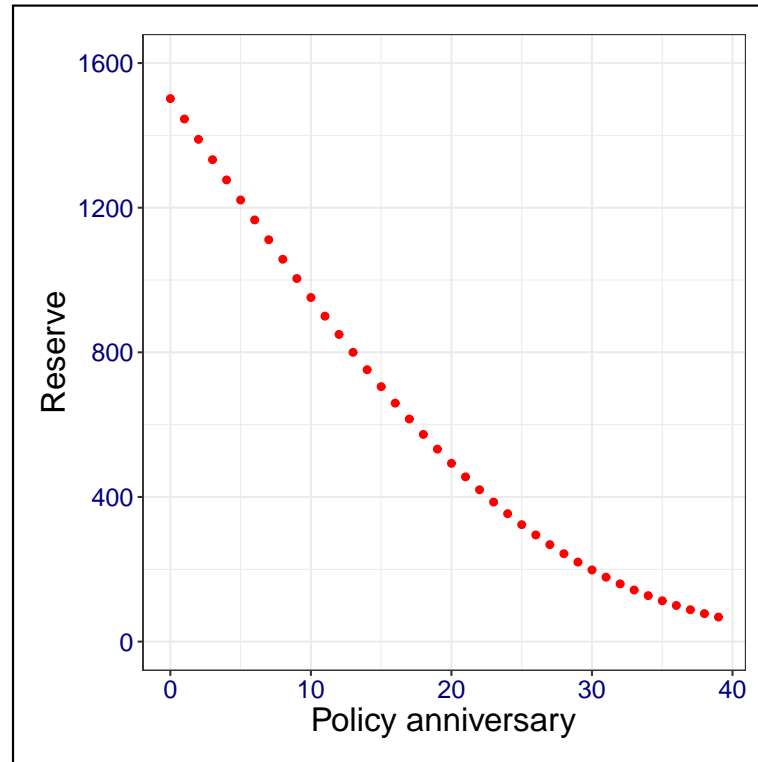
La rendita è pagabile solo nello stato $[X, Y]$, pertanto:

$$V_t = b a_{x+t, y+t} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

Esempio

Non essendo ammesse variazioni di stato, il profilo temporale è analogo a quello della riserva di un rendita su una persona (Vedi figura seguente)

Riserve matematiche (cont.)



Riserva di una rendita fino al primo decesso

$$b = 100, x = 65, y = 60$$

Rendita pagabile fino al secondo decesso

Nel caso generale, con benefici b , b' , b'' , dipendenti dallo stato corrente, per $t = 1, 2, \dots$:

$$V_t = \begin{cases} b(a_{x+t} + a_{y+t} - a_{x+t,y+t}) & \text{se } [X, Y] \\ b' a_{x+t} & \text{se } [X, \bar{Y}] \\ b'' a_{y+t} & \text{se } [\bar{X}, Y] \end{cases}$$

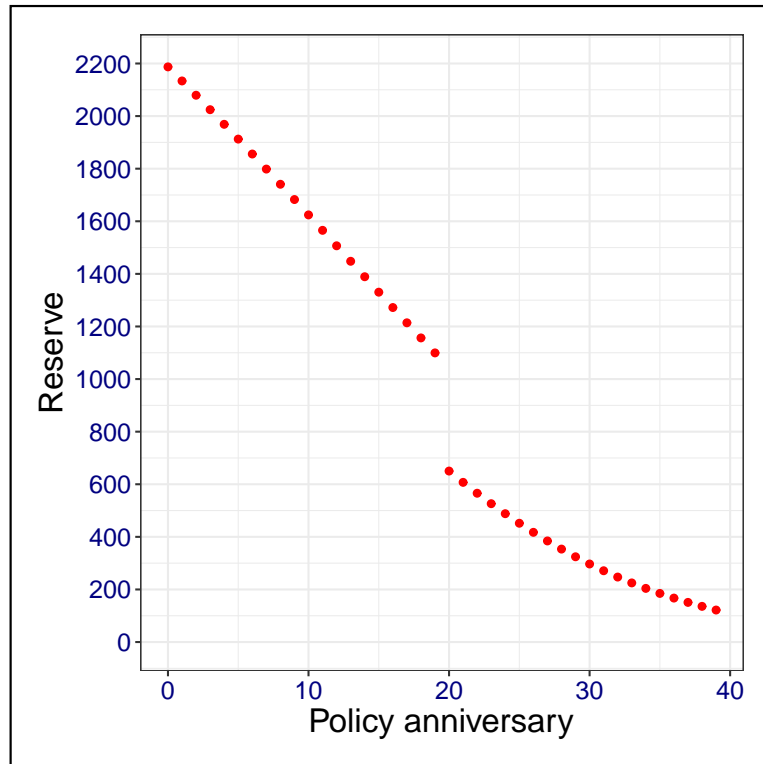
Esempio

Passaggio di stato \Rightarrow salto nel profilo della riserva

Entità del salto dipendente dallo stato di arrivo

(Vedi figura seguente)

Riserve matematiche (cont.)

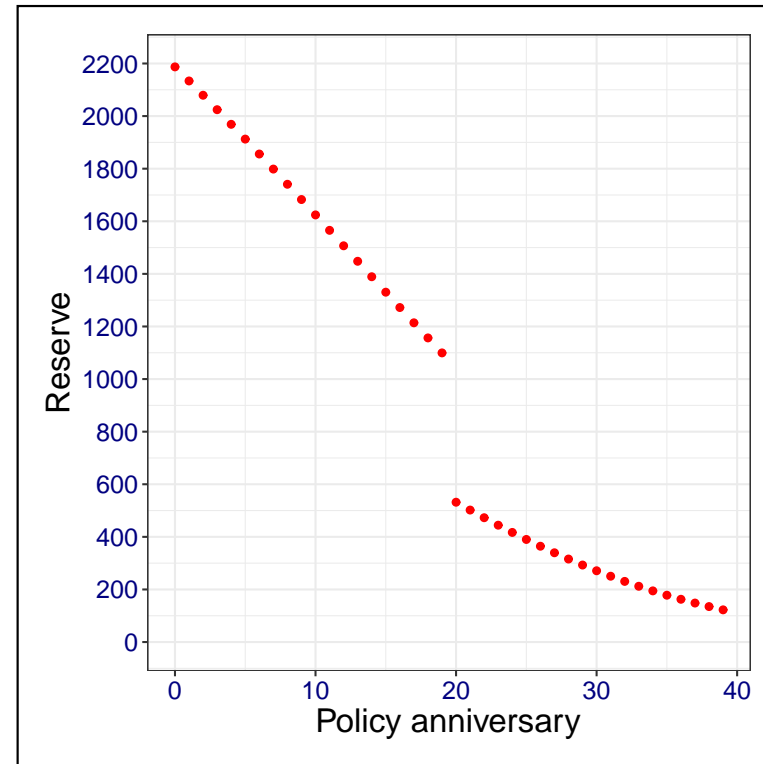


Riserva di una rendita parz. revers.

$$x = 65, y = 60$$

$$b = b' = 100, b'' = 60$$

$$([X, Y] \rightarrow [X, \bar{Y}] \text{ in } t = 20)$$



Riserva di una rendita parz. revers.

$$x = 65, y = 60$$

$$b = b' = 100, b'' = 60$$

$$([X, Y] \rightarrow [\bar{X}, Y] \text{ in } t = 20)$$

Rendita di sopravvivenza

Nel caso di copertura a vita intera:

$$V_t = \begin{cases} b \ddot{a}_{x+t|y+t} = b (\ddot{a}_{x+t,y+t} - \ddot{a}_{x+t}) & \text{se } [X,Y] \\ b \ddot{a}_{y+t} & \text{se } [\bar{X},Y] \end{cases}$$

Nel caso di copertura temporanea n anni:

$$V_t = \begin{cases} \sum_{h=0}^{n-t-1} {}_h|1q_{x+t} (1+i)^{-(h+1)} {}_{h+1}p_{y+t} \ddot{a}_{y+t+h+1} & \text{se } [X,Y], \text{ per } t = 1, 2, \dots, n-1 \\ b \ddot{a}_{y+t} & \text{se } [\bar{X},Y], \text{ per } t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

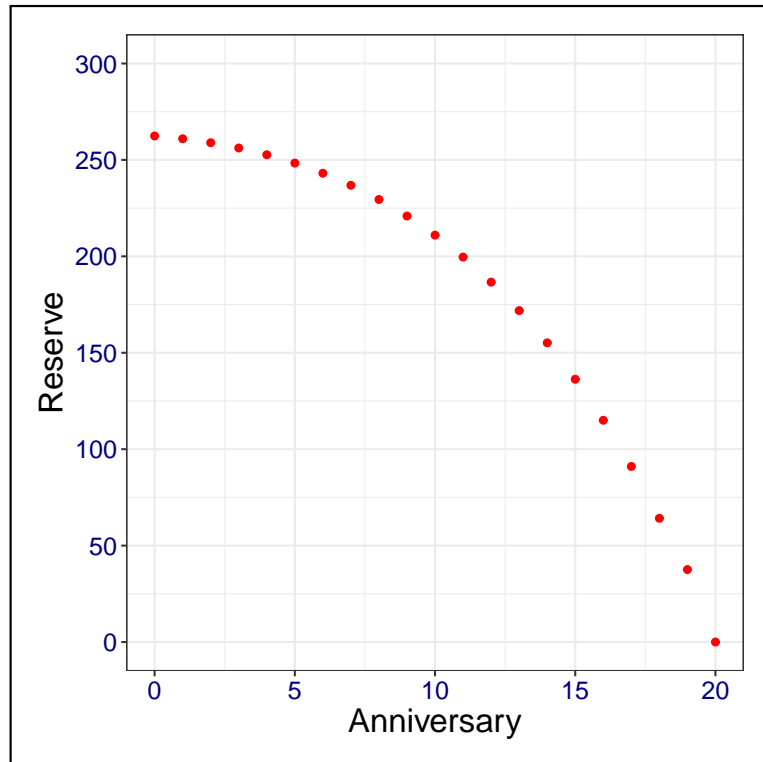
Esempio

Profilo temporale della riserva:

- senza cambiamento di stato \Rightarrow profilo della riserva di una temporanea caso morte (a premio unico)
- con cambiamento di stato:
 - ▷ inizialmente \Rightarrow profilo della riserva di una temporanea caso morte (a premio unico)
 - ▷ salto di riserva, finanziato dalla mutualità
 - ▷ successivamente \Rightarrow profilo della riserva di una rendita su una persona

(Vedi figura seguente)

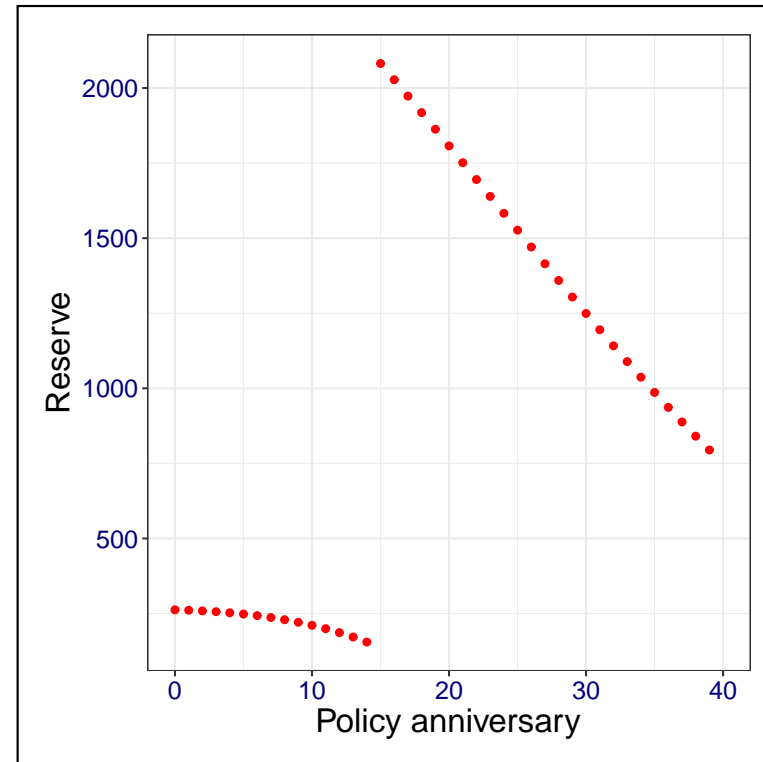
Riserve matematiche (cont.)



Riserva di una rendita di sopravvivenza

$$x = 50, y = 45, n = 20, b = 100$$

$([X, Y])$



Riserva di una rendita di sopravvivenza

$$x = 50, y = 45, n = 20, b = 100$$

$([X, Y] \rightarrow [\bar{X}, Y] \text{ in } t = 15)$

4 VERSO PRODOTTI PIU' COMPLESSI

4.1 Classificazione dei prodotti di rendita vitalizia

4.2 Un aspetto critico: “quando”?

4.1 Classificazione dei prodotti di rendita vitalizia

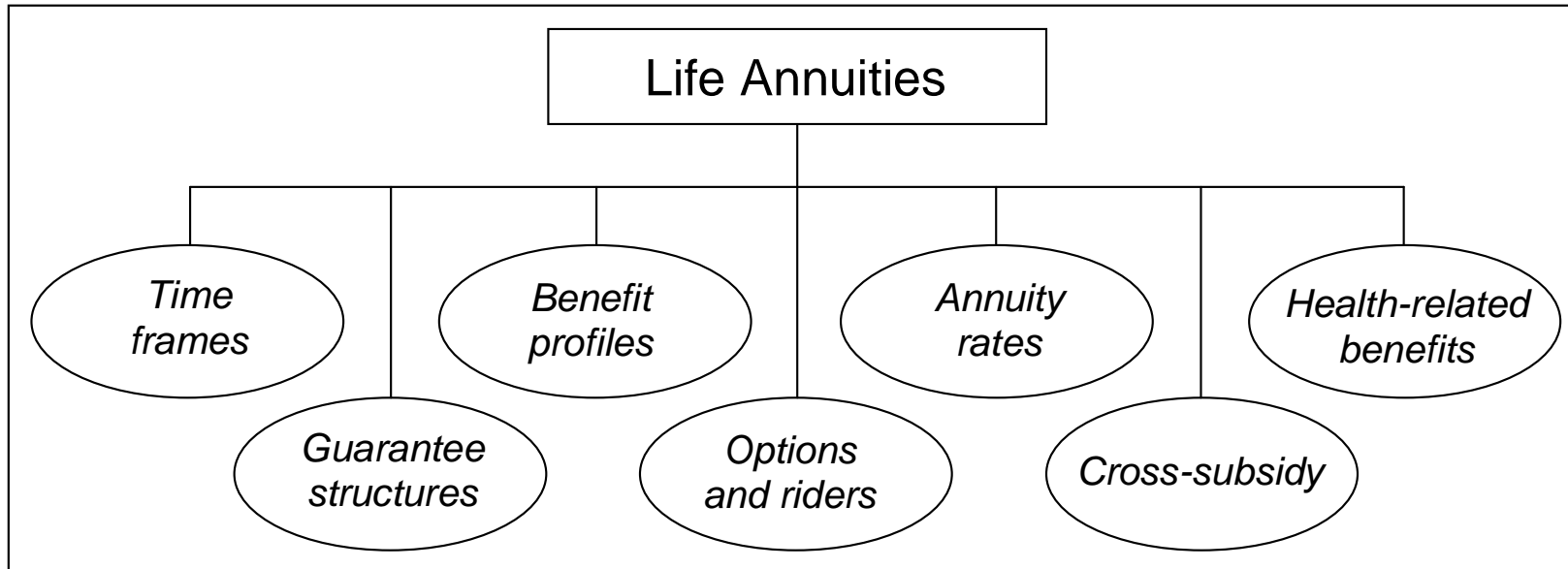
Possibili generalizzazioni e variazioni rispetto alla rendita vitalizia standard:

- estensione temporale del pagamento della rendita
- struttura delle garanzie \Rightarrow ripartizione di rischi tra assicuratore ed assicurato
- profilo temporale dei benefici
- inclusione di opzioni e benefici complementari
- determinazione del coefficient di conversione
- meccanismo di mutualità ed effetti relativi
- collegamento dei benefici alle condizioni di salute dell'assicurato

Seguono vari criteri di classificazione dei prodotti di rendita vitalizia

Alcune generalizzazioni e variazioni costituiscono innovazioni rispetto ai prodotti tradizionali

Classificazione dei prodotti di rendita vitalizia (cont.)



Criteria di classificazione

4.2 Un aspetto critico: “quando”?

In relazione all'estensione temporale del pagamento della rendita: qual è il momento più appropriato di inizio del pagamento dei benefici?

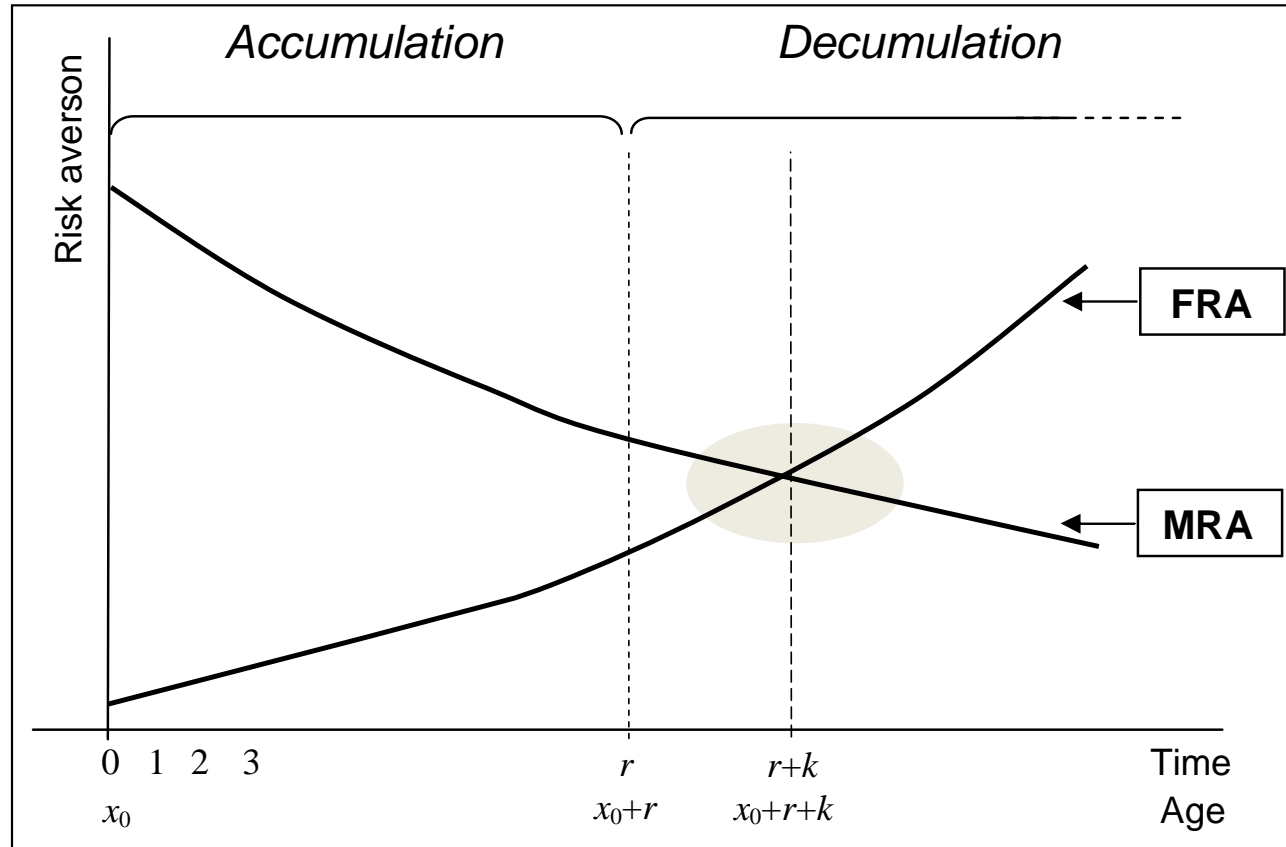
Aspetti da considerare:

- la rendita è basata sul meccanismo di mutualità
 - ▷ al decesso la riserva è assegnata al portafoglio \Rightarrow assenza di beneficio al decesso
 - \Rightarrow avversione al *rischio mortalità* (MRA)
- processo di prelevamento
 - ▷ al decesso l'eventuale fondo residuo è disponibile agli eredi
 - ▷ solitamente assenza di garanzia di rendimento
 - \Rightarrow avversione al *rischio finanziario* (FRA)

L'avversione ai due rischi è variabile con l'età (vedi figura seguente)

\Rightarrow possibile individuare un momento appropriato per l'inizio della rendita, successivo alla data r di pensionamento

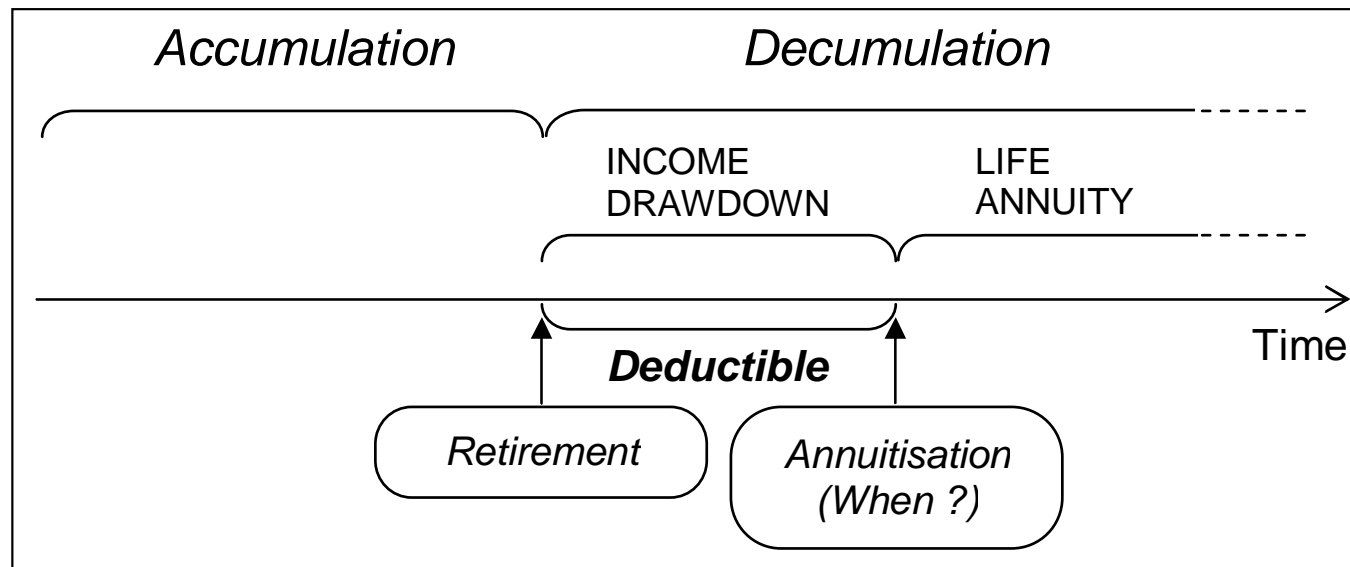
Un aspetto critico: “quando”? (cont.)



Avversione al rischio finanziario e al rischio mortalità

Un aspetto critico: “quando”? (cont.)

“Ritardo” nell’inizio rendita rispetto al tempo r di pensionamento
⇒ introduzione di una “franchigia temporale” (intervallo coperto da un processo di prelievamento)



Rendita vitalizia con “franchigia” temporale

5 ESTENSIONE TEMPORALE DELLE RENDITE VITALIZIE

- 5.1 La polizza e il pagamento dei benefici
- 5.2 Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita
- 5.3 Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento
- 5.4 Copertura del rischio longevità

5.1 La polizza e il pagamento dei benefici

Alternative solitamente considerate:

- rendita vitalizia immediata, acquistata al momento di pensionamento (nel linguaggio internazionale: SPIA = single premium immediate annuity)
- rendita vitalizia differita, acquistata durante il periodo di attività lavorativa, usualmente finanziata da una sequenza di premi / versamenti, pagata dalla data di pensionamento
- processo di prelevamento da un fondo, a partire dalla data di pensionamento

Ulteriori alternative definibili, ad esempio, mediante restrizioni imposte all'intervallo di pagamento della rendita (vedi figura seguente)

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

Notazione

x_0 = età al tempo 0 (es. inizio del periodo di accumulazione)

r = istante di pensionamento

$x_r = x_0 + r$ = età al pensionamento

n = durata in anni di pagamento di una rendita temporanea

s = durata in anni del periodo di ritardo (es. nelle rendite old-age)

x = un'età precedente il pensionamento

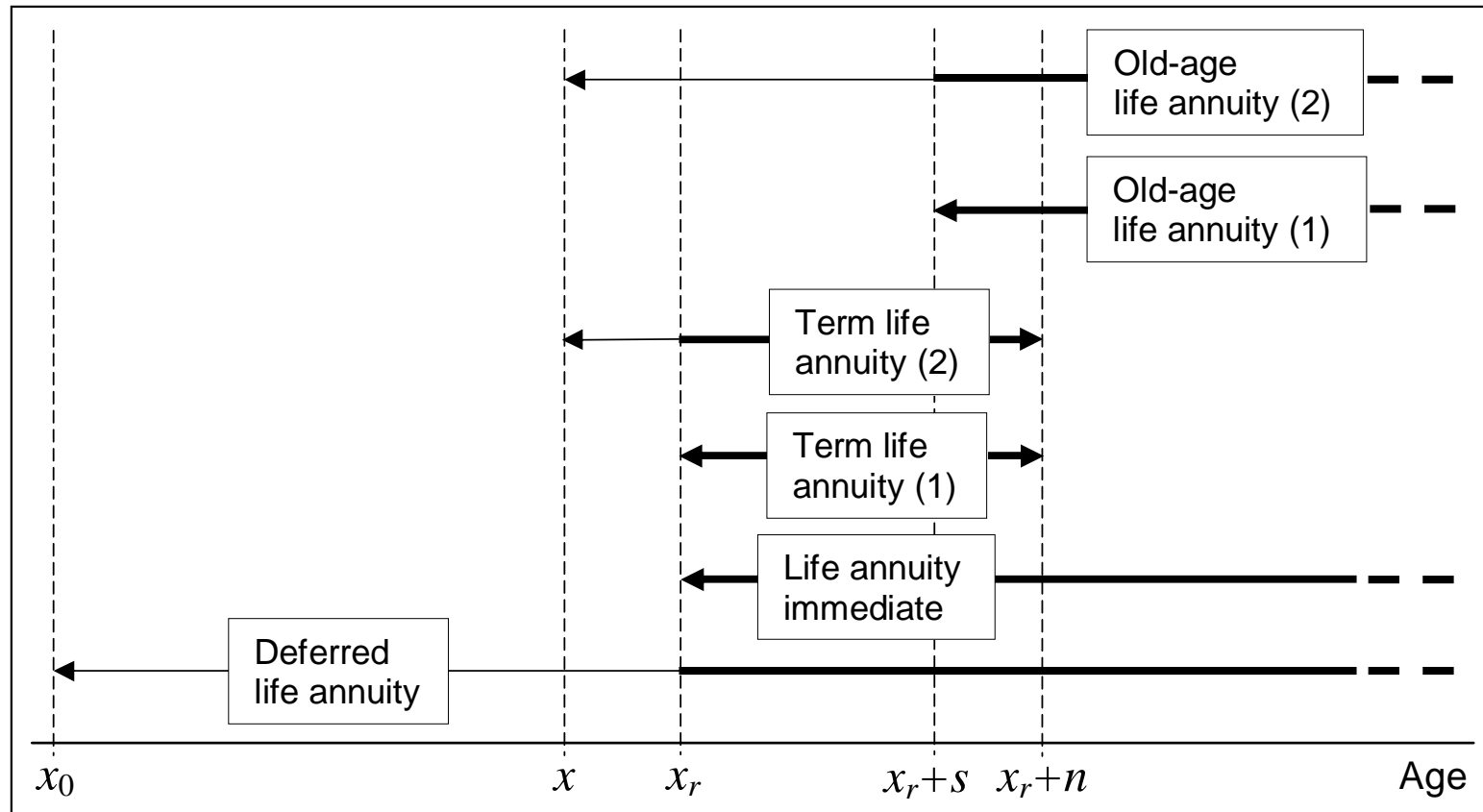
u = durata in anni del periodo di garanzia

z = durata in anni della controassicurazione

ξ = età al termine del periodo di controassicurazione

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

Estensioni temporali: schema di riferimento



Estensione temporale per vari tipi di rendite vitalizie

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

Rendita vitalizia differita

Ipotesi: il periodo di differimento coincide con il periodo di accumulazione (o parte di esso)

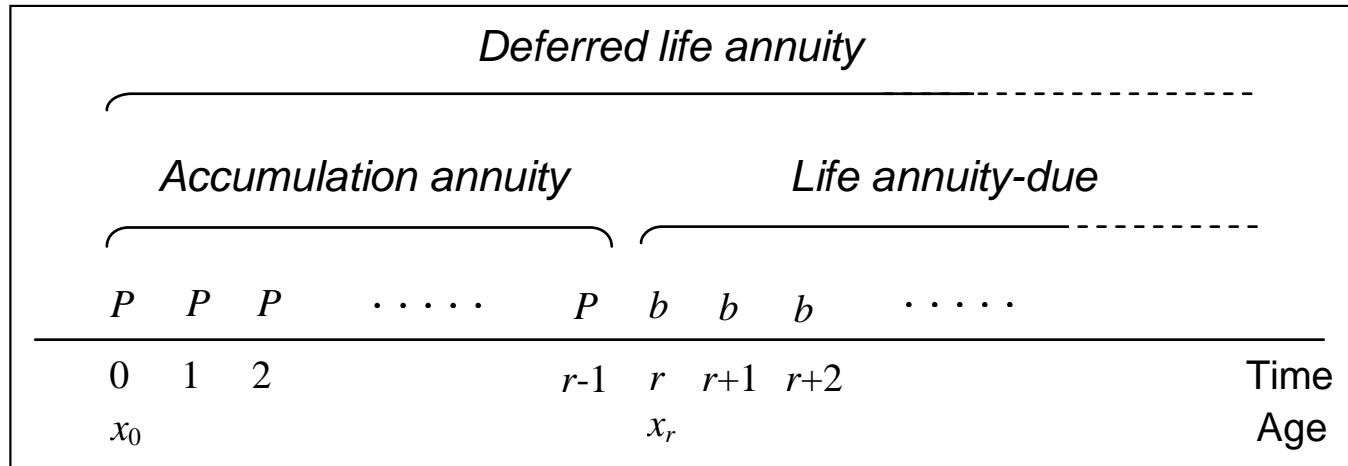
Nell'accezione attuariale tradizionale: condizioni di contratto, compreso il tasso di conversione, stabilite all'inizio del periodo di differimento \Rightarrow significativo rischio di longevità e rischio finanziario a carico dell'assicuratore

Più plausibili diverse organizzazioni contrattuali, in termini di relazione tra:

- ▷ importo dei premi / versamenti (supposti costanti) P durante il periodo di accumulazione
- ▷ importo del beneficio b della rendita

(Vedi figura seguente)

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)



Rendita vitalizia differita - Struttura base

- (1) L'accumulazione consiste in una rendita vitalizia temporanea (pagato dal soggetto), di importo annuo P' ; in base al principio di equità:

$$P' \ddot{a}_{x_0:r|} = b {}_r| \ddot{a}_{x_0}$$

⇒ rendita vitalizia differita “tradizionale” ⇒ condizioni stabilite al tempo 0

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

- (2) L'accumulazione è un processo puramente finanziario; versamento annuo P'' ; risultato al tempo r (assumendo lo stesso tasso i della rendita di accumulazione):

$$P'' \sum_{h=0}^{r-1} (1+i)^{r-h} = b \ddot{a}_{x_r}$$

Per il principio di equità, al tempo 0:

$$P'' \sum_{h=0}^{r-1} (1+i)^{-h} {}_r p_{x_0} = b {}_r | \ddot{a}_{x_0}$$

Fissato il beneficio b , si trova: $P'' > P'$

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

- (3) Si supponga che il premio P' pagato al tempo h , $h = 0, 1, \dots, r - 1$ sia usato per acquistare una rendita vitalizia differita con beneficio b_h , pagata dal tempo r ; quindi al tempo h :

$$P' = b_h \cdot {}_{r-h}| \ddot{a}_{x_0+h}$$

che implica al tempo 0:

$$P' \cdot {}_h E_{x_0} = b_h \cdot {}_{r-h}| \ddot{a}_{x_0}$$

(logica dei *premi unici ricorrenti*); sommando su entrambi i lati, per $h = 0, 1, \dots, r - 1$, si trova:

$$P' \cdot \ddot{a}_{x_0:r|} = {}_{r|} \ddot{a}_{x_0} \sum_{h=0}^{r-1} b_h$$

e, ovviamente: $\sum_{h=0}^{r-1} b_h = b$

In pratica: possibilità di cambiare la base tecnica nei vari istanti h

⇒ maggiore flessibilità

⇒ rischio dell'assicuratore progressivamente ridotto

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

Esempio

Ipotesi: stessa base tecnica al tempo 0 e al tempo r

Premi annui P' e versamenti P'' per costituzione di rendita vitalizia differita, con vari periodi di differimento r

	$r = 10$	$r = 15$	$r = 20$	$r = 25$	$r = 30$
P'	158.43	99.85	70.79	53.52	42.19
P''	161.79	102.45	72.93	55.32	43.67
P''/P'	1.0212	1.0261	1.0302	1.0335	1.0352

Finanziamento di rendite vitalizie differite; $x_r = 65$

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

Rendita vitalizia temporanea

Consideriamo la rendita vitalizia temporanea (1) (secondo lo schema di riferimento), cioè escludendo periodo di differimento

Esempio

Premi unici per varie temporaneità n

	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 25$
$100 a_{x_r:n}$	858.51	1 183.97	1 430.34	1 591.83
$a_{x_r:n} / a_{x_r}$	0.5029	0.6935	0.8378	0.9324

Premi unici di rendite vitalizie temporanee; $x_r = 65$

La polizza e il pagamento dei benefici (cont.)

Rendita vitalizia “old-age”

Restrizione temporale opposta a quella della rendita vitalizia temporanea

Possibile abbinamento con processo di prelevamento (vedi 5.2)

Esempio

Premi unici per varie età $x_r + s$ all’inizio rendita

	$x_r + s = 75$	$x_r + s = 80$	$x_r + s = 85$
$100 a_{x_r+s}$	1149.19	886.25	650.23
a_{x_r+s}/a_{x_r}	0.6732	0.5191	0.3810

Premi unici di rendite vitalizie “old-age”; $x_r = 65$

5.2 Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita

Per mitigare gli svantaggi di una totale ed immediata conversione in rendita dell'importo S disponibile alla data di pensionamento:

- conversione di parte di S
- ritardo nella conversione in rendita

Consideriamo la seconda alternativa

Processo di prelevamento temporaneo e conversione ritardata in rendita

Si assuma che, all'epoca di pensionamento (età x_r):

- ▷ sia disponibile l'importo S , come risultato del processo di accumulazione
- ▷ sia possibile scegliere tra le seguenti alternative:

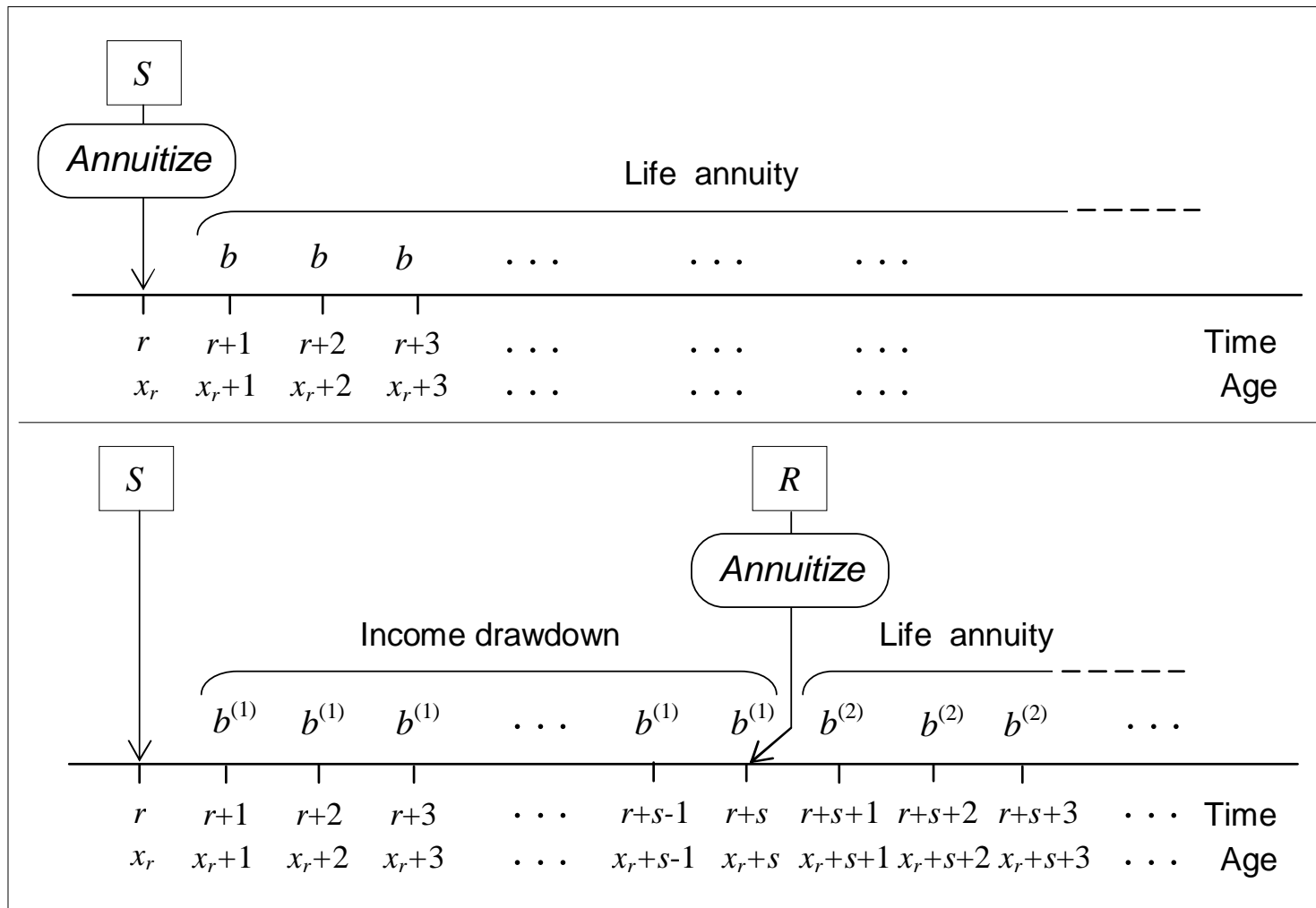
Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

1. convertire l'intero importo S per acquistare una rendita vitalizia di rata b , con $b a_{x_r} = S$
2. lasciare l'importo S in un fondo, e quindi
 - (a) prelevare l'importo annuo $b^{(1)}$ agli istanti $h = 1, 2, \dots, s$ (es. con $s = 5$ o $s = 10$)
 - (b) con l'importo R disponibile al tempo s acquistare (se in vita) una rendita vitalizia immediata di rata $b^{(2)}$

(Vedi figura seguente)

Consideriamo l'alternativa 2

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)



Conversione in rendita al pensionamento e conversione ritardata

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

Vantaggi del ritardo:

- “liquidità” (relativa) del fondo
- disponibilità fondo residuo in caso di decesso

Svantaggi del ritardo:

- perdita della mutualità durante il periodo di ritardo
- rischio causato da possibile variazione (sfavorevole all'assicurato) di base tecnica delle rendite vitalizie
 - possibile cambio di tavola di mortalità, dovuto a inatteso miglioramento della mortalità durante il periodo di ritardo
 - possibile riduzione del tasso di interesse

Per semplificare, assumeremo:

- ▷ nessun cambiamento nella tavola di mortalità
- ▷ stesso tasso di interesse i sia nella rendita al tempo 0 sia in quella al tempo s

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

Inoltre

▷ sia g il tasso di interesse durante il periodo di ritardo

Se $g = i$ e il prelevamento annuo è $b^{(1)} = b$, l'ammontare R alla fine del ritardo non è sufficiente ad acquistare una rendita di rata $b^{(2)} = b$ a causa dell'assenza di mutualità durante il periodo di ritardo

⇒ impossibile avere $b^{(1)} = b^{(2)} = b$

Se $g > i$ il beneficio durante il processo di prelevamento e/o quello dato dalla rendita vitalizia possono essere aumentati

- lo spread $g - i$ “recupera” (in parte) l'effetto mutualità
- rischio di investimento durante il periodo di ritardo

Problema in termini formali: relazioni tra

$$S, b, s, R, b^{(1)}, b^{(2)}, i, g$$

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

Nessun ritardo:

$$S = b a_{x_r} \quad (1)$$

Ritardo di s anni:

$$S (1 + g)^s - \underbrace{b^{(1)} \sum_{h=1}^s (1 + g)^{s-h}}_{\text{valore in } s \text{ della sequenza di prelevamenti}} = R \quad (2)$$

importo netto disponibile in s

$$R = b^{(2)} a_{x_r+s} \quad (3)$$

Da (2) e (3) \Rightarrow equazione:

$$S (1 + g)^s - b^{(1)} \sum_{h=1}^s (1 + g)^{s-h} = b^{(2)} a_{x_r+s} \quad (4)$$

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

Esempi di impiego di (4): dati S, i, b, s e

- ▷ dati g e $b^{(1)} = b \rightarrow$ calcolare $b^{(2)}$
- ▷ dati $b^{(1)} = b^{(2)} = b \rightarrow$ calcolare $g = g(x_r, s)$ (tasso “equivalente”, dipendente da età x_r e ritardo s)

Esempio

Rendita vitalizia immediata ad età $x_r = 65$

Base tecnica: $i = 0.02$, tavola HP1

$$b = 100 \Rightarrow S = 1\,707.16$$

Vedi Tabelle \Rightarrow vantaggio della mutualità apprezzabile oltre i 75-80 anni

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

s	$g = 0.02$	$g = 0.025$	$g = 0.03$	$g = 0.035$
5	95.64	98.54	101.51	104.53
10	85.80	92.67	99.89	107.47
15	64.12	76.65	90.25	104.99
20	16.46	37.36	60.95	87.50

Beneficio $b^{(2)}$ della rendita vitalizia dopo il periodo di ritardo; $b^{(1)} = b = 100$

s	$g(65, s)$
5	0.02749
10	0.03009
15	0.03334
20	0.03719

Extra-rendimento richiesto per compensare la mutualità; $b^{(1)} = b$

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

Osservazioni

- Soluzione $g(x_r, s)$ dell'eq. (4) con $b^{(1)} = b^{(2)} = b \Rightarrow$ recupero dell'effetto mutualità
 - ▷ $g(x_r, s)$ chiamato Implied Longevity Yield (ILY) ^a
- Trend con diminuzione mortalità \Rightarrow minore mutualità
 \Rightarrow minore $g(x_r, s) \Rightarrow$ più conveniente il ritardo (o un maggiore ritardo) nella conversione in rendita
- Conversione ritardata \Rightarrow trade-off tra rischio mortalità (importo disponibile in caso di decesso) e rischio finanziario (necessità di investire a tasso relativamente elevato); vedi 4.2

^a Registered trademarks and property of *CANNEX Financial Exchanges*

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)

Processo di prelevamento e conversione progressiva in rendita (Staggered annuitization)

Processo di conversione in rendita:

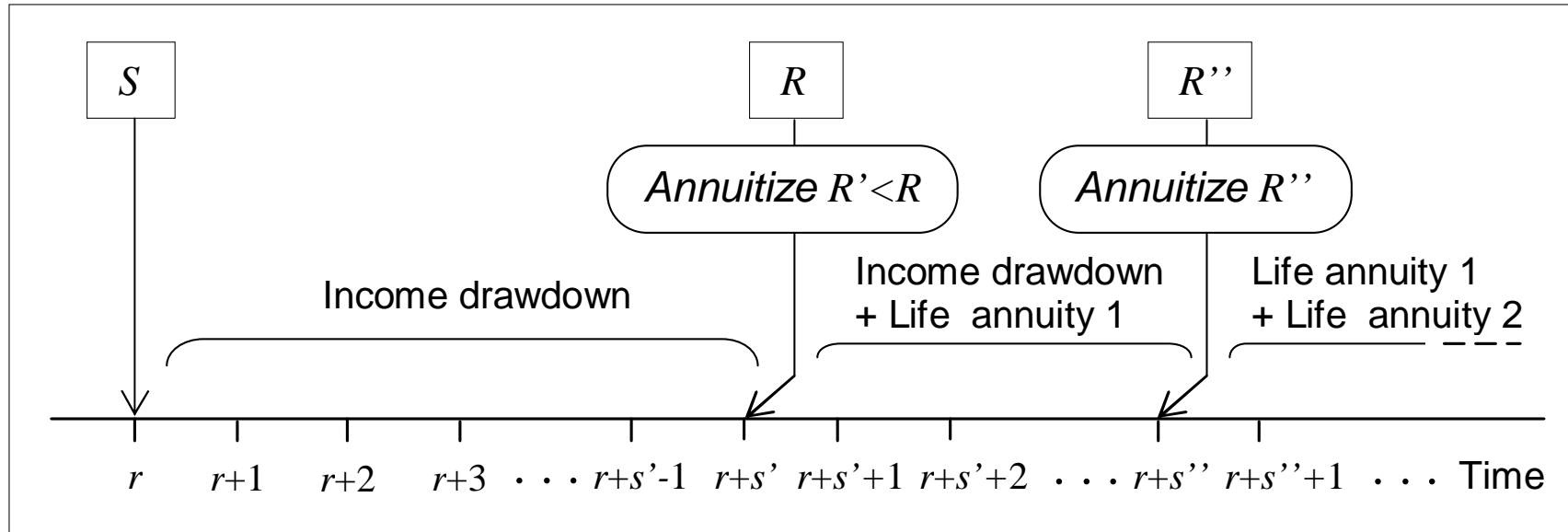
- nessun acquisto di rendita al momento di pensionamento (tempo 0) \Rightarrow processo di prelevamento
- una prima rendita acquistata al tempo s' , impiegando parte del capitale rimanente R'
- una seconda rendita acquistata al tempo s'' , impiegando parte del capitale rimanente R''
-

Conseguenza: dopo il tempo s' il reddito post-pensionamento è costituito da due parti

- ▷ prelevamenti (fino all'eventuale completa conversione)
- ▷ una o più rendite

Vantaggi e svantaggi: vedi conversione ritardata

Il reddito post-pensionamento: conversione in rendita (cont.)



Conversione progressiva

5.3 Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento

Consideriamo strategie che non implicano conversioni in rendita ma soltanto processi di prelevamento, variamente definiti

Il processo di prelevamento

Importo S disponibile alla data di pensionamento \Rightarrow investito in un fondo, gestito da un intermediario finanziario

Interessi annualmente accreditati al fondo, al tasso g

Sia F_t l'ammontare del fondo al tempo t , dopo il prelevamento b_t

Profilo temporale del fondo descritto in via ricorrente dalla:

$$F_t = F_{t-1} (1 + g) - b_t \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

con $F_0 = S$

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Si assuma, in particolare:

$$b_t = F_{t-1} g$$

Si trova:

$$F_t = F_{t-1} (1 + g) - F_{t-1} g = F_{t-1} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

e quindi:

$$F_t = S \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

e inoltre:

$$b_t = S g \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

Quindi:

- ▷ il fondo non si esaurisce mai
- ▷ l'importo b è probabilmente modesto

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

La sequenza di prelevamenti $S g$ costituisce una rendita perpetua, con valore attuariale al tasso g ; infatti:

$$S g a_{\infty|g} = S g \frac{1}{g} = S$$

Prelevamenti costanti

Più in generale, sia:

$$b_t = b \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

Se $b > S g \Rightarrow F_t$ decresce e si può trovare t_{\max} tale che:

$$F_{t_{\max}} \geq 0 \quad \text{e} \quad F_{t_{\max}+1} < 0$$

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

La possibilità di prelevamento dipende ovviamente dalla determinazione della durata aleatoria di vita T_{x_r} :

- (a) se $T_{x_r} \leq t_{\max} \Rightarrow$ disponibilità del fondo, ed eventuale fondo residuo al decesso
- (b) se $T_{x_r} > t_{\max} \Rightarrow$ esaurimento del fondo e intervallo di tempo senza possibilità di prelevamenti (*rischio individuale di longevità*)

Annullamento del rischio individuale di longevità scegliendo b tale che $t_{\max} = \omega - x_r$; quindi:

$$S = b a_{\omega - x_r}]$$

Processo di prelevamento \Rightarrow rendita certa temporanea $\omega - x_r$ anni, con probabile fondo residuo al decesso

Temporaneità ridotta \Rightarrow maggiore beneficio b

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Sia b tale che $t_{\max} = x^{[L]} - x_r$, con $x^{[L]}$ = punto di Lexis; allora:

$$S = b a_{x^{[L]} - x_r}$$

Esaurimento fondo con probabilità $\mathbb{P}[T_{x_r} > x^{[L]} - x_r]$

Esempio

Dati: $x_r = 65$; tavola HP1 e tasso $i = 0.02$ per il calcolo del fattore di rendita vitalizia $a_{65} = 17.0716$

Seguenti tavole:

- ▷ fattori di rendite temporanee
- ▷ relazione tra S e b , in funzione della (eventuale) temporaneità
- ▷ confronto tra benefici in rendite vitalizie temporanee

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

	$g = 0.02$	$g = 0.03$
$a_{25 g}$	19.52	17.41
$a_{45 g}$	29.49	24.52
$a_{\infty g}$	50.00	33.33

Valori attuali di rendite certe

Tasso g	Target	Rendita certa		
		$x^{[L]} = 90$	$\omega = 110$	Perpetuità
0.02	$S = 1\,707.16 \Rightarrow$	$b = 87.44$	$b = b = 57.89$	$b = 34.14$
	$b = 100 \Rightarrow$	$S = 1\,952.35$	$S = 2\,949.02$	$S = 5\,000.00$
0.03	$S = 1\,707.16 \Rightarrow$	$b = 98.03$	$b = 69.63$	$b = 51.21$
	$b = 100 \Rightarrow$	$S = 1\,741.32$	$S = 2\,451.87$	$S = 3\,333.33$

Relazioni tra importi convertiti in rendita e benefici di rendita

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Target	Rendita vitalizia	Rendita vitalizia temporanea			
		$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 25$
$S = 1\,707.16 \Rightarrow$	$b = 100$	$b = 198.85$	$b = 144.19$	$b = 119.35$	$b = 107.25$
$b = 100 \Rightarrow$	$S = 1\,707.16$	$S = 858.51$	$S = 1\,183.97$	$S = 1\,430.34$	$S = 1\,591.83$

Relazioni tra importi convertiti e benefici di rendita

Prelevamenti variabili

Beneficio b_t espresso in percentuale del fondo:

$$b_t = \beta_t F_{t-1} (1 + g) \text{ per } t = 1, 2, \dots$$

Profilo temporale del fondo:

$$F_t = F_{t-1} (1 + g) (1 - \beta_t)$$

con $F_0 = S$

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Consideriamo i due casi seguenti

- *Percentuale costante*

Sia β la percentuale di prelevamento; allora

$$b_t = \beta F_{t-1} (1 + g)$$

$$F_t = F_{t-1} (1 + g) (1 - \beta)$$

Il profilo temporale del fondo dipende ovviamente dalla relazione tra β e g ; se

$$\beta = \frac{g}{1 + g}$$

si trova: $b_t = F_{t-1} g \Rightarrow$ prelevamento costante e fondo $F_t = S$
per $t = 1, 2, \dots$

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Per trovare soluzioni di interesse pratico:

$$\frac{g}{1+g} < \beta < 1$$

Quindi:

- ▷ fondo decrescente
- ▷ ammontare dei prelevamenti decrescente

- *Percentuale variabile*

Sia β_t la percentuale di prelevamento al tempo t

Determinare la sequenza β_1, β_2, \dots in base ad un target assegnato

Ad esempio: fondo F_t sia tale da consentire prelevamenti per tutta la vita residua attesa

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Quindi:

$$b_t = F_{t-1} \frac{1+g}{e_{x_r+t}} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

con e_{x_r+t} = vita residua attesa ad età $x_r + t$

In percentuale:

$$\beta_t = \frac{1}{e_{x_r+t}} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

Profilo temporale del fondo:

$$F_t = F_{t-1} (1+g) \left(1 - \frac{1}{e_{x_r+t}}\right)$$

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)

Confronto tra strategie di prelevamento

Diverse strategie \Rightarrow diversi importi di prelevamento e diversi profili temporali del fondo

Esempio

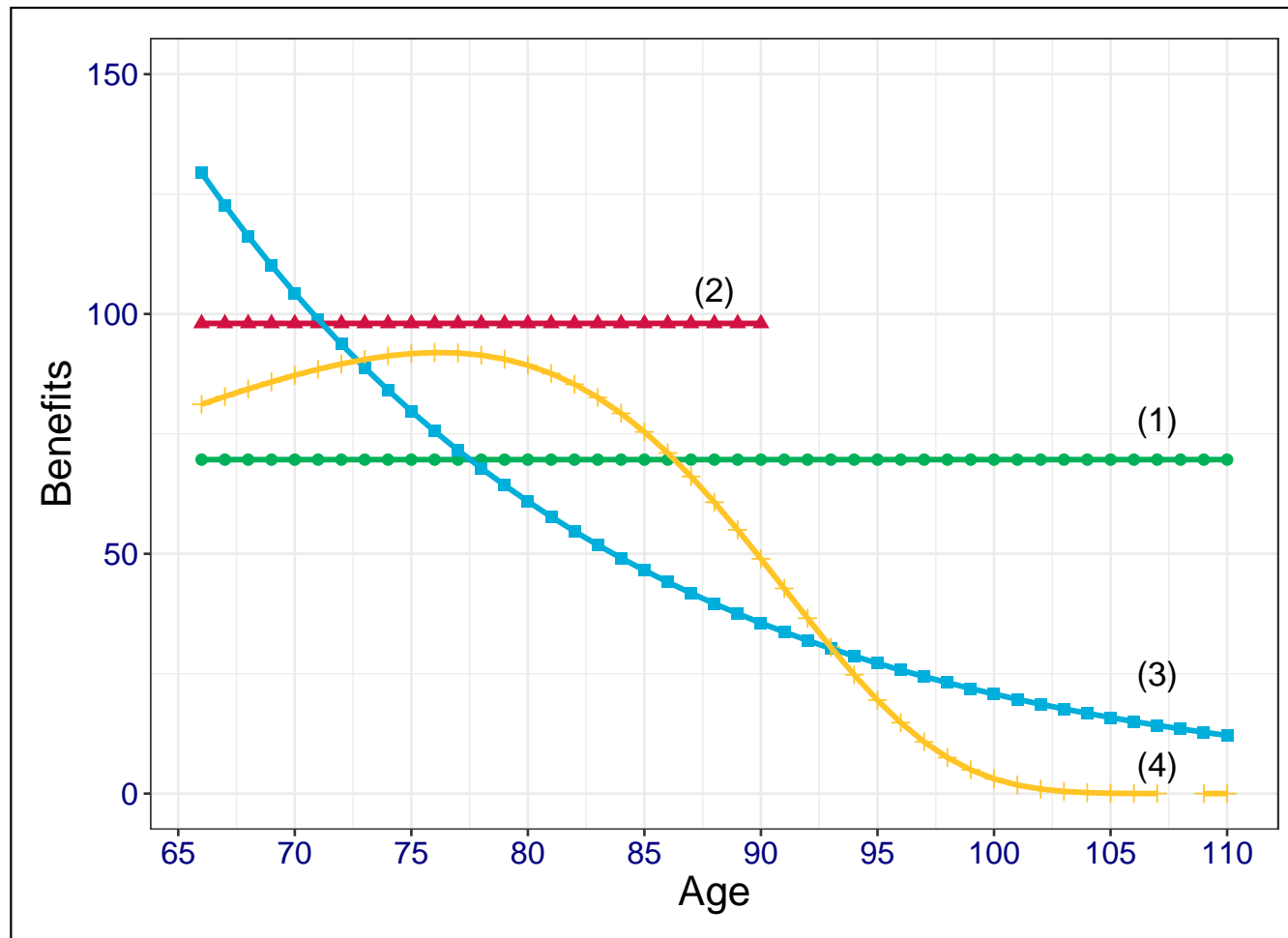
Confronto tra:

- (1) Processo di prelevamento dato da una rendita certa fino ad età $\omega = 110$
- (2) Processo di prelevamento dato da una rendita certa fino ad età $x^{[L]} = 90$
- (3) Processo di prelevamento con percentuale costante $\beta = 0.08$
- (4) Processo di prelevamento con percentuale variabile pari al reciproco della vita residua attesa

Dati: $x_r = 65$, $S = 1\,707.16$ (premio unico di rendita vitalizia immediata con $b = 100$), $g = 0.03$; vita residua attesa calcolata con HP1

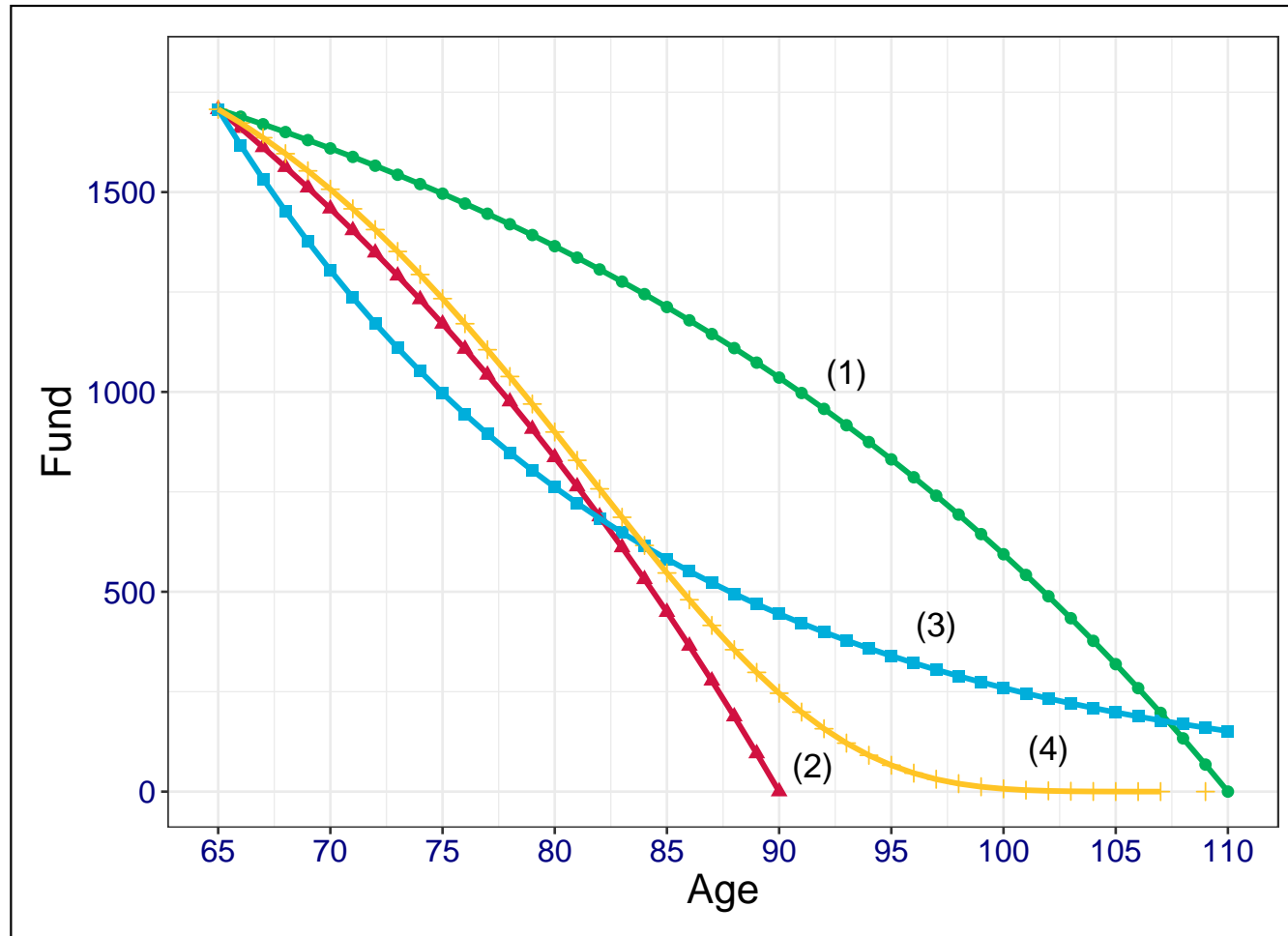
(Vedi figure seguenti)

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)



Quattro processi di prelevamento: confronto tra benefici annui

Il reddito post-pensionamento: processi di prelevamento (cont.)



Quattro processi di prelevamento: confronto tra andamenti del fondo

5.4 Copertura del rischio longevità

Diverse strategie per il reddito post-pensionamento \Rightarrow diversi impatti:

- (a) relazione tra ammontare S di attivi disponibili alla data di pensionamento e profilo temporale del reddito
- (b) compatibilità con desiderio di lascito
- (c) possibilità di copertura del rischio individuale di longevità

(Vedi figura seguente)

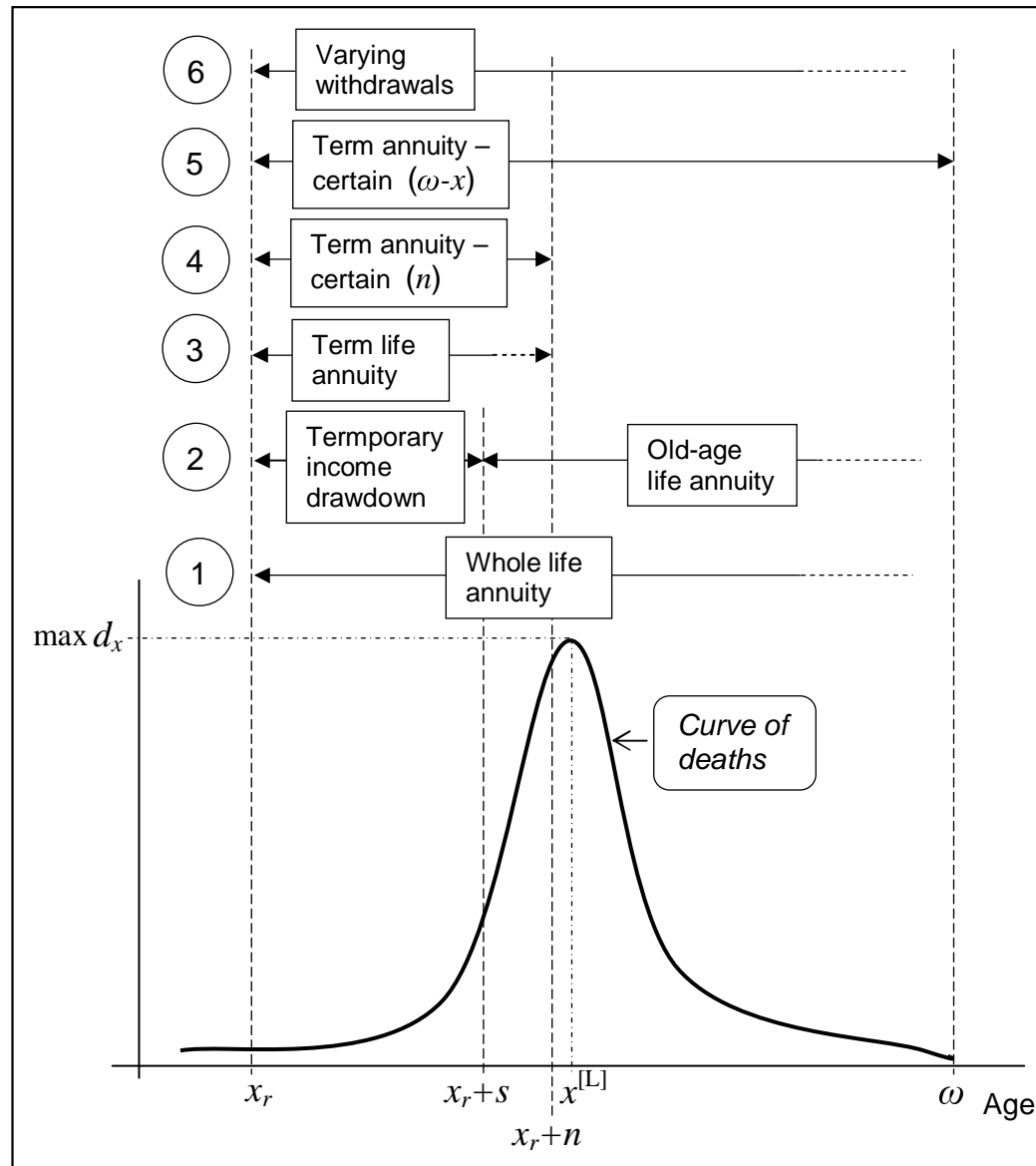
In relazione alla copertura del rischio individuale di longevità:

- strategie 1 e 2 garantiscono totale copertura
- strategie 3 e 4 non garantiscono totale copertura
 - ▷ livello di copertura dipendente da temporaneità n
 - ▷ probabilità di non totale copertura data da ${}_n p_{x_r} = \mathbb{P}[T_{x_r} > n]$

(vedi Esempio)

- strategia 5 garantisce totale copertura a costo di prelevamenti modesti
- classe di strategie 6: copertura dipendente dal processo di prelevamento

Copertura del rischio longevità (cont.)



Strategie alternative per il reddito post-pensionamento

Copertura del rischio longevità (cont.)

Esempio

In Tabella: probabilità di sopravvivenza oltre il termine n della rendita

Notare: significative probabilità anche per elevati valori di n

x_r	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 25$
65	0.900196	0.794517	0.632602	0.418834
70	0.824498	0.656473	0.434639	0.208341

$$\text{Probabilità } {}_n p_{x_r} = \mathbb{P}[T_{x_r} > n]$$

6 STRUTTURE DI GARANZIA

6.1 Introduzione

6.2 Alcune strutture di base

6.3 Alcuni prodotti “old-age”

6.4 Flessibilità nelle garanzie

6.5 Prodotti “Variable annuity”

6.1 Introduzione



Descriviamo la struttura di vari prodotti assicurativi e/o finanziari, che riguardano la fase di accumulazione o di decumulazione (payout) o entrambe

Ogni prodotto comporta un specifico insieme di garanzie e quindi di rischi trasferiti dall'individuo all'assicuratore (o fondo pensioni)

Nelle figure seguenti:

x_0 = età all'emissione della polizza, o età all'ingresso nel fondo pensioni

$x_r = x_0 + r$ = età alla data di pensionamento

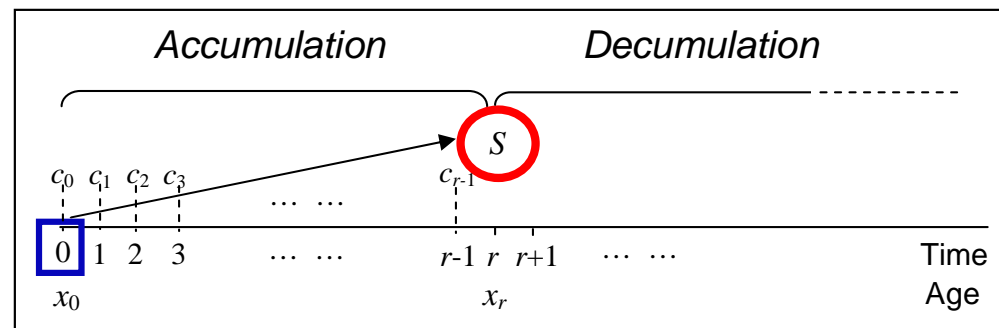
	Time at which the guarantee is stated in quantitative terms
	Ultimate object of the guarantee

Definizione della garanzia

6.2 Alcune strutture di base

Struttura 1 - Solo fase di accumulazione

Per ogni data sequenza di contributi / premi / versamenti $c_0, c_1, \dots, c_{r-1} \Rightarrow$ importo S garantito



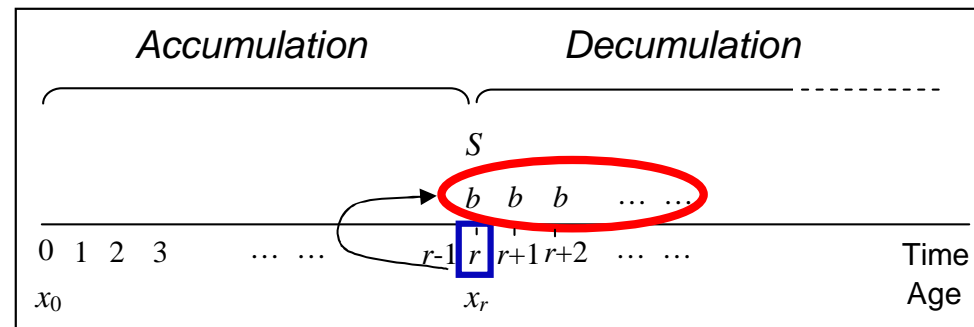
Struttura 1: solo fase di accumulazione

Esempi

- prodotto finanziario: garanzia di interesse
- prodotto assicurativo, es. capitale differito o assicurazione mista: garanzia di interesse e di mortalità/longevità

Struttura 2 - Solo fase di decumulazione

Per ogni dato importo $S \Rightarrow$ beneficio annuale b garantito



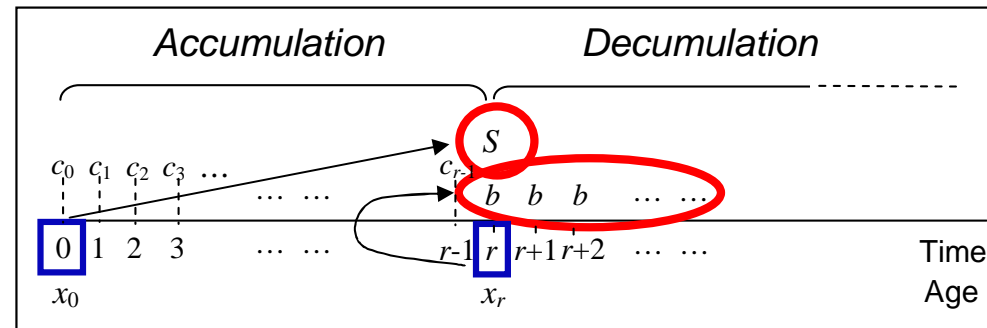
Struttura 2: solo fase di decumulazione

Esempi

- prodotto finanziario: garanzia di interesse \Rightarrow beneficio annuale b garantito fino all'esaurimento del fondo
- prodotto assicurativo, es. rendita vitalizia immediata CAR: garanzia di interesse e di longevità \Rightarrow beneficio b garantito a vita intera (CAR = current annuity rate)

Struttura 3 - Fase di accumulazione + fase di decumulazione

Combinazione delle strutture 1 e 2



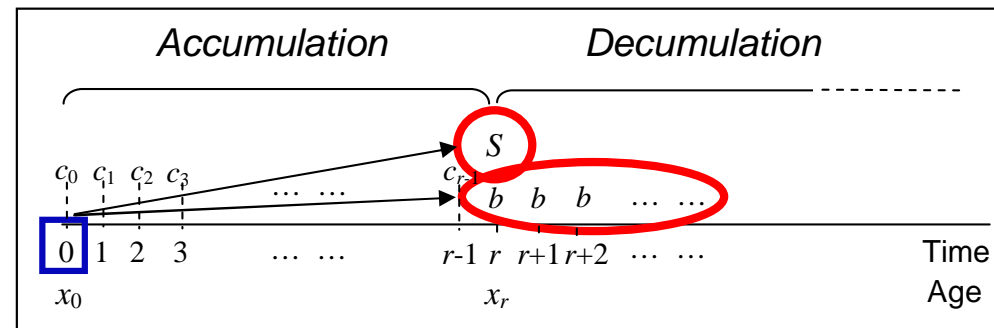
Struttura 3: fase di accumulazione e di decumulazione (I)

Esempi

- prodotto finanziario per la fase di accumulazione: garanzia di interesse $\Rightarrow S$ garantito
- prodotto assicurativo, cioè rendita vitalizia immediata CAR per la fase di decumulazione: per ogni dato S , garanzia di interesse e di longevità \Rightarrow beneficio b garantito a vita intera

Struttura 4 - Fase di accumulazione + fase di decumulazione

Tutte le garanzie stabilite al tempo 0 (alto rischio per l'assicuratore !)



Struttura 4: fase di accumulazione e di decumulazione (II)

Esempi

- rendita vitalizia differita GAR (GAR = guaranteed annuity rate)

Osservazione

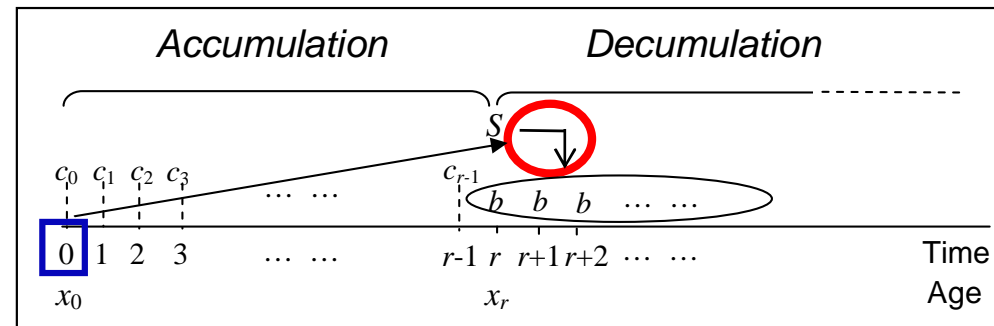
Struttura implicata in particolare dalla classica formula:

$$P \ddot{a}_{x_0:r|} = b {}_r| \ddot{a}_{x_0} \Rightarrow S = b \ddot{a}_{x_r} = \text{riserva matematica al tempo } r$$

- prodotto finanz. con gar. di interesse per la fase di accumulazione e rendita vitalizia immediata GAR per la fase di decumulazione

Struttura 5 - Fase di accumulazione + fase di decumulazione

Coefficiente di conversione in rendita stabilito al tempo 0



Struttura 5: fase di accumulazione e di decumulazione (III)

Esempio

- prodotto finanz. per la fase di accumul. e rendita vitalizia immediata per la fase di decumul.; coeff. di conversione garantito

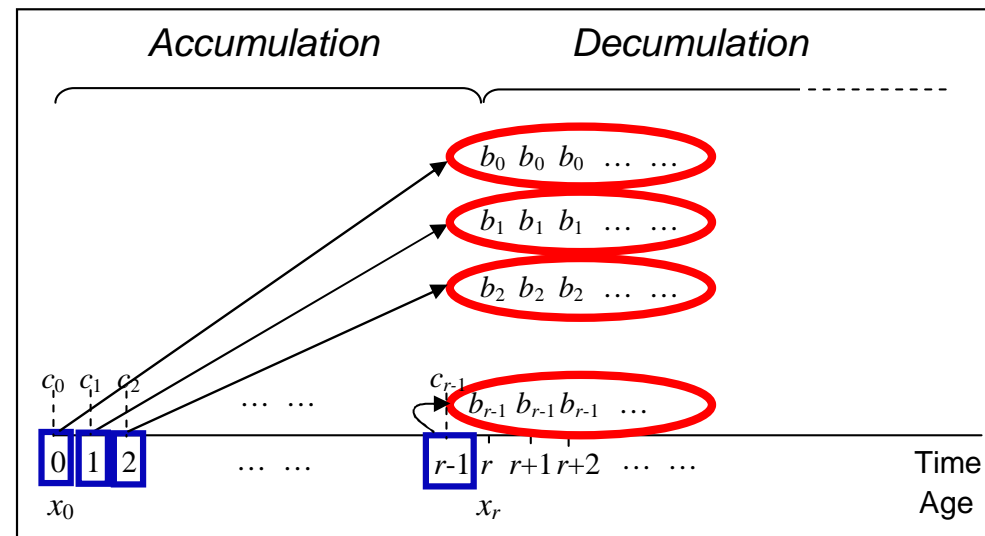
Osservazione

In particolare, prodotto GAO (guaranteed annuity option), con scelta (al pensionamento) tra:

- ▷ somma in contanti
- ▷ conversione in rendita al coefficiente corrente (CAR)
- ▷ conversione in rendita al coefficiente garantito (GAR)

Struttura 6 - Fase di accumulazione + fase di decumulazione

Possibilità di variare nel tempo il coefficiente di conversione in rendita
 ⇒ in particolare, logica dei premi unici ricorrenti



Struttura 6: fase di accumulazione e di decumulazione (IV)

Esempio:

- Rendita vitalizia costruita come combinazione di r rendite vitalizie differite

Premio $c_h \Rightarrow$ rendita differita $r - h$ anni, con beneficio b_h

Relazione tra c_h e b_h :

$$b_h = \frac{c_h}{{}_{r-h}| \ddot{a}_{x_h}^{[\text{GAR}]}(h)} \quad \text{per } h = 0, 1, \dots, r - 1$$

Rendita totale: beneficio $b = \sum_{h=0}^{r-1} b_h$

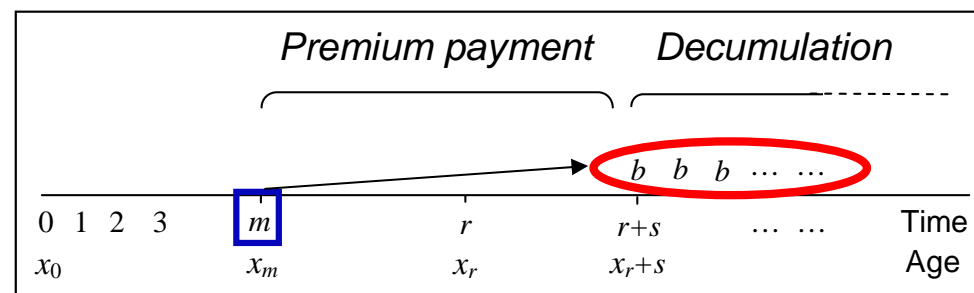
6.3 Alcuni “prodotti old-age”

Advanced Life Delayed Annuity (ALDA)

Il periodo di pagamento premi non necessariamente coincide con la (tradizionale) fase di accumulazione, potendo essere spostato verso età più elevate

La fase di decumulazione inizia dopo l'epoca di pensionamento (es. ad età 80 o 85)

⇒ prelevamenti da un fondo durante l'intervallo $(r, s - 1)$ per ottenere reddito post-pensionamento



Struttura ALDA

Alcuni “prodotti old-age” (cont.)

Analogia con Struttura 4, modificata mediante shift: $0 \rightarrow m, r \rightarrow s$

- ▷ fase di accumulazione ridotta da $(0, r - 1)$ a $(m, r' - 1)$, con $r' \geq r$
- ▷ fase di decumulazione ridotta da $(r, \omega - x)$ a $(s, \omega - x)$

Scopi di ALDA:

- coprire il rischio di longevità esclusivamente ad età elevate (cioè *copertura assicurativa con franchigia*)
- ridurre l'importo dei premi (in confronto a una tradizionale rendita vitalizia differita)
- aumentare la propensione alla conversione in rendita

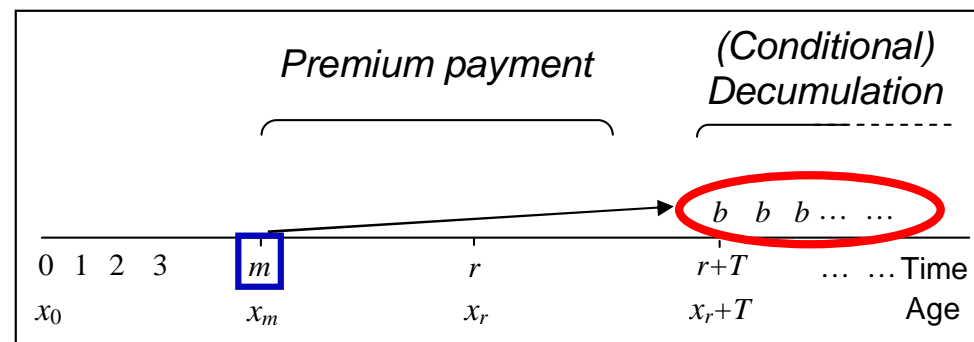
Struttura proposta da:

M. A. Milevsky. Real longevity insurance with a deductible: Introduction to advanced-life delayed annuities (ALDA). *North American Actuarial Journal*, 9:109–122, 2005

Ruin Contingent Life Annuity (RCLA)

Il reddito post-pensionamento è costituito da:

- (1) prelevamenti da un fondo dal tempo r in poi, fino al (possibile) esaurimento del fondo
- (2) una rendita vitalizia pagata dall'istante (aleatorio) T di esaurimento del fondo a causa di scenario “sfavorevole”
 - ▷ cattiva performance del fondo
 - ▷ lunga durata di vita



Struttura RCLA

Alcuni “prodotti old-age” (cont.)

La RCLA può essere interpretata come:

- (a) una ALDA con delay aleatorio $T - r$, e trigger dato dallo scenario
- (b) un prodotto assicurativo che genera una rendita vitalizia in uno scenario worst-case

Analogia con Struttura 4, modificata mediante shift: $0 \rightarrow m, r \rightarrow T$

- ▷ fase di accumulazione ridotta da $(0, r - 1)$ a $(m, r' - 1)$, con $r' \geq r$
- ▷ fase di decumulazione ridotta da $(r, \omega - x)$ a $(T, \omega - x)$

Calcolo del premio per una RCLA \Rightarrow necessità di costruire uno pseudo-indice, che tenga conto di:

- andamento di un indice di performance del mercato finanziario
- una sequenza di ragionevoli prelievi durante la fase di decumulazione

Implementazione: vedi GLWB in “Variable annuities”

6.4 Flessibilità nelle garanzie

Rendite vitalizie differite, pagabili dal tempo r

Flessibilità nei prodotti GAR: lo schema “GAR condizionato”

GAR fissato al tempo k ($0 \leq k < r$): $\frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR1]}(k)}$

Beneficio:

$$b^{[1]} = \frac{S}{a_{x_r}^{[GAR1]}(k)}$$

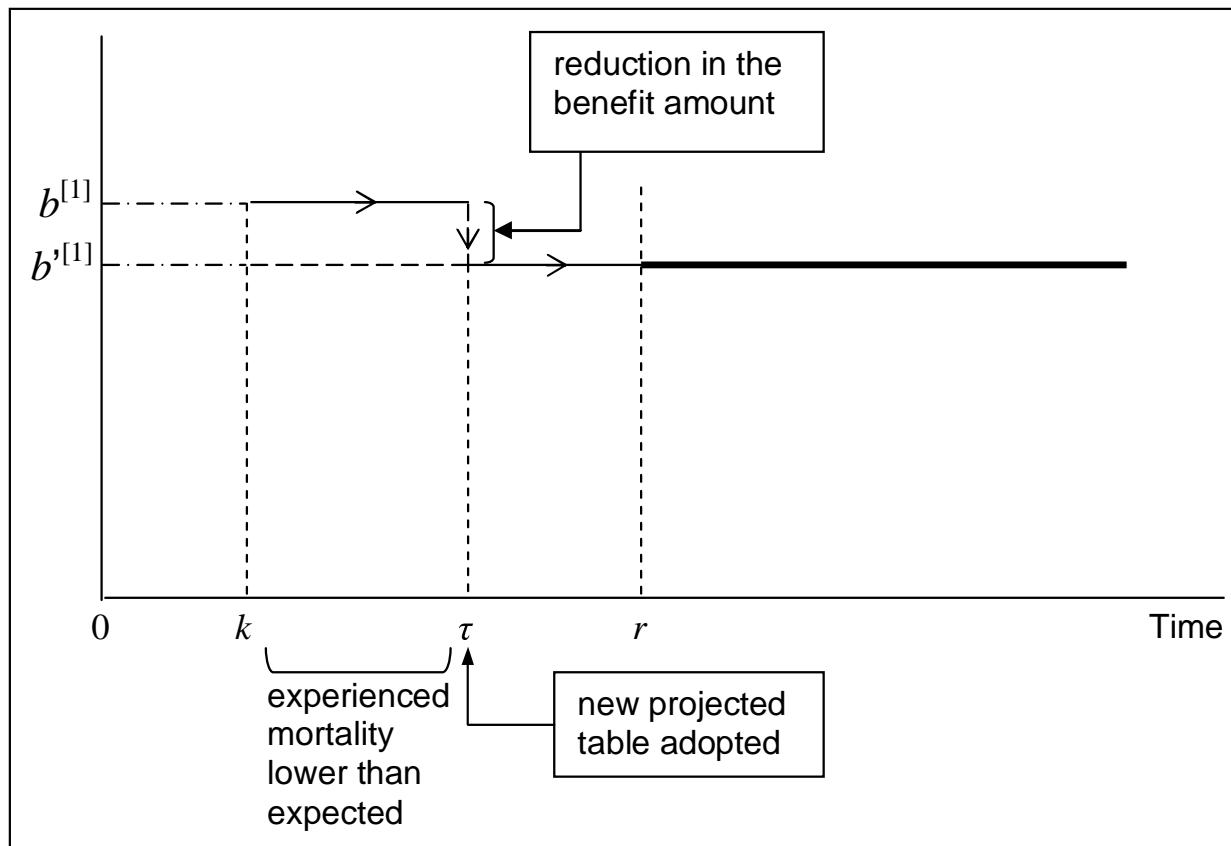
Si supponga che

- per motivi di concorrenza, $\ddot{a}_{x_r}^{[GAR1]}(k)$ sia inferiore al valore attuariale calcolato con un ampio caricamento di sicurezza
- al tempo τ ($k < \tau < r$) sia disponibile una nuova tavola proiettata con minore mortalità

⇒ riduzione del beneficio da $b^{[1]}$ a $b'^{[1]}$

(Vedi figura seguente)

Flessibilità nelle garanzie (cont.)



Ripartizione del rischio longevità nella fase di accumulazione

Flessibilità nelle garanzie (cont.)

Vincoli (usuali) sulla riduzione:

- (1) la diminuzione di mortalità sia superiore ad una data soglia (ad es. in termini della vita attesa ad età 65)
- (2) $\tau \leq r - 2$ (ad esempio)
- (3) non più di una riduzione in un dato numero di anni (ad esempio 5 anni)
- (4) qualunque sia il miglioramento di mortalità nel periodo, la riduzione di rata non deve superare una data aliquota ρ (ad esempio 10%):

$$\frac{b^{[1]} - b'^{[1]}}{b^{[1]}} \leq \rho$$

Combinando i vincoli (3) e (4) \Rightarrow garanzia di minimo importo del beneficio annuo

Flessibilità nei prodotti GAR: lo schema “GAR con partecipazione agli utili (di sopramortalità)”

GAR fissato al tempo k ($0 \leq k < r$): $\frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR2]}(k)}$

Beneficio:

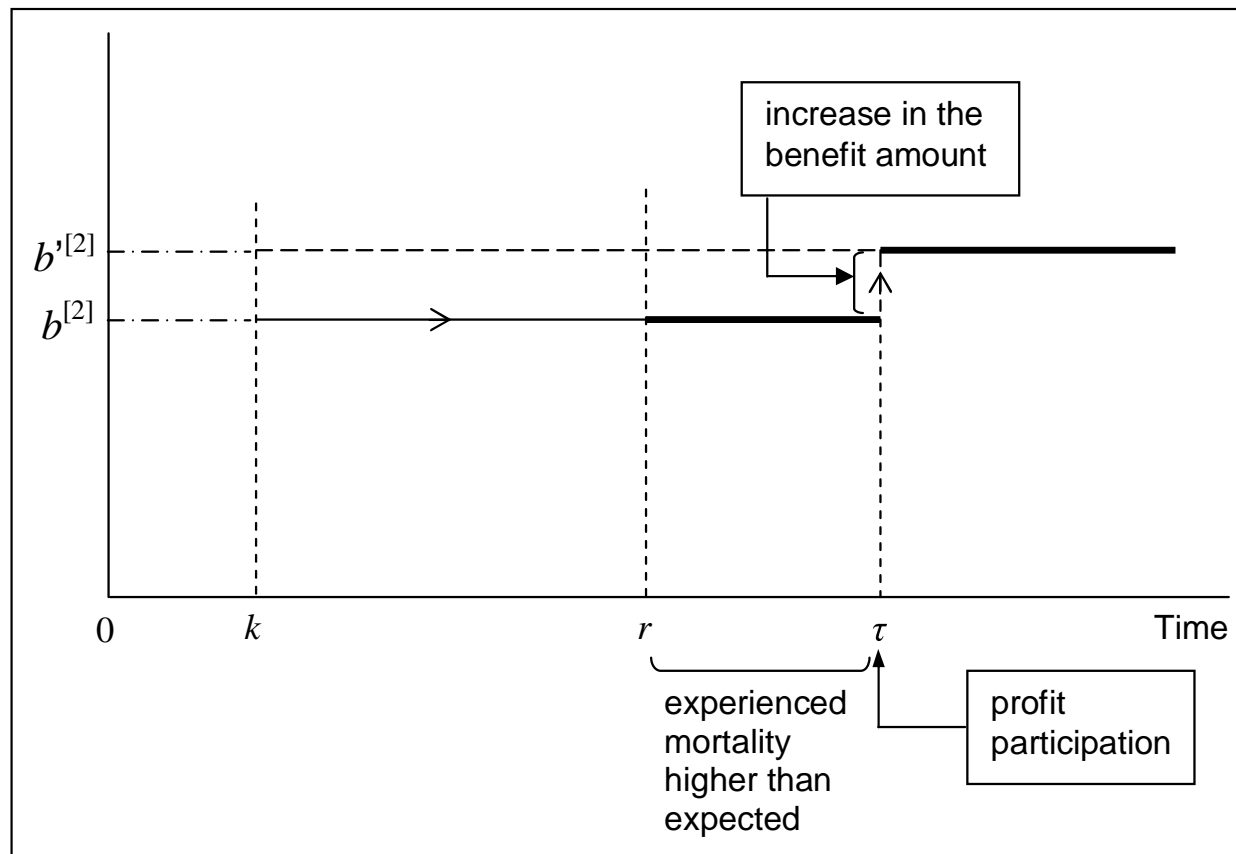
$$b^{[2]} = \frac{S}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR2]}(k)}$$

Si supponga che

- $\ddot{a}_{x_r}^{[GAR2]}(k)$ sia valutato con un ampio caricamento di sicurezza
- al tempo τ ($\tau > r$) l'esperienza di mortalità riveli una mortalità maggiore di quella attesa nel fissare $\ddot{a}_{x_r}^{[GAR2]}(k) \Rightarrow$ utile per l'assicuratore

\Rightarrow possibile ripartizione dell'utile mediante incremento da $b^{[2]}$ a $b'^{[2]}$

Flessibilità nelle garanzie (cont.)



Ripartizione del rischio longevità nella fase di decumulazione (1)

Flessibilità nei prodotti GAR: lo schema “GAR condizionato nel periodo di decumulazione”

GAR fissato al tempo k ($0 \leq k < r$): $\frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR2]}(k)}$

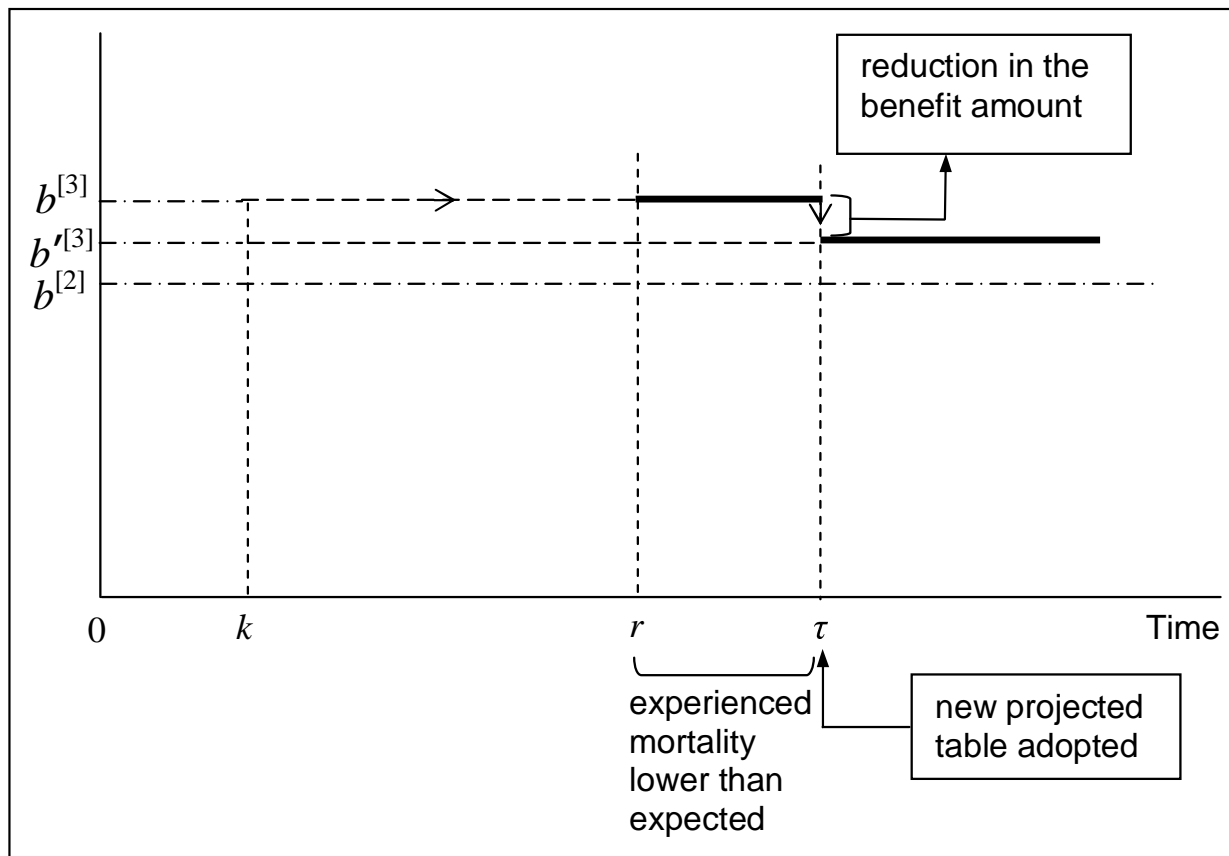
Se il caricamento di sicurezza è considerato eccessivo in relazione alla possibile mortalità futura, si stabilisce $b^{[3]}$ come livello (iniziale) di beneficio ($b^{[3]} > b^{[2]} \Rightarrow$ più favorevole agli assicurati)

Se al tempo τ la mortalità osservata è molto bassa \Rightarrow riduzione del beneficio da $b^{[3]}$ a $b'^{[3]}$ con

$$b'^{[3]} \geq b^{[2]} \left(= \frac{S}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR2]}(k)} \right)$$

Il beneficio garantito è $b^{[2]}$ (e non $b^{[3]}$)

Flessibilità nelle garanzie (cont.)



Ripartizione del rischio longevità nella fase di decumulazione (2)

Osservazione – Flessibilità e schemi “tontinari”

La flessibilità nei modelli GAR può essere interpretata come causa di origine di uno schema tontinario (vedi: Rendite tontine, nel cap. 10)

GAR condizionato

Una maggiore mortalità nel periodo di accumulazione comporta la non riduzione della rata di rendita a favore dei superstiti

GAR con partecipazione agli utili (di sopramortalità)

A differenza della partecipazione agli utili finanziari, gli utili di sopramortalità sono assegnati agli assicurati (in vita) che non hanno contribuito alla formazione degli utili stessi

GAR condizionato nel periodo di decumulazione

Una maggiore mortalità nel periodo di decumulazione comporta la non riduzione della rata di rendita a favore dei superstiti

6.5 Prodotti “Variable annuity”

Aspetti generali

Ampia gamma di prodotti assicurativi vita, con possibili garanzie che proteggono l'assicurato contro i rischi di mortalità / longevità e d'investimento

Originariamente sviluppati per fornire un reddito post-pensionamento con un certo grado di flessibilità

Attualmente, anche la fase di “accumulazione” (differimento) ed i benefici caso morte costituiscono importanti componenti del prodotto

Caratteristiche di tipo:

- ▷ assicurazioni unit-linked (investimento dei premi in un fondo scelto dal contraente) ⇒ usualmente nel periodo di accumulazione ed eventualmente di decumulazione
- ▷ assicurazioni con partecipazione agli utili, rivalutabili in particolare (garanzie) ⇒ usualmente nel periodo di decumulazione, se attuata mediante rendita vitalizia (vedi più avanti)

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

Le opzioni finanziarie nelle variable annuities sono di tipo non-standard: il loro esercizio dipende da

- ▷ fattori economici (tassi d’interesse sui mercati, inflazione, ecc.)
- ▷ durata di vita dell’assicurato
- ▷ preferenze dell’assicurato

Garanzie \Rightarrow due classi:

- Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB)
- Guaranteed Minimum Living Benefit (GMLB)

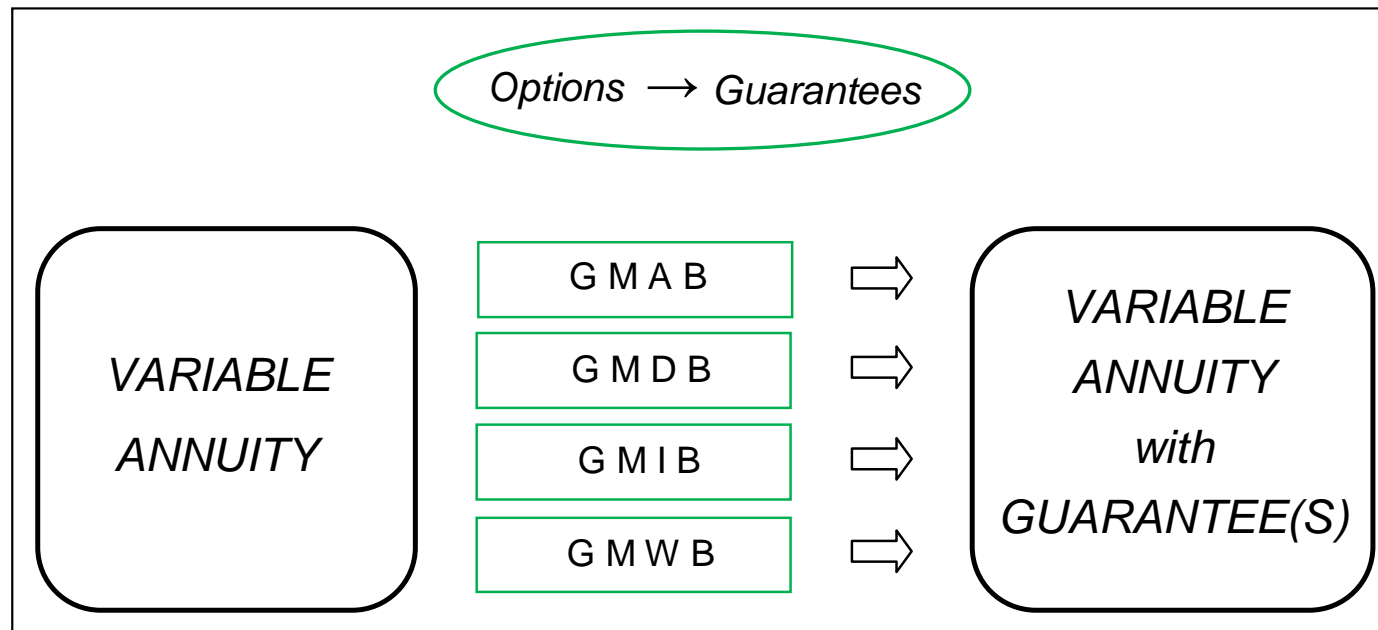
La seconda classe suddivisibile in tre sottoclassi:

- Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB)
- Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB)
- Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB)

Notazione: GMxB \Rightarrow Guaranteed Minimum Benefit di tipo x

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

La presenza di garanzie in un prodotto variable annuity è il risultato dell’esercizio di opzioni da parte del cliente



Opzioni e garanzie in prodotti Variable Annuity

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

Variable annuities generalmente finanziate a premio unico o premi unici ricorrenti

Ammontare totale dei premi spesso indicato come *ammontare investito*

Premi (- spese “upfront”) investiti nel fondo

Varie possibilità di investimento disponibili per il cliente, con vari profili di rischio / rendimento

Possibile switch da un fondo di investimento ad un altro

Costo delle garanzie, spese di gestione del fondo, spese amministrative ed altre caricate annualmente al contratto mediante riduzione dell'importo investito \Rightarrow trasparenza del contratto

Costo delle garanzie ed altre spese tipicamente espressi in percentuale del valore del fondo (\Rightarrow approssimazioni del reale costo relativo a garanzie contro i rischi di mortalità / longevità)

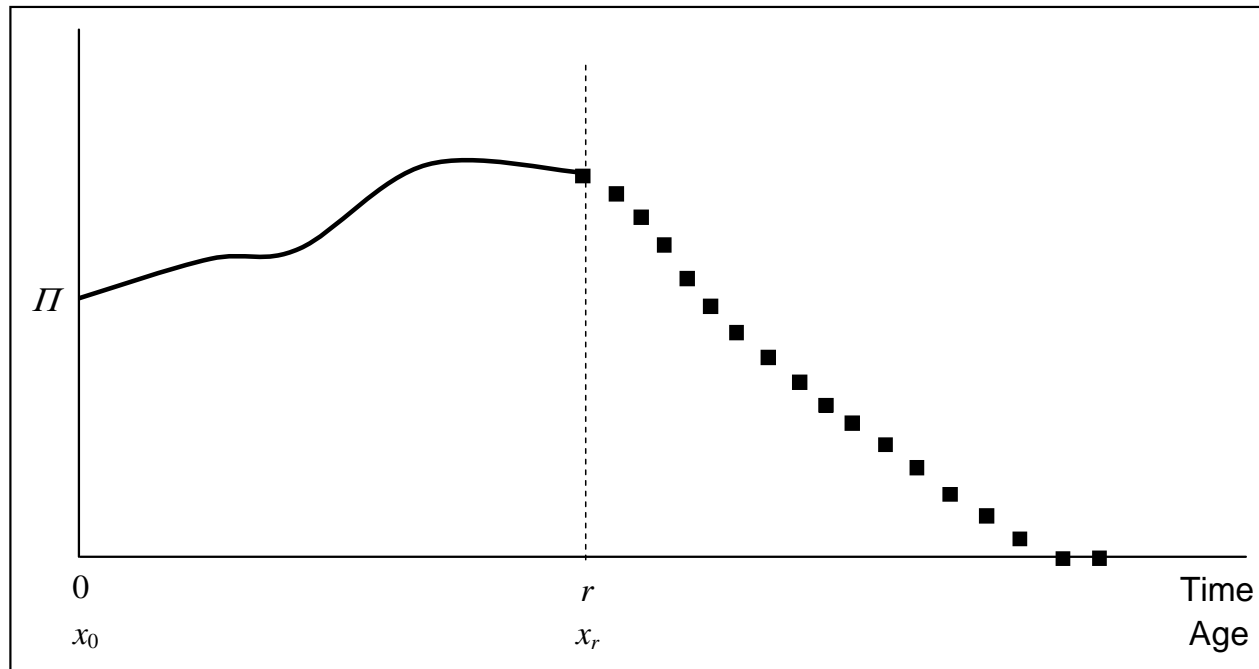
Notazione, ipotesi

- r = istante di fine differimento (fine periodo di accumulazione)
- x_r = età dell'assicurato a fine differimento (pensionamento)
- F_t = valore al tempo t del fondo relativo al contratto; $t = 0, 1, \dots$
- $G_t^{[x]}$ = ammontare garantito al tempo t per il beneficio di tipo x ;
 $x = D, A, I, W$
- i = tasso di interesse (operativo nelle garanzie di tipo *roll-up*)

Ipotesi:

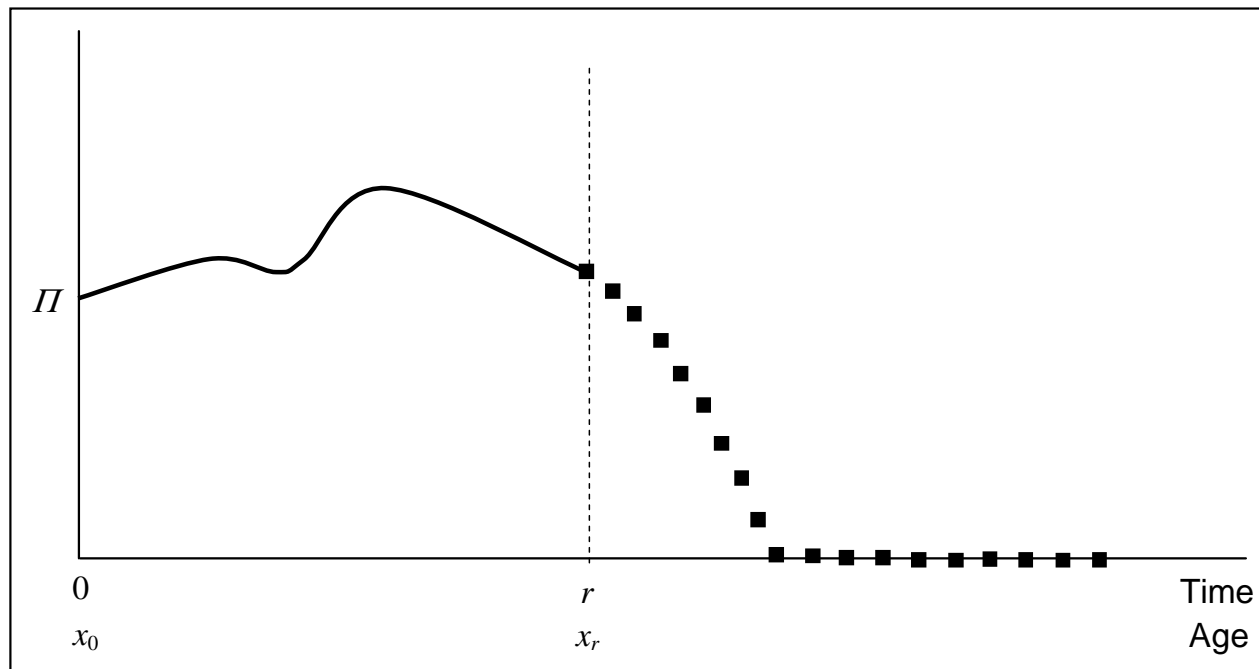
1. pagamento di un premio unico Π all'inizio del periodo di accumulazione
(possibile generalizzazione: sequenza di premi unici ricorrenti Π_0, Π_1, Π_{r-1})
2. assenza di prelevamenti dal fondo (durante l'accumulazione)

Possibili andamenti del fondo in assenza di garanzie



Andamento del fondo: Scenario 1

Prodotti “Variable annuity” (cont.)



Andamento del fondo: Scenario 2

Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB)

Usualmente disponibile nel periodo di accumulazione (prima del pensionamento)

In una specificata data, tipicamente all'epoca r (fine del differimento), all'assicurato (se in vita) è accreditato il maggiore tra il valore del fondo ed un importo garantito

$$B_r^{[A]} = \max\{F_r, G_r^{[A]}\} \quad (A)$$

L'importo garantito può essere fisso, ed uguale a:

- l'ammontare totale di premi pagati (al netto di eventuali prelevamenti): *return of premiums*

$$G_r^{[A]} = \Pi$$

- il montante dei premi, al netto di prelevamenti, ad un dato tasso i : *roll-up guarantee*

$$G_r^{[A]} = \Pi (1 + i)^r$$

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

oppure dipendente dal valore del fondo:

- massimo tra i valori del fondo registrati ad alcune date fissate t_1, t_2, \dots : *ratchet guarantee*

$$G_r^{[A]} = \max_{t_h < r} \{ F_{t_h} \}$$

rispetto alle due modalità precedenti:

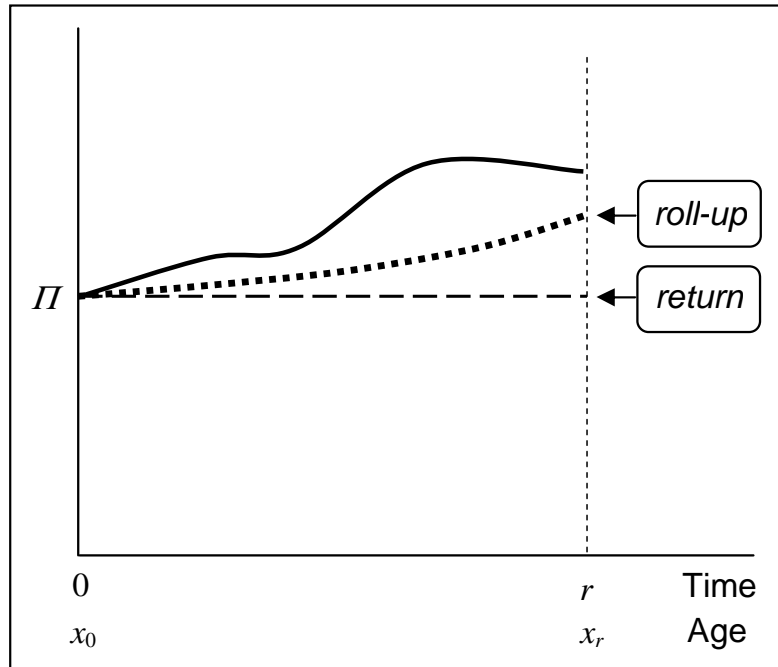
- ▷ maggiore valore atteso
- ▷ maggiore aleatorietà

inoltre:

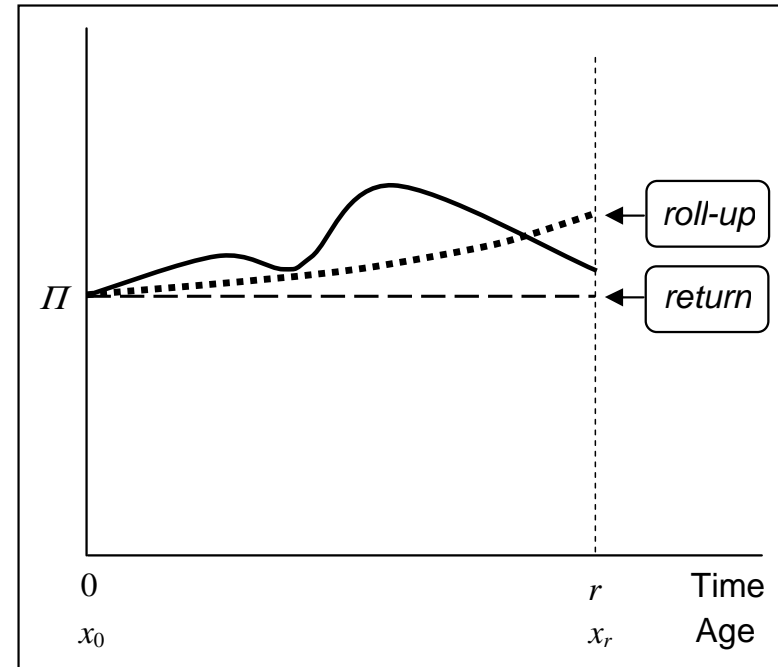
- ▷ dipendenza dagli istanti t_h , in particolare dalla “frequenza”

Vedi figure seguenti (linea continua: valore del fondo)

Prodotti "Variable annuity" (cont.)

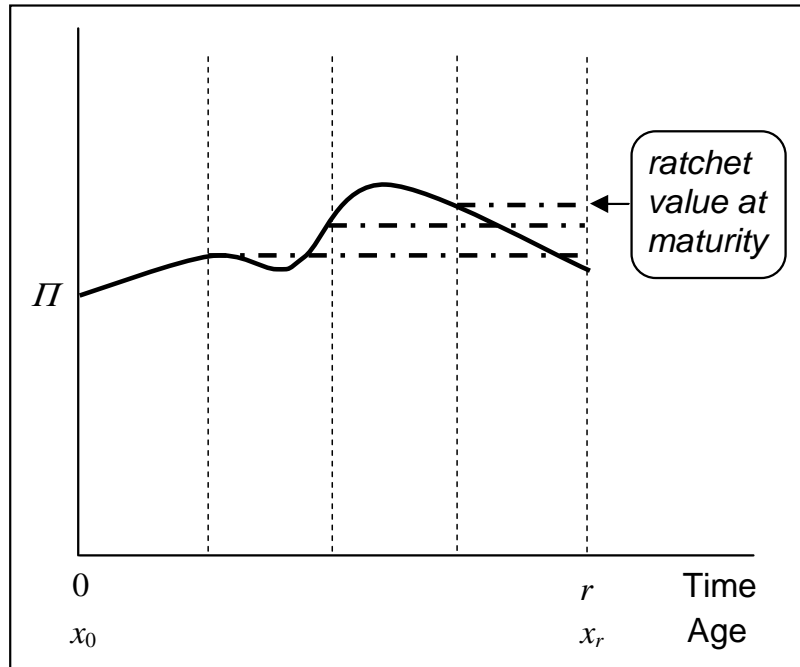


GMAB - Garanzie di restituzione premio e Roll-up (Scenario 1)

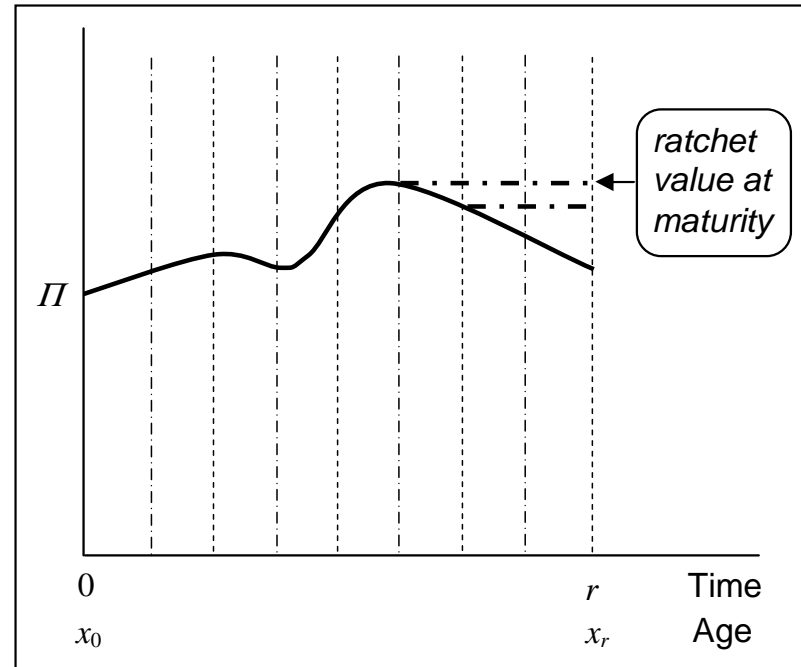


GMAB - Garanzie di restituzione premio e Roll-up (Scenario 2)

Prodotti “Variable annuity” (cont.)



*GMAB - Garanzia Ratchet con “bassa”
frequenza (Scenario 2)*



*GMAB - Garanzia Ratchet con “alta”
frequenza (Scenario 2)*

Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB)

Disponibile durante il periodo di accumulazione; in alcuni casi anche dopo il pensionamento, fino ad una data età (ad es. 75 anni)

Struttura: in caso di decesso al tempo t , prima della scadenza stabilita, il beneficio pagato $B_t^{[D]}$ sarà il maggiore tra il valore del fondo ed un importo garantito:

$$B_t^{[D]} = \max\{F_t, G_t^{[D]}\} \quad (D)$$

Possibili definizioni di $B_t^{[D]}$ analoghe a quelle di $B_r^{[A]}$, quindi:

- *return of premiums* $G_t^{[D]} = \Pi$
- *roll-up guarantee* $G_t^{[D]} = \Pi (1 + i)^t$
- *ratchet guarantee* $G_t^{[D]} = \max_{t_h < t} \{F_{t_h}\}$

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

Inoltre:

- valore del fondo nella più recente data di “reset”: *reset guarantee*

$$G_t^{[D]} = F_{\max\{t_j: t_j < t\}}$$

Osservazione

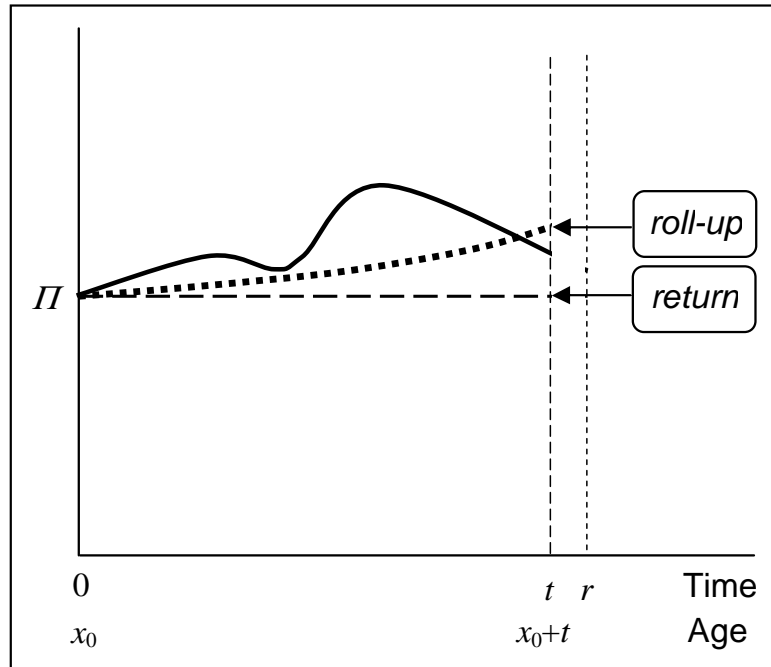
$G_t^{[D]}$ è necessariamente non decrescente nella *ratchet guarantee*, mentre può decrescere nella *reset guarantee* in quanto dipendente dai valori F_{t_j} nelle date di reset

Possibili combinazioni di garanzie, ad esempio:

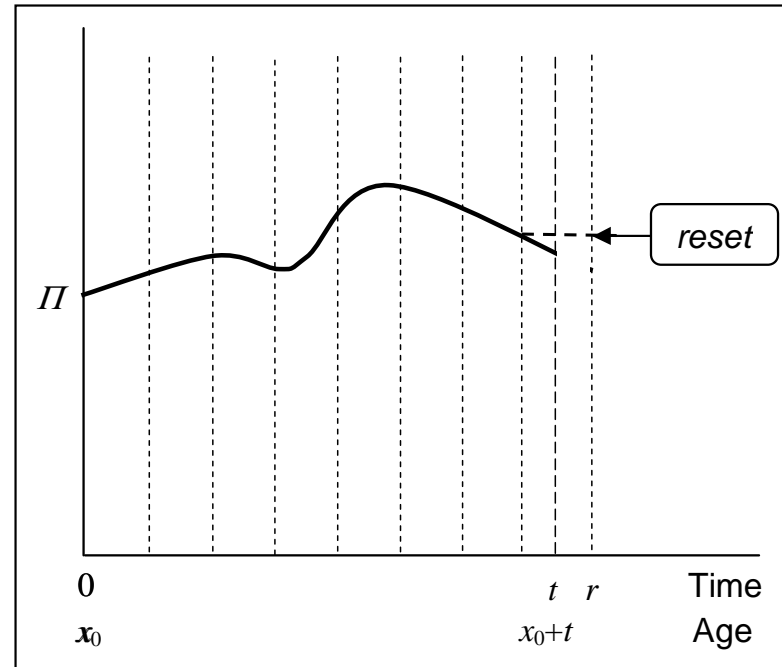
- *roll-up + ratchet guarantee*

$$G_t^{[D]} = \max \left\{ \Pi (1 + i)^t, \max_{t_h < t} \{F_{t_h}\} \right\}$$

Prodotti "Variable annuity" (cont.)



GMDB - Garanzia di restituzione premio e Roll-up (Scenario 2)



GMDB - Garanzia Reset (Scenario 2)

Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB)

Fornisce una rendita vitalizia di rata $b^{[I]}$ dall'età x_r (epoca r = fine del differimento)

Riferimento a una rendita vitalizia standard su una testa; possibili variazioni: vedi più avanti

La garanzia può essere strutturata in due modi

- *Importo da convertire in rendita* = il maggiore tra il valore del fondo ed un ammontare garantito $G_r^{[I]}$
 - possibili definizioni di $G_r^{[I]}$: vedi definizioni di $G_r^{[A]}$ nelle GMAB
 - coefficiente di conversione in rendita $\frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[CAR]}}$ definito in base alle condizioni di mercato alla data di conversione

Quindi:

$$b^{[I]} = \frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[CAR]}} \max\{F_r, G_r^{[I]}\} \quad (I1)$$

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

- *Coefficiente di conversione in rendita* = il più favorevole tra uno prestabilito, $\frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR]}}$, e quello risultante dalle condizioni di mercato alla data di conversione
 - ammontare convertito in rendita = valore del fondo

Quindi:

$$b^{[I]} = F_r \max \left\{ \frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[CAR]}}, \frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR]}} \right\} \quad (I2)$$

Garanzia nota anche come GAO (Guaranteed Annuity Option)
⇒ longevity risk nel periodo di accumulazione a carico dell'assicuratore

- Combinazione delle due garanzie:

$$b^{[I]} = \max\{F_r, G_r^{[I]}\} \max \left\{ \frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[CAR]}}, \frac{1}{\ddot{a}_{x_r}^{[GAR]}} \right\}$$

possibile in teoria, ma costosa a causa del notevole rischio (performance + longevità) assunto dall'assicuratore

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

La garanzia deve essere scelta un dato numero di anni prima della conversione in rendita, per evitare antiselezione (periodo di “carenza”, tipicamente 5 anni)

Esercizio della GMIB \Rightarrow dopo la conversione in rendita l'assicurato perde l'accesso al fondo (mentre prima della conversione il contratto è analogo ad un prodotto di investimento)

Tipi di rendita vitalizia disponibili:

- ▷ rendita vitalizia standard su una testa
- ▷ rendita vitalizia reversibile
- ▷ rendita vitalizia con minimo numero di rate garantite (ad es. 5 o 10)
- ▷ disponibili garanzie tipo controassicurazione (o *money-back*, o *capital protection*)

(Vedi Cap. 7)

Coefficienti di conversione $\frac{1}{\ddot{a}}$ in base al tipo di rendita

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

Rata della rendita vitalizia:

- ▷ fissata
 - costante
 - crescente (ad es. geometricamente)
- ▷ con partecipazione agli utili
- ▷ indicizzata all’inflazione
- ▷ indicizzata ad indici di borsa (rischio finanziario a carico del vitaliziato)

Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB)

Garantisce prelevamenti periodici dal fondo, anche se il fondo stesso si azzerava a causa di

- ▷ cattiva performance finanziaria
- ▷ lunga durata di vita dell'assicurato

La garanzia riguarda

- l'importo del prelevamento annuale (o comunque periodico)
- la durata dei prelevamenti

Prelevamento in t = una data percentuale β_t di un importo base W_t

$$b_t^{[W]} = \beta_t W_t \quad (W)$$

con

$$W_t = \max\{F_{t^*}, F_t\}$$

dove t^* = data di esercizio della GMWB

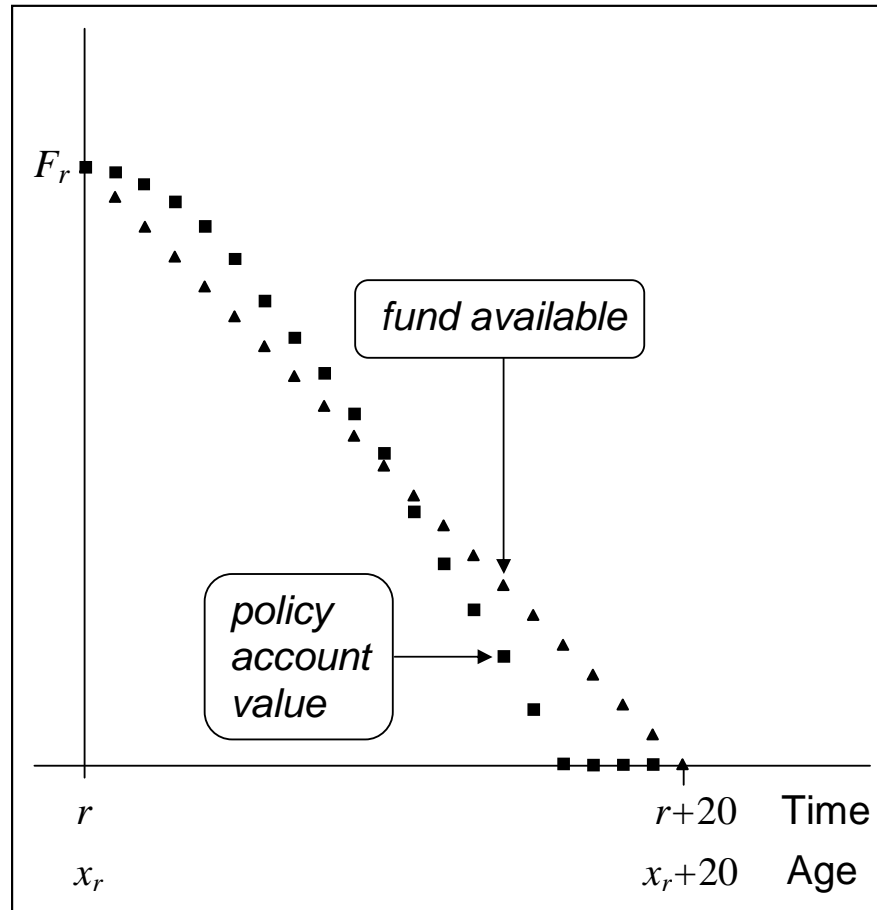
Durata dei prelevamenti

- ▷ fino a data prefissata t' ($t' > r$, ad es. $t' - r = 20$), indipendentemente dalla durata di vita dell'assicurato (vedi figura seguente)
- ▷ fino a data prefissata t' ($t' > r$, ad es. $t' - r = 20$), se l'assicurato è in vita (\Rightarrow vitalizia temporanea)
- ▷ vitalizia illimitata (garanzia detta anche *Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit, GLWB*)

Durante il periodo di prelevamento, l'assicurato ha l'accesso al fondo unit-linked

Se al decesso il valore del fondo è positivo \Rightarrow pagato ai beneficiari designati

Prodotti “Variable annuity” (cont.)



Processo di prelevamento con GMWB

Prodotti “Variable annuity” (cont.)

GMWB: reale novità delle variable annuities rispetto ai tradizionali contratti assicurativi vita; fornisce un beneficio simile all’income drawdown, ma con garanzie

Confronto tra GMIB e GMWB \Rightarrow tre principali differenze

- ▷ durata della rendita (vitalizia illimitata nella GMIB)
- ▷ accessibilità al fondo (solo nella GMWB)
- ▷ caratteristiche del fondo (unit-linked nella GMWB, tipicamente del tipo con partecipazione agli utili nella GMIB)

7 BENEFICI COMPLEMENTARI

7.1 Introduzione

7.2 Rate garantite

7.3 Controassicurazione

7.4 Reversibilità

7.5 LTC uplift

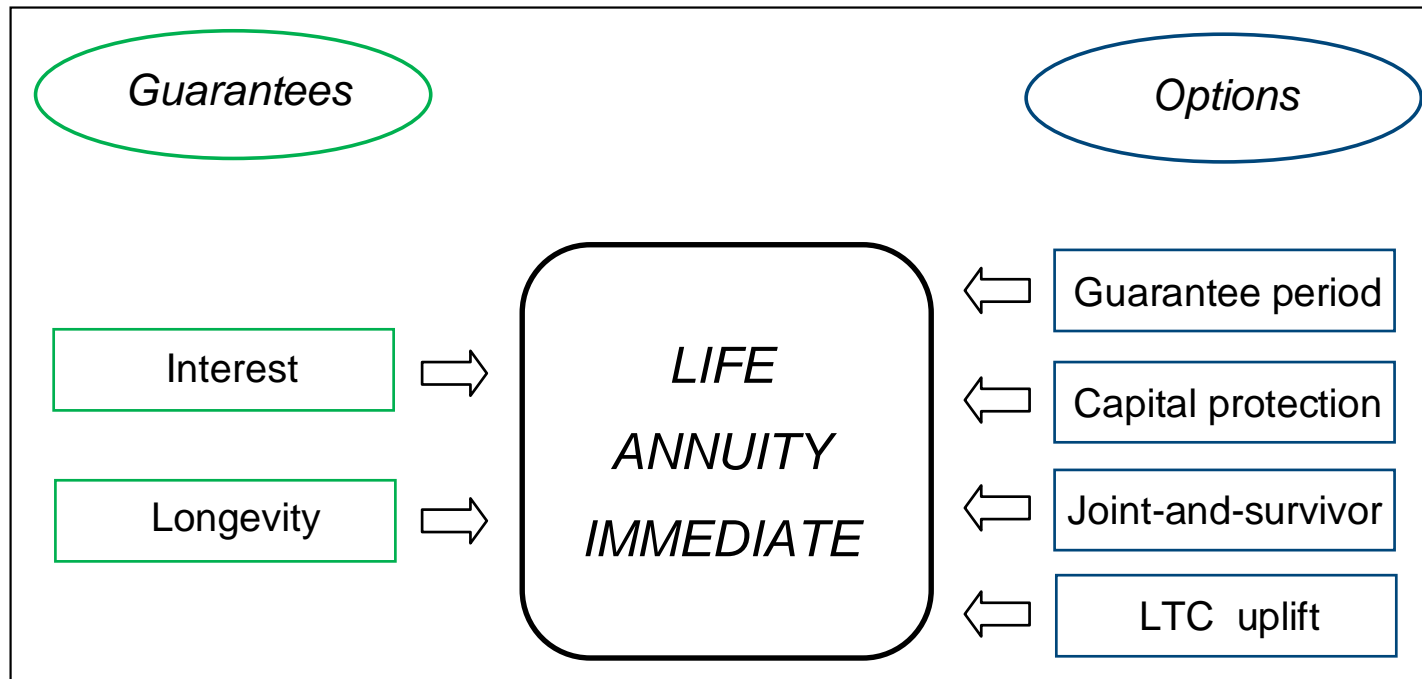
7.1 Introduzione

Ogni prodotto assicurativo \Rightarrow package di garanzie ed opzioni

In particolare:

- *garanzie implicite*; nelle rendite vitalizie:
 - ▷ interesse
 - ▷ longevità
- *garanzie esplicite*, risultanti dall'esercizio di opzioni da parte del cliente \Rightarrow benefici complementari; nelle rendite vitalizie, ad esempio:
 - ▷ rate iniziali garantite
 - ▷ restituzione di parte del premio (controassicurazione)
 - ▷ reversibilità
 - ▷ LTC uplift

(Vedi figura seguente)



Garanzie ed opzioni in una rendita vitalizie immediata

7.2 Rate garantite

Rate annuali pagate per un periodo prefissato (es. 5 o 10 anni) indipendentemente dalla durata di vita dell'assicurato

Sia x_r l'età al pensionamento

Per un periodo garantito di u anni, valore attuariale di una rendita con beneficio unitario:

$$a_{\overline{x_r:u}|} = a_{\overline{u}|} + u|a_{x_r}$$

con $a_{\overline{u}|}$ = valore attuale di una rendita certa temporanea u anni (al tasso di interesse i)

Essendo (con $u > 0$)

$$a_{\overline{u}|} > a_{x_r:u|}$$

risulta:

$$a_{\overline{x_r:u}|} > a_{x_r:u|} + u|a_{x_r} = a_{x_r}$$

Premio unico per un beneficio annuo b :

$$\Pi = b a_{\overline{x_r: u}|}$$

Esempio

Dalla Tabella:

- con $u = 0 \Rightarrow a_{\overline{x_r: u}|} = a_{x_r}$
- con $u > 0 \Rightarrow$ differenza $a_{\overline{x_r: u}|} - a_u$ modesta, data la bassa mortalità negli intervalli di età coinvolti

	Numero di rate garantite		
	$u = 0$	$u = 5$	$u = 10$
$x_r = 65$	1 707.16	1 716.52	1 746.90
$x_r = 70$	1 426.65	1 443.68	1 497.70

Premi unici per rendite vitalizie con rate garantite

7.3 Controassicurazione

In caso di decesso dell'assicurato entro un fissato numero di anni dall'inizio di pagamento della rendita, la differenza (se positiva) tra il premio unico e la somma delle rate pagate, è pagata al beneficiario designato \Rightarrow forma di *controassicurazione* (talvolta chiamata *money back*, o *capital protection*)

La controassicurazione si estingue solitamente ad una data età limite $x_r + z = \xi$ (es. 75), dopo la quale nulla è pagato anche se la differenza suddetta è positiva

In caso di decesso tra l'istante h e $h + 1$, pagamento dell'importo Γ_h :

$$\Gamma_h = \max\{\Pi - hb, 0\}; \quad h = 0, 1, \dots, n - 1$$

dove:

$$\Pi = b a_{x_r} + \left(\Gamma_0 {}_0|1A_{x_r} + \Gamma_1 {}_1|1A_{x_r} + \dots + \Gamma_{z-1} {}_{z-1}|1A_{x_r} \right)$$

Esempio

Dalla Tabella:

- con $\xi = x_r \Rightarrow$ assenza di controassicurazione
- con $\xi > x_r \Rightarrow$ incrementi di premio (rispetto al caso $\xi = x_r$) relativamente modesti, data la bassa mortalità negli intervalli di età coinvolti

	Età limite		
	$\xi = 70$	$\xi = 75$	$\xi = 80$
$x_r = 65$	1 759.74	1 821.38	1 880.81
$x_r = 70$	1 426.65	1 506.29	1 593.63

Premi unici per rendite vitalizie immediata con controassicurazione

7.4 Reversibilità

Rendite reversibili: vedi 3.2, 3.3

- *Rendita totalmente reversibile*: in generale beneficio b qualunque sia lo stato

Sia $\Pi = b a_x$ il premio unico per una rendita su persona di età x

Assumendo lo stesso premio per una rendita totalmente reversibile \Rightarrow beneficio ridotto $\gamma(x, y) b$ tale che

$$\Pi = \gamma(x, y) b a_{\overline{x,y}}$$

Fattore di riduzione:

$$\gamma(x, y) = \frac{a_x}{a_{\overline{x,y}}}$$

- *Rendita parzialmente reversibile* paga in generale:
 - ▷ beneficio b se entrambi sono in vita o se solo X è in vita
 - ▷ beneficio ridotto αb se solo Y è in vita

Assumendo:

- lo stesso premio $\Pi = b a_x$ di una rendita su una persona
- la stessa riduzione proporzionale $\delta(x, y)$ per entrambi i benefici

si ha:

$$\Pi = \delta(x, y) (b a_x + \alpha b (a_y - a_{x,y}))$$

e quindi:

$$\delta(x, y) = \frac{a_x}{a_x + \alpha (a_y - a_{x,y})}$$

Esempio

	$x = 60$	$x = 65$	$x = 70$
$y = 50$	0.76	0.67	0.56
$y = 55$	0.81	0.72	0.62
$y = 60$	0.86	0.78	0.68

Fattori di riduzione $\gamma(x, y)$ per rendite totalmente revers., con $b = b' = b'' = 100$

	$x = 60$	$x = 65$	$x = 70$
$y = 50$	0.84	0.77	0.68
$y = 55$	0.88	0.81	0.73
$y = 60$	0.91	0.86	0.78

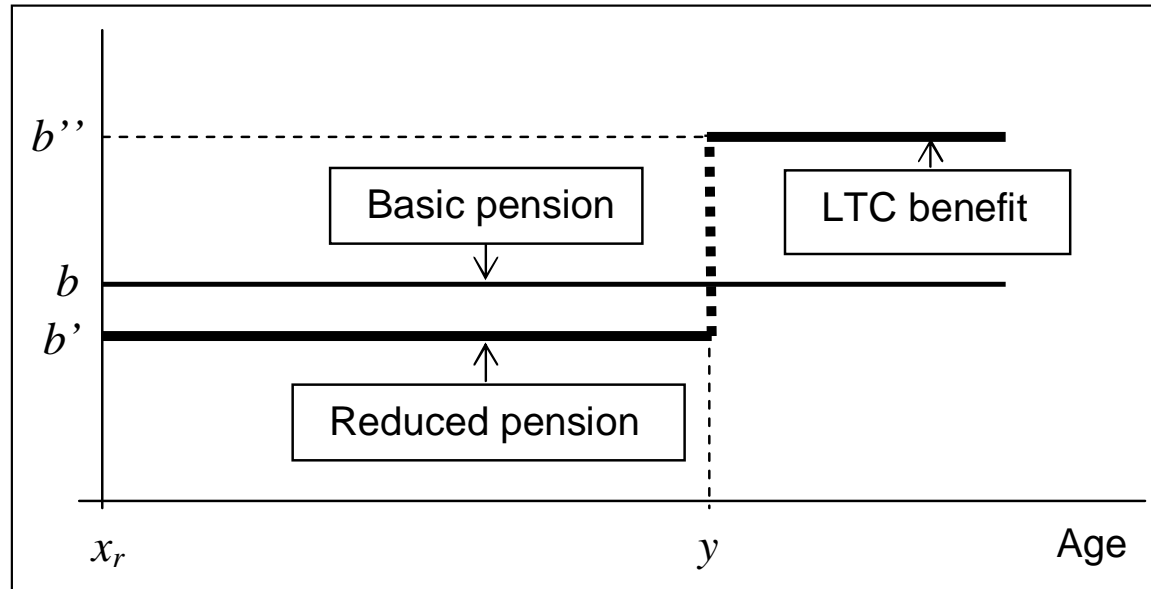
Fattori di riduzione $\delta(x, y)$ per rendite parzialmente revers., con $b = b' = 100, b'' = 60$

7.5 LTC uplift

Life care pensions

- ▷ prodotti di rendita vitalizia in cui il beneficio LTC è definito in termini di incremento di importo rispetto al beneficio base
 - ▷ pagamento del beneficio base b , successivamente possibile pagamento beneficio incrementato
 - ▷ possibile incremento (Long-term Care uplift) finanziato da un premio maggiore di quello richiesto dal solo beneficio base
 - ▷ *Enhanced pension*: particolare prodotto previdenziale del tipo Life care pension, in cui l'incremento è finanziato da una riduzione (rispetto alla pensione base b) del beneficio pagato mentre l'assicurato non è nello stato LTC, quindi:
 - pagamento del beneficio ridotto b' , successivamente possibile pagamento del beneficio incrementato b''
- (Vedi figura seguente)

LTC uplift (cont.)



LTC Uplift finanziato da riduzione della pensione

8 PROFILO TEMPORALE DELLE RATE

8.1 Introduzione

8.2 Benefici predefiniti

8.3 Benefici “asset-linked”

8.4 Benefici “longevity-linked”

8.1 Introduzione

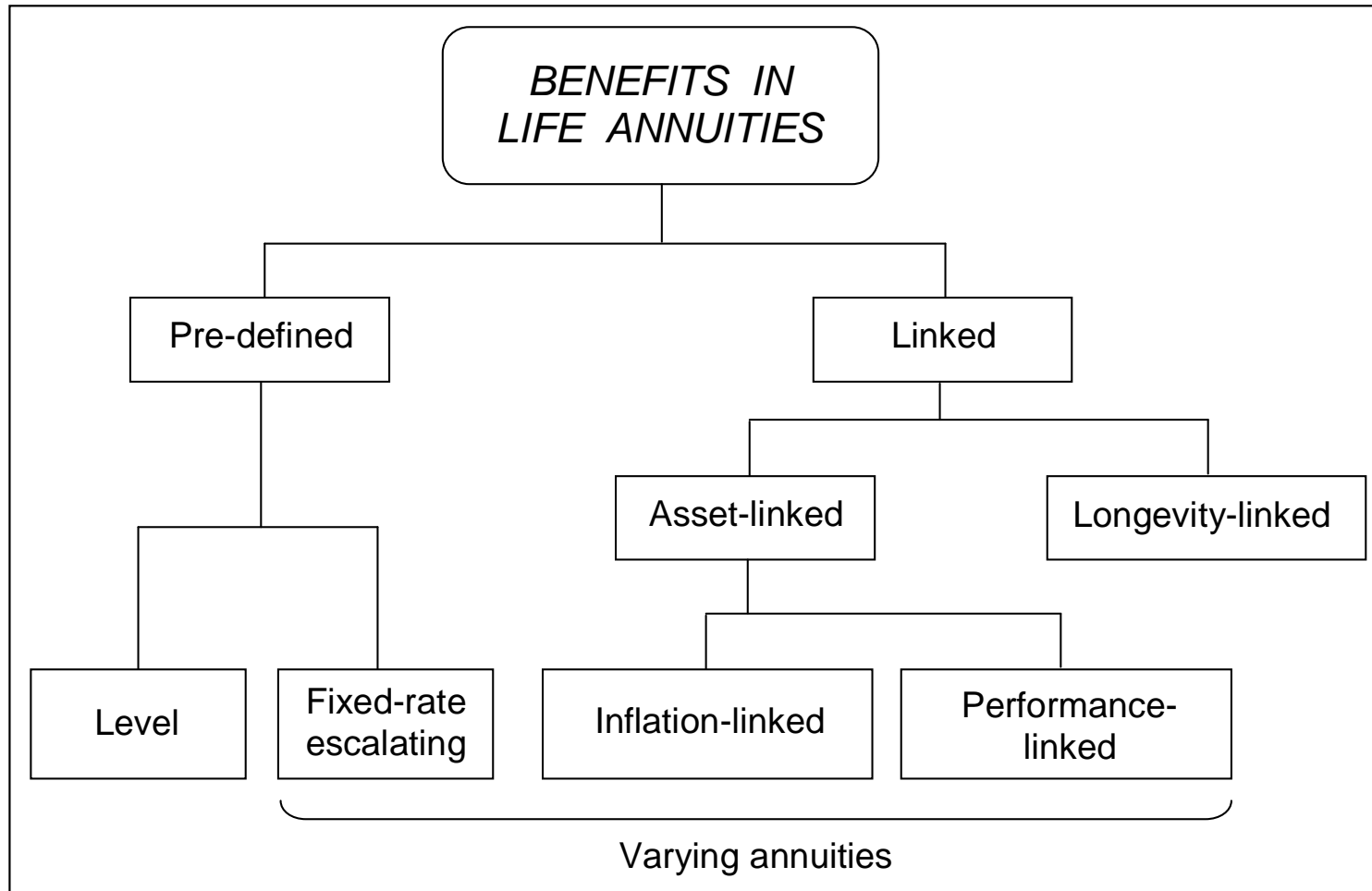
Nell'ambito delle rendite vitalizie si possono individuare due classi:

- rendite con benefici predefiniti
- rendite con beneficio iniziale definito e quindi progressivamente aggiustato in base a meccanismi di linking

e varie sottoclassi in base a:

- ▷ profilo temporale dei benefici predefiniti
- ▷ grandezze di riferimento nei meccanismi di linking

(Vedi figura seguente)



Profili temporali dei benefici

8.2 Benefici predefiniti

Benefici costanti:

$$b, b, b, \dots$$

Benefici crescenti a tasso fisso:

- in progressione *aritmetica*

$$b_1, b_2 = (1 + \alpha) b_1, b_3 = (1 + 2\alpha) b_1, \dots$$

- in progressione *geometrica*

$$b_1, b_2 = (1 + \alpha) b_1, b_3 = (1 + \alpha)^2 b_1, \dots$$

8.3 Benefici “asset-linked”

Aspetti generali

Vari meccanismi di linking tra importo dei benefici e valore di attivi a copertura delle riserve proposti e implementati

In particolare:

- benefici *inflation-linked*
 - scopo: protezione (parziale) dalla perdita di potere d'acquisto
- benefici *performance-linked*
 - scopo: ammontare del beneficio crescente in linea con il comportamento del mercato finanziario
 - ▷ rendite vitalizie collegate a indici di borsa
 - ▷ rendite vitalizie unit-linked
 - ▷ rendite vitalizie with-profit (in U.K.)
 - ▷ rendite vitalizie rivalutabili (vari Paesi dell' Europa continentale)

Osservazione

Espressione *benefici variabili* frequentemente usata in senso generico, comprendendo benefici crescenti a tasso fisso, benefici inflation-linked e performance-linked

Scopo comune: protezione (parziale) dell'assicurato o pensionato contro la perdita di potere d'acquisto dovuta a inflazione. Differenza rilevante:

- ▷ nelle rendite con benefici crescenti a tasso fisso, il premio unico è calcolato tenendo conto del profilo temporale dei benefici; per esempio, per una rendita vitalizia immediata posticipata con benefici crescenti geometricamente

$$\Pi = b_1 \sum_{h=1}^{\omega-x} (1+i)^{-h} (1+\alpha)^{h-1} {}_h p_{x_r}$$

con x_r = età al momento di pensionamento

- ▷ Nelle rendite con benefici asset-linked, il premio è calcolato con riferimento al beneficio iniziale, e le variazioni (aumenti) di beneficio sono finanziate da variazioni della riserva matematica (vedi: Rendite vitalizie rivalutabili)

Rendite vitalizie rivalutabili

Dato il premio unico Π , sia b_0 il beneficio annuo inizialmente determinato:

$$b_0 = \frac{\Pi}{a_{x_r}}$$

Ipotesi: il beneficio puà essere incrementato ogni anno, tramite partecipazione agli utili finanziari e conseguente incremento della riserva

Sia b_t il beneficio pagato al tempo t , $t = 1, 2, \dots$

Nella usuale formula di calcolo della riserva V_t si assume che il beneficio dovuto al tempo t sia già pagato

Per una rendita rivalutabile, occorre considerare:

- il possibile incremento della riserva
- il pagamento del beneficio conseguentemente incrementato

Benefici “asset-linked” (cont.)

Occorre quindi riferirsi a:

- ▷ riserva prima dell’(eventuale) incremento, $V_t^{(-2)}$
- ▷ riserva dopo (eventuale) incremento e prima del pagamento del beneficio, $V_t^{(-1)}$
- ▷ (usuale) riserva dopo il pagamento del beneficio, V_t

Anzitutto:

$$V_t^{(-2)} = b_{t-1} a_{x_r+t} + b_{t-1}$$

dove b_{t-1} include tutti gli incrementi fino al tempo $t - 1$ incluso

Sia ρ_t il tasso di incremento della riserva; si ottiene quindi:

$$V_t^{(-1)} = (1 + \rho_t) V_t^{(-2)}$$

e pertanto:

$$V_t^{(-1)} = (1 + \rho_t) (b_{t-1} a_{x_r+t} + b_{t-1})$$

Benefici “asset-linked” (cont.)

Profilo temporale dei benefici dato quindi dalla:

$$b_t = (1 + \rho_t) b_{t-1}, \text{ per } t = 1, 2, \dots$$

Infine:

$$V_t = b_t a_{x_r+t}$$

Il tasso ρ_t dipende dalla performance degli investimenti in $(t - 1, t)$

Sia g_t il tasso di rendimento, e si assuma che un'aliquota η di g_t (aliquota di partecipazione) sia accreditata alla riserva

Il tasso tecnico i è garantito \Rightarrow data la partecipazione agli utili, fattore $(1 + i)$ sostituito da $(1 + \max\{\eta g_t, i\})$, e risulta:

$$(1 + i)(1 + \rho_t) = 1 + \max\{\eta g_t, i\}$$

da cui si trova:

$$\rho_t = \frac{\max\{\eta g_t - i, 0\}}{1 + i} \quad (*)$$

Benefici “asset-linked” (cont.)

Formula (*) \Rightarrow lock-in della partecipazione (consolidamento)

Esempio

Confronto tra benefici determinati come segue, nello scenario descritto dalla sequenza di $g_t, t = 1, 2, \dots$:

- (1) benefici $b_t^{(1)}$ determinati dai coefficienti $\rho_t^{(1)}$ dati dalla (*)
- (2) benefici $b_t^{(2)}$, pagati da una (teorica) rendita vitalizia senza garanzia finanziaria, dati dai coefficienti

$$\rho_t^{(2)} = \frac{\eta g_t - i}{1 + i}$$

Benefici calcolati con $i = 0.02$ e $\eta = 0.90$

Vedi Tabella seguente

Benefici “asset-linked” (cont.)

t	g_t	$0.90 g_t - 0.02$	$\rho_t^{(1)}$	$b_t^{(1)}$	$\rho_t^{(2)}$	$b_t^{(2)}$
0	—	—	—	100.00	—	100.00
1	0.045	0.0205	0.020	102.01	0.020	102.01
2	0.040	0.0160	0.016	103.61	0.016	103.61
3	0.035	0.0115	0.011	104.78	0.011	104.78
4	0.030	0.0070	0.007	105.50	0.007	105.50
5	0.025	0.0025	0.002	105.76	0.002	105.76
6	0.020	-0.0020	0.000	105.76	-0.002	105.55
7	0.020	-0.0020	0.000	105.76	-0.002	105.34
8	0.030	0.0070	0.007	106.48	0.007	106.06
9	0.040	0.0160	0.016	108.15	0.016	107.73
10	0.040	0.0160	0.016	109.85	0.016	109.42
11	0.035	0.0115	0.011	111.09	0.011	110.65
12	0.030	0.0070	0.007	111.85	0.007	111.41
13	0.018	-0.0038	0.000	111.85	-0.004	111.00
14	0.015	-0.0065	0.000	111.85	-0.006	110.29
15	0.015	-0.0065	0.000	111.85	-0.006	109.59
...

Profili temporali dei benefici

Rendite vitalizie unit-linked

Beneficio iniziale b_0 usualmente determinato in base a tasso d'interesse *hurdle*, i^* (stima del rendimento degli investimenti)

Dato il premio unico Π , si ha:

$$b_0 = \frac{\Pi}{a_{x_r}^*}$$

dove $a_{x_r}^*$ è calcolato con il tasso d'interesse i^*

Benefici pagati annualmente dati dalla:

$$b_t = b_{t-1} \frac{1 + g_t}{1 + i^*}; \quad t = 1, 2, \dots$$

con g_t = rendimento degli attivi nell'anno $(t - 1, t)$

Benefici “asset-linked” (cont.)

Quindi:

- ▷ dato i^* , se $g_t > i^*$ si ha $b_t > b_{t-1}$, altrimenti $b_t \leq b_{t-1}$
- ▷ minore è il tasso hurdle i^* , più probabile è un incremento del beneficio, ma, allo stesso tempo, maggiore è il fattore $a_{x_r}^*$ e quindi minore il beneficio iniziale b_0

8.5 Benefici “longevity-linked”

Formalmente: *Processo di aggiustamento* \Rightarrow beneficio b_t pagato al tempo t :

$$b_t = b_0 \alpha_t^{[m]}$$

con $\alpha_t^{[m]}$ = coefficiente di aggiustamento su $(0, t)$, secondo la misura di mortalità $[m]$

Il coefficiente $\alpha_t^{[m]}$ può incorporare partecipazione agli utili finanziari \Rightarrow possibile perdita causata dal rischio longevità parzialmente compensata da utili da investimento

Vari modelli possibili per la funzione $\alpha_t^{[m]}$ e in particolare la misura $[m]$

- (a) riferimento a mortalità di popolazione \Rightarrow misura *index-based*
- (b) riferimento a mortalità di portafoglio o fondo pensioni \Rightarrow misura *indemnity-based*

Nel caso (a) \Rightarrow rischio “di base” (possibili differenti trend di mortalità)

Vedi anche *Group-self annuitisation*

9 CLASSIFICAZIONE DEI RISCHI. COEFFICIENTI DI CONVERSIONE

- 9.1 Introduzione: classi di rischio e classi di premio
- 9.2 Rendite volontarie e pensioni
- 9.3 Rendite “a tasso speciale”

9.1 Introduzione: classi di rischio e classi di premio

Fattori di rischio:

- ▷ osservabili \Rightarrow *classi di rischio*
- ▷ non osservabili \Rightarrow *eterogeneità residua*

Fattori di rischio considerati nella tariffazione \Rightarrow *classi di premio*

Trascurare fattori di rischio nella tariffazione \Rightarrow *effetto solidarietà*

Nelle rendite vitalizie:

- considerato il fattore di rischio *età*
- vietato (nell'Unione Europea ed altri Paesi) il fattore di rischio *genere* (tariffazione unisex)
- considerati da vari assicuratori i fattori di rischio *condizioni di salute e stile di vita* (vedi Rendite “a tasso speciale”)

9.2 Rendite volontarie e pensioni

Tipi di rendite vitalizie:

- *rendite vitalizie volontarie*: acquistate come conseguenza di una scelta individuale
- *pensioni*:
 - ▷ rendite vitalizie pagate a una persona come conseguenza della sua appartenenza a un fondo pensioni aziendale
 - ▷ rendite vitalizie acquistate in base a obblighi di legge (conversione obbligatoria in rendita)

Stessa struttura tecnica, ma più elevato effetto di *autoselezione* nelle rendite volontarie (\Rightarrow *antiselezione* per l'assicuratore)

Tavola di mortalità appropriata per una rendita volontaria: tavola *proiettata* e con effetto *selezione iniziale* (usualmente per antidurate di 2 - 5 anni)

9.3 Rendite “a tasso speciale”

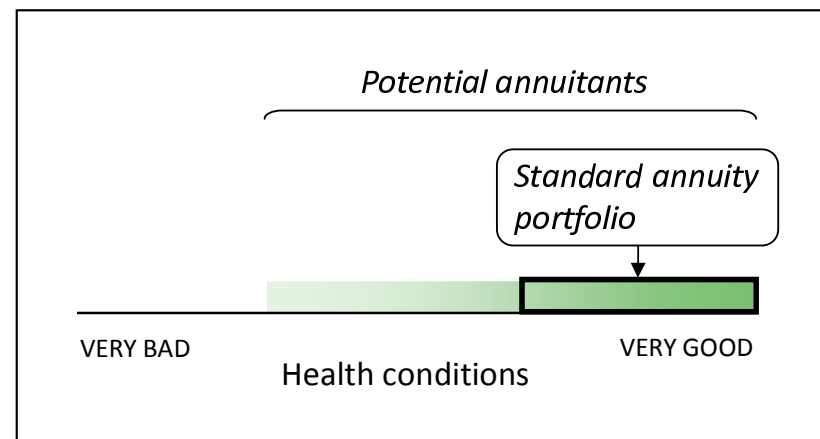
Rendite vitalizie *special-rate* dette anche *underwritten annuities*

⇒ la scelta delle ipotesi di mortalità da adottare (mortalità più elevata di quella assunta come standard) ha luogo tramite *processo di selezione* dei rischi (usualmente assente nelle rendite standard)

A parità di premio unico ⇒ maggiore rata della rendita

Motivazione

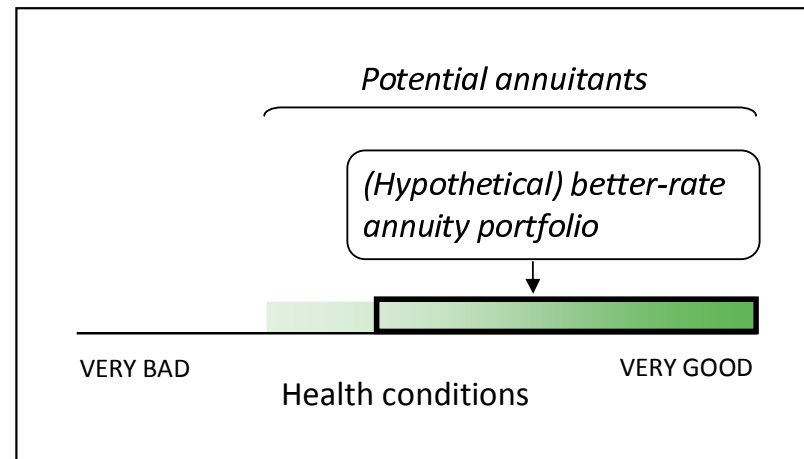
Tassi di premio solitamente elevati consentono di raggiungere solo una parte dei possibili acquirenti di rendita vitalizia



Portafoglio di rendite vitalizie standard

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

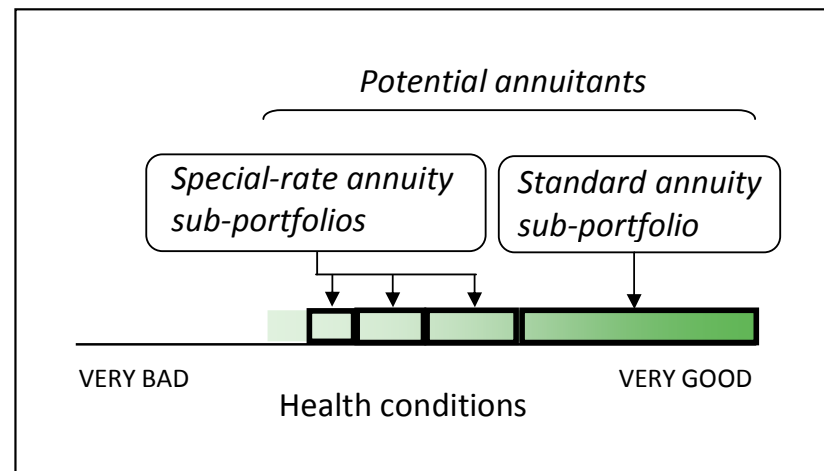
Minori tassi di premio \Rightarrow situazione di non equilibrio tecnico



Portafoglio di rendite vitalizie a premio ridotto

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Differenziazione dei tassi di premio \Rightarrow classi di premio (o rating)
 \Rightarrow sottoportafogli



Portafoglio di rendite vitalizie consistente in quattro sottoportafogli

Rischio di “cannibalizzazione” ?

Il processo di selezione dei rischi: possibili approcci

Implementazione del processo di selezione:

1. quali fattori di rischio (oltre all'età) sono scelti come fattori di rating
2. quanti fattori di rating sono effettivamente adottati nella selezione dei rischi
3. quante classi di rating sono definite (\Rightarrow quanti diversi tassi di premio)

In relazione al punto 1, una maggiore mortalità può essere dovuta a:

- 1.a lo *stato di salute* individuale (in particolare la presenza di specifiche *patologie*)
- 1.b lo *stile di vita* del soggetto (fumo, vita sedentaria, ecc.)
- 1.c l'*ambiente* in cui il soggetto vive (fattori socio-geografici, inquinamento, ecc.)

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

In relazione ai punti 2 e 3:

- maggiore numero di fattori di rating \Rightarrow maggiore complessità del processo di selezione
- maggiore numero di classi di rating \Rightarrow più incisiva personalizzazione della tariffa

In particolare, in relazione al punto 3:

3.a schema con *unica classe* di rating

- ▷ basato su uno o pochi fattori di rating
- ▷ il risultato del processo di selezione è “sì / no”
- ▷ se “sì” si applica il tasso speciale (favorevole all'assicurato); esempi: fumo, stato coniugale

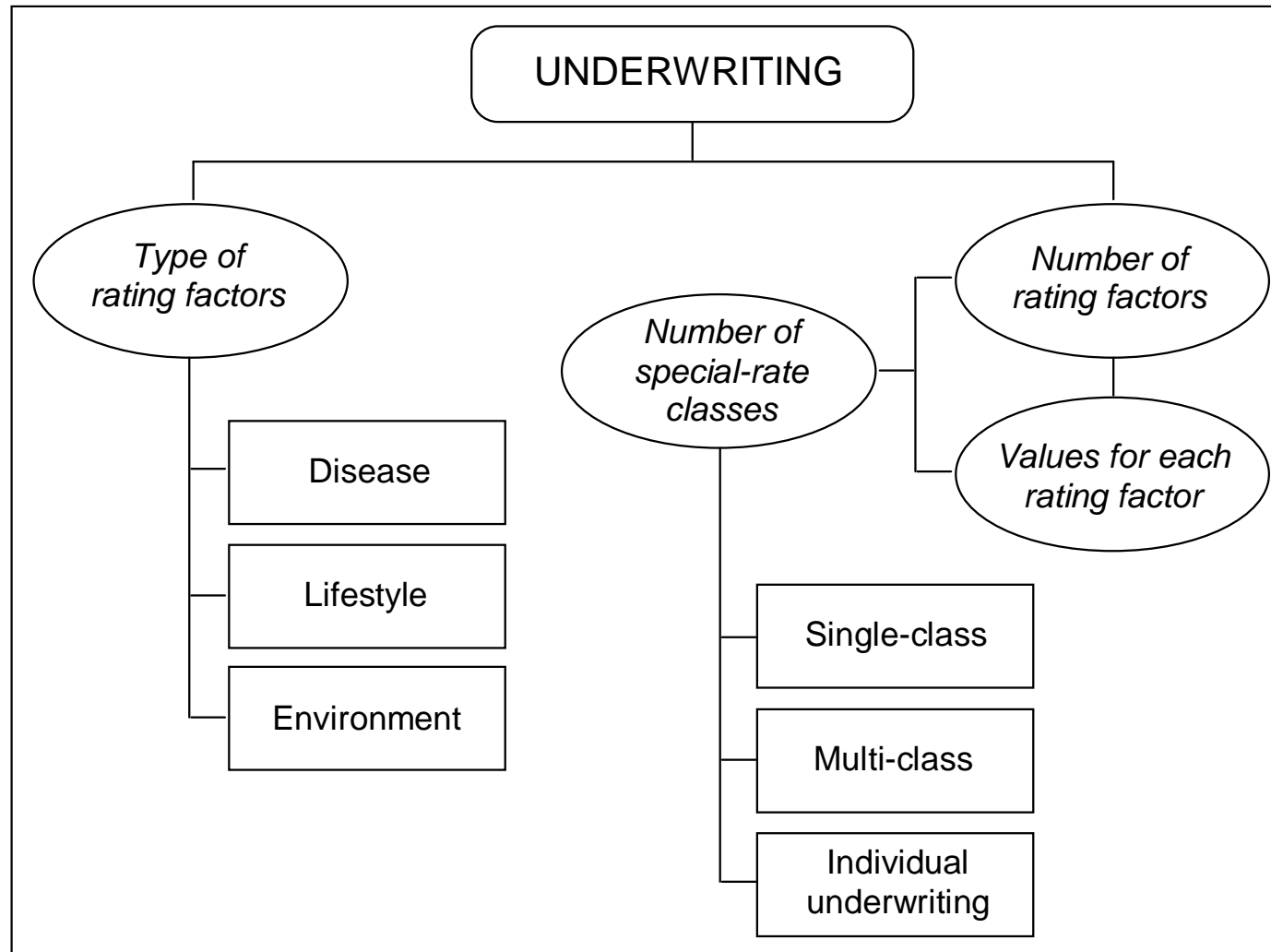
3.b schema con *più classi* di rating

- ▷ basato su un fattore di rating con più determinazioni, o su vari fattori di rating; esempio: condizioni di salute

3.c selezione *individuale*

- ▷ consente di utilizzare tutte le informazioni disponibili \Rightarrow massima personalizzazione

Rendite “a tasso speciale” (cont.)



Implementazione del processo di selezione per rendite vitalizie “special-rate”

I prodotti

Le seguenti rendite con premio basato sullo *stato di salute* sono disponibili in vari mercati assicurativi:

- *Enhanced annuity*: l'ipotesi di mortalità tiene conto della storia sanitaria del soggetto e in particolare di patologie pregresse
- *Impaired-life annuity*: l'ipotesi di mortalità tiene conto di patologie presenti nel soggetto, che accorciano significativamente la vita attesa (es. diabete, asma cronica, malattie oncologiche, ecc.)
- *Care annuity*: riguardano solitamente soggetti anziani (oltre i 75 - 80 anni); l'ipotesi di mortalità tiene conto della presenza di un elevato livello di invalidità e mancanza di autosufficienza (stato “long-term care”)

Dalla prima alla terza \Rightarrow più elevata mortalità (comunque maggiore di quella assunta nelle rendite standard), minore vita attesa

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Le seguenti rendite a premio basate sulle *stile di vita (lifestyle annuities)* sono disponibili su alcuni mercati assicurativi:

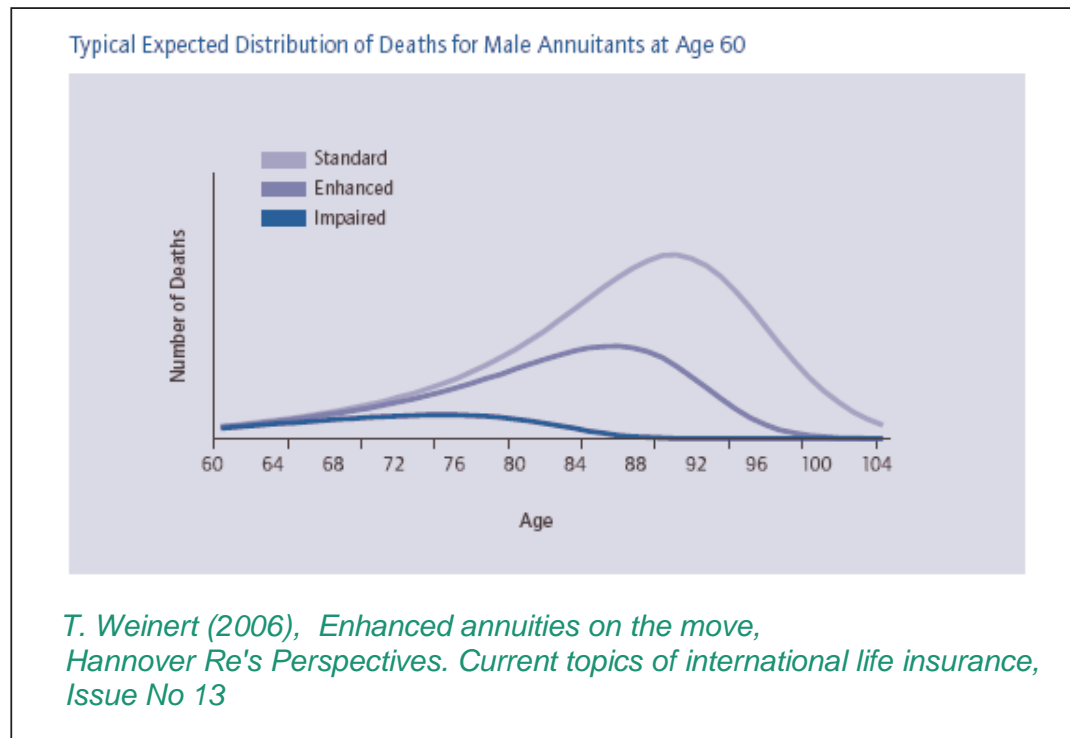
- *rendite per fumatori* (esempio di rendita con unica classe di rating)
- *rendite per soggetti non coniugati (unmarried lives annuities)*: statistiche mostrano una maggiore mortalità (esempio di rendita con unica classe di rating)

Rendite vitalizie basate su codice postale (*postcode life annuities*), quale proxy per classe sociale e fattori di rischio ambientali ad es. inquinamento (esempio di rendita con più classi di rating)

Modello biometrico. Premi

Distribuzione della durata di vita di assicurati con rendite a tasso speciale:

- ▷ minore vita attesa e minore età modale al decesso (punto di Lexis)
- ▷ maggiore dispersione (dovuta in particolare alla varietà di patologie)



Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Possibili approcci alla modellizzazione biometrica:

- (1) uso di tavole costruite su osservazioni specifiche
- (2) adozione di aggiustamenti della mortalità standard; esempi
 - (a) additivo

$$q_x^{[\text{add}]} = q_x + \delta$$

- (b) moltiplicativo

$$q_x^{[\text{mult}]} = (1 + \gamma) q_x$$

- (3) aggiustamento dei parametri di un modello parametrico standard

Consideriamo l'approccio (3), utilizzando il modello di Gompertz:

$$\mu_x = B c^x, \quad \text{con } B, c > 0$$

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Modello di Gompertz espresso con parametrizzazione “informativa”:

$$\mu_x = \frac{1}{D} \exp\left(\frac{x - M}{D}\right), \quad \text{with } M, D > 0$$

con:

- ▷ M = moda della distribuzione di probabilità della durata di vita (punto di Lexis)
- ▷ D = parametro di dispersione

Relazioni:

$$c = \exp\left(\frac{1}{D}\right)$$
$$B = \frac{\exp\left(-\frac{M}{D}\right)}{D}$$

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Scelta dei parametri $M, D \Rightarrow$ rappresentazione di specifiche distribuzioni della durata di vita

Per la tavola di sopravvivenza, con $\ell_0 = 100\,000$, si trova:

$$\ell_x = 100\,000 \exp \left(\exp \left(-\frac{M}{D} \right) - \exp \left(\frac{x - M}{D} \right) \right)$$

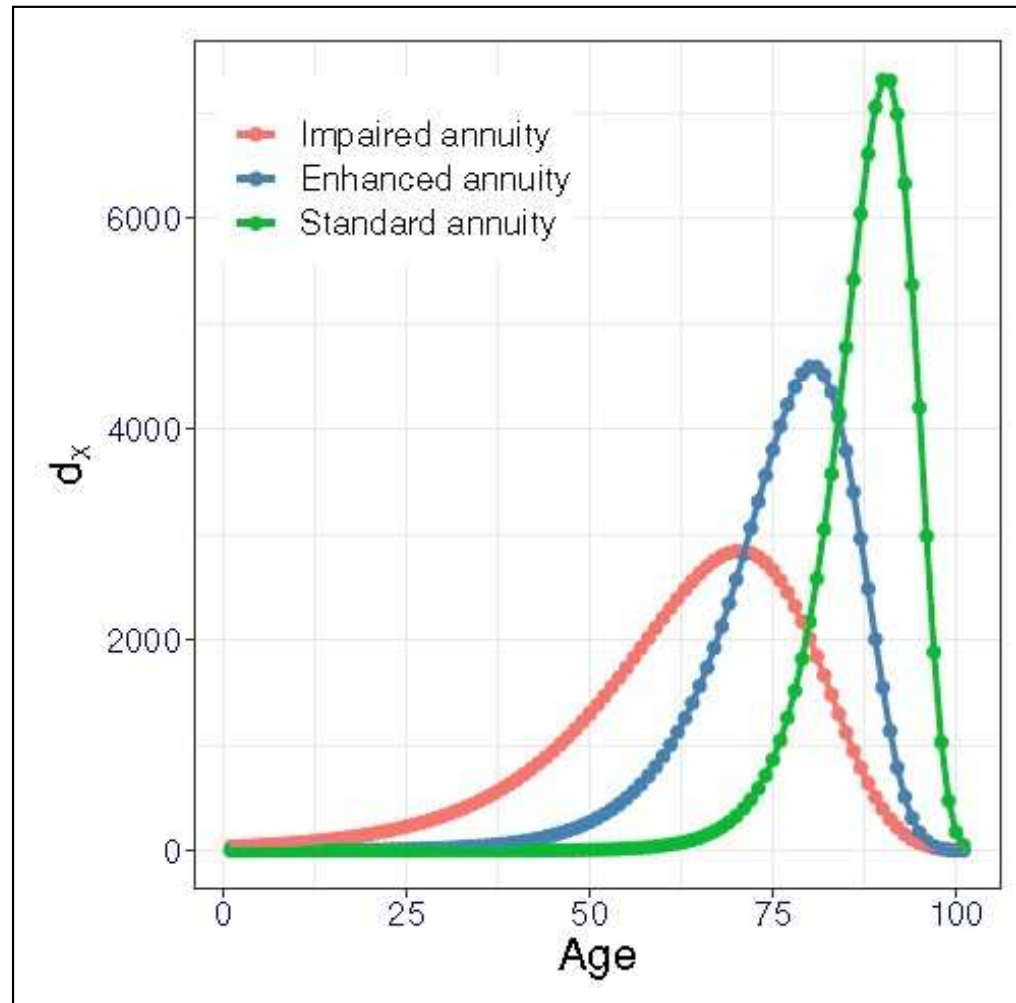
Esempio 1

Parametri dati dalla Tabella seguente

Classe di rating	k	M_k	D_k
Standard	1	90	5
Enhanced	2	80	8
Impaired	3	70	13

Parametri della legge di Gompertz

Rendite “a tasso speciale” (cont.)



Curve dei decessi per diversi sottoportafogli

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Differenti parametri \Rightarrow differenti tassi di premio \Rightarrow differenti valori attuariali di rendita

Sia $a_{x_r}^{(M_k, D_k)}$ il valore attuariale di una rendita unitaria su persona di età x_r , calcolato con parametri M_k, D_k

Per un dato ammontare di premio unico, la variazione di beneficio passando dalla classe k alla classe j è data da:

$$\rho(k, j) = \frac{a_{x_r}^{(M_k, D_k)}}{a_{x_r}^{(M_j, D_j)}}$$

Rendite “a tasso speciale” (cont.)

Esempio 2

Con i parametri dell'Esempio 1 si trova:

$$\text{classe di rating 1 : } a_{65}^{(90,5)} = 17.29$$

$$\text{classe di rating 2 : } a_{65}^{(80,8)} = 11.00$$

$$\text{classe di rating 3 : } a_{65}^{(70,13)} = 8.20$$

Coefficienti di variazione di beneficio passando da rendita standard (classe di rating 1) a rendita special rate:

$$\rho(1, 2) = 1.572$$

$$\rho(1, 3) = 2.109$$

10 “CROSS-SUBSIDY” NELLE RENDITE VITALIZIE

- 10.1 Introduzione: mutualità e solidarietà
- 10.2 Rendite tontine
- 10.3 Group-self annuitisation

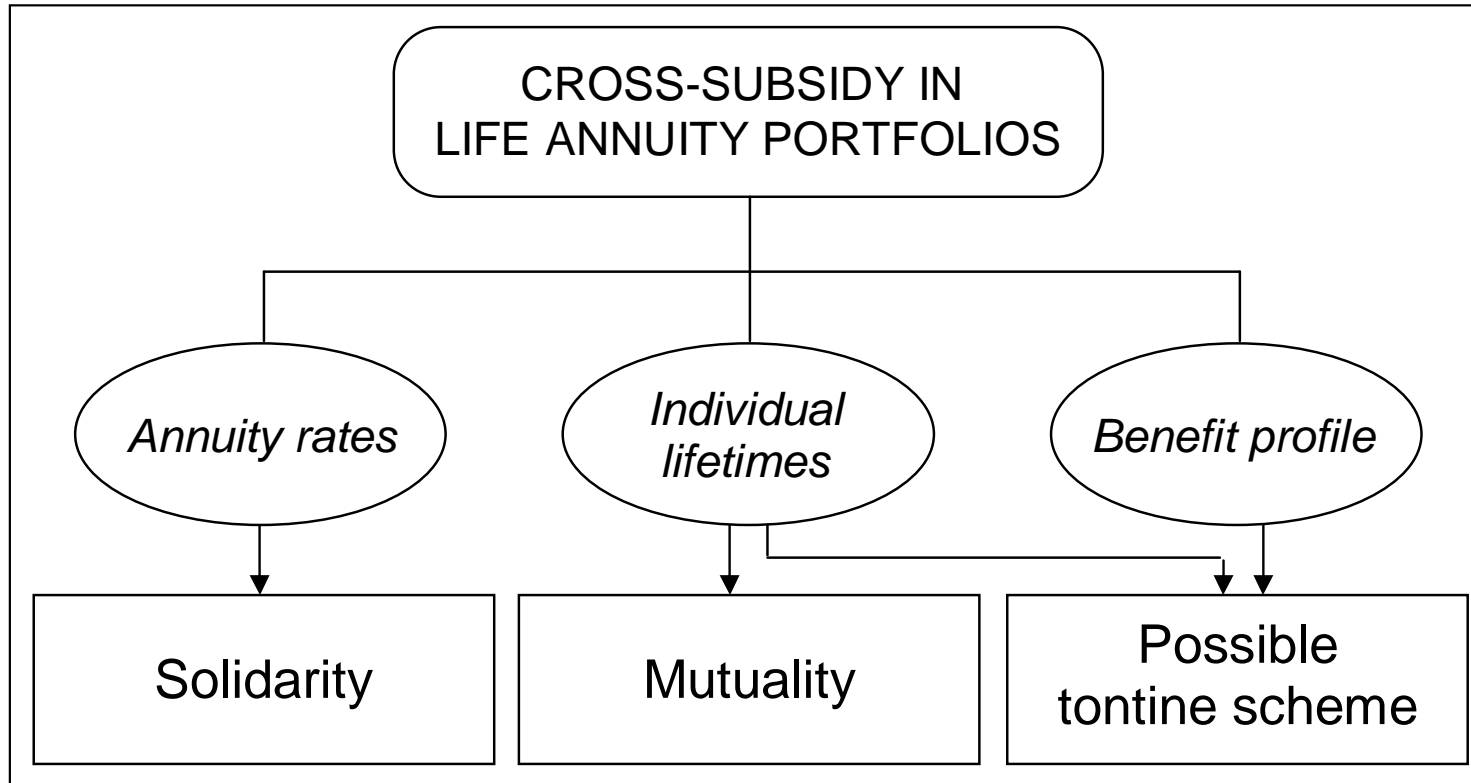
10.1 Introduzione: mutualità e solidarietà

Struttura tecnica della rendite vitalizie \Rightarrow varie forme di “cross-subsidy”

In particolare:

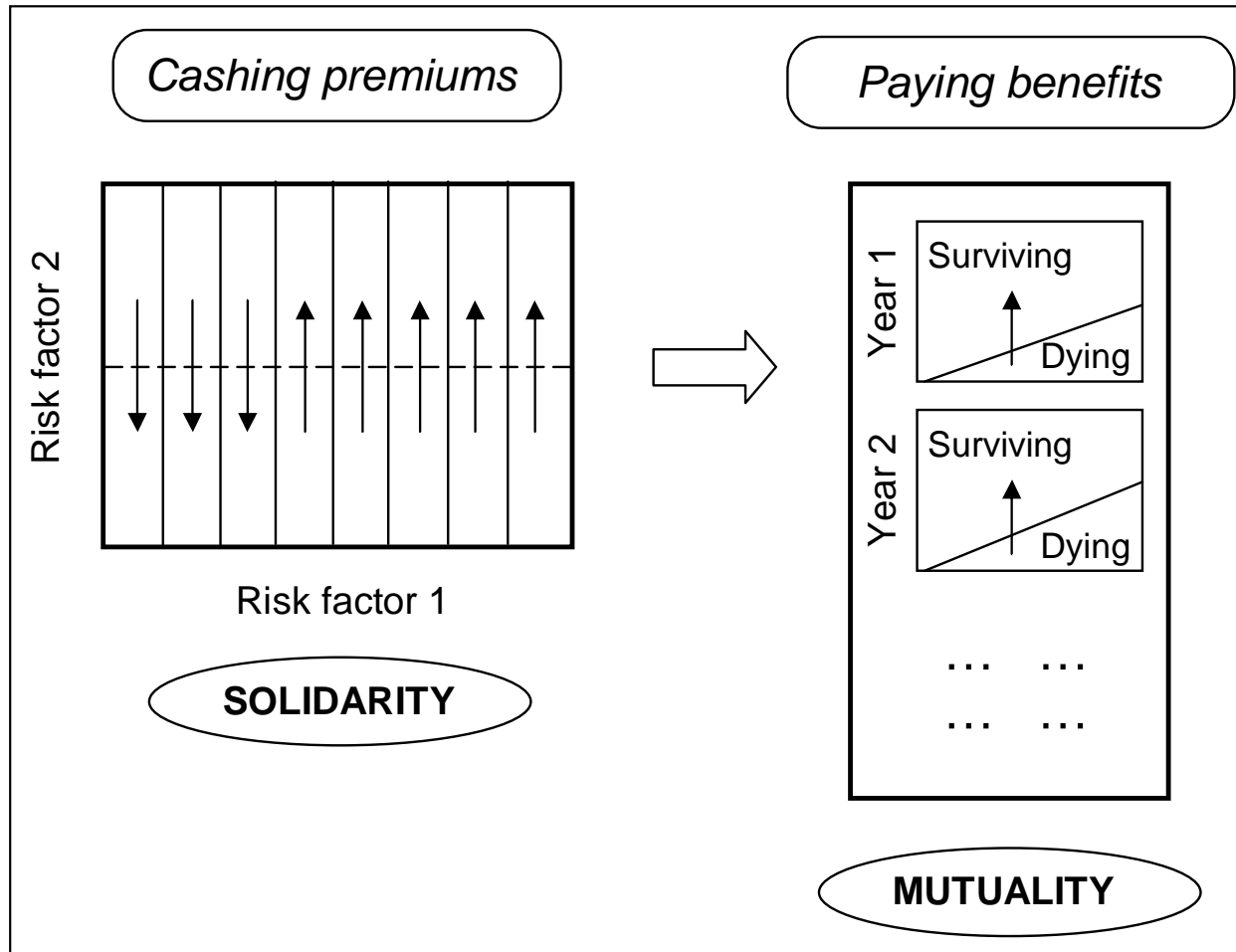
- *mutualità* (necessaria)
 - ▷ vedi 2.4 (riserva matematica; finanziamento del beneficio annuo)
- *solidarietà* (tecnicamente possibile, obbligatoria secondo direttiva europea unigender)
 - ▷ vedi 9.1 (classi di rischio e classi di premio)
- *schemi tontinari* (vietati da varie legislazioni vigenti)
 - ▷ numerose varianti recentemente proposte

Introduzione: mutualità e solidarietà (cont.)



Cross-subsidy in portafogli di rendite vitalizie

Introduzione: mutualità e solidarietà (cont.)



Solidarietà e mutualità in un portafoglio di rendite vitalizie

10.2 Rendite tontine

Schemi tontinari

Ipotesi: collettività (generazione) costituita all'epoca $t = 0$ da ℓ_x persone coetanee di età x

Ciascuno contribuisce alla costituzione di un fondo, presso un ente finanziario, versando l'importo c

Introito totale dell'ente:

$$C = \ell_x c$$

L'ente paga alla fine di ogni anno, cioè agli istanti $t = 1, 2, \dots$, un ammontare costante B , finché almeno uno degli individui è in vita

Ogni anno l'importo B è diviso in parti uguali tra i superstiti

Numeri di superstiti nei vari anni: numeri aleatori

Sia ℓ_{x+t}^* una possibile realizzazione del numero aleatorio di superstiti al tempo t (degli iniziali ℓ_x)

Beneficio individuale, b_t^* , dato quindi da:

$$b_t^* = \frac{B}{\ell_{x+t}^*}; \quad t = 1, 2, \dots$$

Qualunque sia la mortalità nel gruppo di persone, si ha ovviamente:

$$b_1^* \leq b_2^* \leq b_3^* \leq \dots$$

- *Schema tontinario*: meccanismo di suddivisione di B tra i superstiti
- *Rendita tontina*: sequenza b_1^*, b_2^*, \dots

Aspetti attuariali

Relazione tra C e B teoricamente esplicitabile in termini del principio di equità

Sia K il numero di pagamenti annuali dall'ente finanziario:

$$K = \max_j \{K_x^{(j)}\}$$

dove $K_x^{(j)}$ = durata residua aleatoria troncata di vita della persona j

Principio di equità:

$$C = B \mathbb{E}[a_{K\lceil}]$$

Per evitare il calcolo (estremamente complesso) di $\mathbb{E}[a_{K\lceil}]$

\Rightarrow approssimazione data da $a_{\omega-x\lceil}$ (tanto migliore quanto maggiore è ℓ_x)

Si ponga:

$$C = B a_{\omega-x\lceil}$$

A livello individuale, sia:

$$b_0 = \frac{B}{l_x}$$

che può essere espressa come segue:

$$b_0 = \frac{c}{a_{\omega-x}|}$$

Quindi:

▷ $\frac{1}{a_{\omega-x}|} = \textit{tontine rate}$ (approx)

▷ $a_{\omega-x}| = \textit{tontine factor}$ (approx)

Nota: essendo la rendita posticipata, il beneficio b_0 non è mai pagato
⇒ beneficio “base”

Mediante le precedenti equazioni si trova:

$$b_t^* = \frac{c}{a_{\omega-x|}} \frac{l_x}{l_{x+t}^*}$$

nonché la relazione ricorrente:

$$b_{t+1}^* = b_t^* \frac{l_{x+t}^*}{l_{x+t+1}^*}, \quad \text{per } t = 0, 1, \dots$$

dove $b_0^* = b_0$ e $l_x^* = l_x$

Confronto tra la sequenza di benefici b_t^* di una rendita tontina e il beneficio (costante) b pagato da una rendita vitalizia posticipata con premio unico $\Pi = c$, cioè:

$$b = \frac{c}{a_x}$$

Anzitutto:

$$a_{\omega-x] } > a_x \Rightarrow b_0 < b$$

Dalle precedenti equazioni si trova poi:

$$b_t^* = b \frac{a_x}{a_{\omega-x] }} \frac{l_x}{l_{x+t}^*}$$

Quindi, finché

$$\frac{a_x}{a_{\omega-x] }} \frac{l_x}{l_{x+t}^*} < 1$$

cioè

$$l_{x+t}^* > l_x \frac{a_x}{a_{\omega-x] }}$$

si ha $b_t^* < b$

Quindi:

- finché il numero di superstiti è elevato, l'importo del beneficio è piccolo
- raggiungere un b_t^* “soddisfacente” (in relazione a b) dipende dalla mortalità nel gruppo

Esempio

Con base tecnica data da tavola HP1 e $i = 0.02$, il premio unico per una rendita vitalizia da età $x = 65$ è $\Pi = 1\,707.16$

Se $c = \Pi = 1\,707.16$ è pagato come contributo a uno schema tontinario, si ha $b_0 = 57.89$

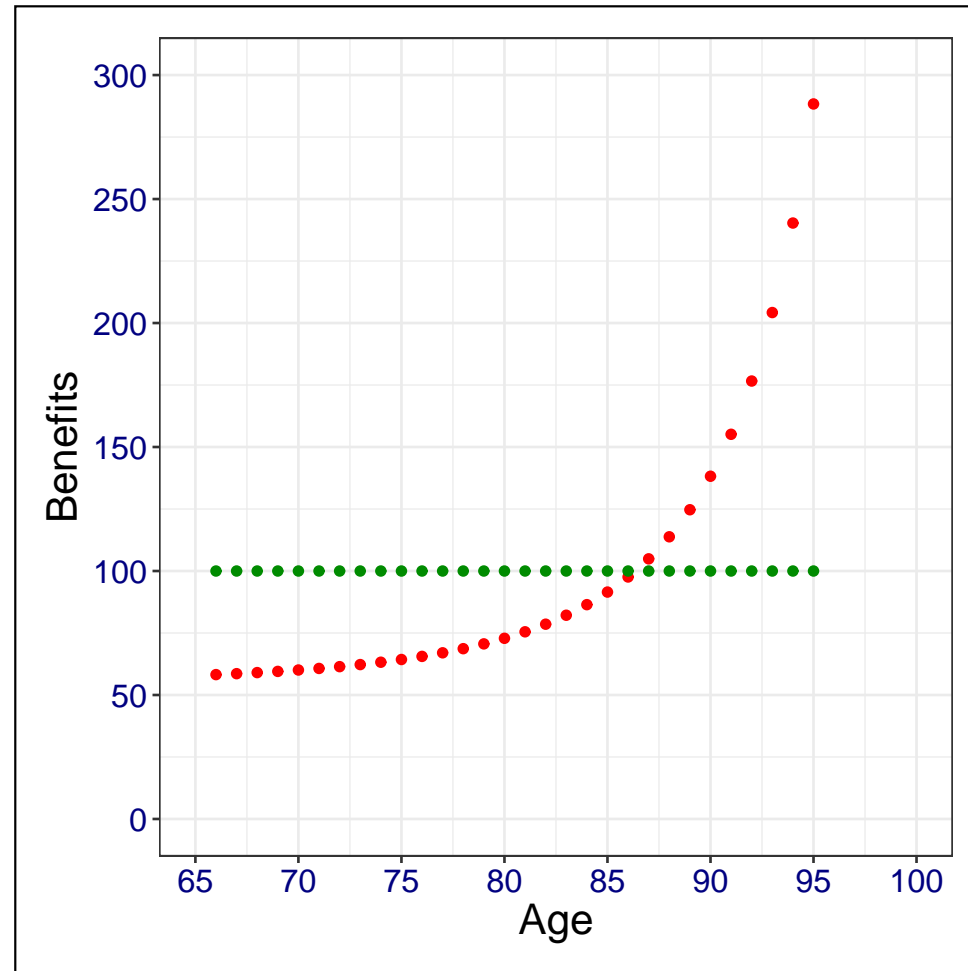
Assumendo che i numeri ℓ_{x+t}^* , $t = 1, 2, \dots$, siano dati dalla tavola HP1, si trova la sequenza b_1^*, b_2^*, \dots riportata nella seguente Tabella

Rendite tontine (cont.)

$x + t$	b_t^*
65	—
66	58.22
67	58.60
68	59.03
69	59.52
70	60.07
...	...
83	82.16
84	86.43
85	91.51
...	...
90	138.21
91	155.14
92	176.60
...	...
97	443.67
98	571.66
99	758.05
...	...

Beneficio b_t^ pagato da una rendita tontina; $x = 65$*

Rendite tontine (cont.)



Beneficio b_t^ pagato da una rendita tontina e
beneficio costante b pagato da una rendita vitalizia immediata; $x = 65$*

Aleatorietà dell'operazione di rendita tontina

- ▷ Per l'ente debitore la durata K è aleatoria ma la rata annua B è certa
- ▷ Per il generico soggetto creditore j è aleatoria sia la durata $K_x^{(j)}$ che la successione di rate (dipendenti dai numeri effettivi di superstiti)
- ▷ Differenza fondamentale tra la rendita tontina e l'usuale rendita vitalizia: beneficio prefissato e garantito nella rendita vitalizia

Il piano di finanziamento proposto da L. de Tonti (~ 1650)

Proposta di L. de Tonti per finanziamento del governo francese:

$$B = C i$$

con i tasso annuo di interesse fissato

Essendo $a_{\infty|} = \frac{1}{i}$, si ha:

$$B = C i = \frac{C}{a_{\infty|}}$$

(assumendo lo stesso tasso in tutti i valori attuali) \Rightarrow l'operazione sarebbe stata equa (al tasso i) se la rendita di rata B fosse stata perpetua, mentre:

$$\frac{C}{a_{\infty|}} < \frac{C}{a_{\omega-x|}} < \frac{C}{\mathbb{E}[a_{K|}]}$$

Osservazione

Schemi tontinari per raccolta fondi successivamente implementati in vari paesi (UK, Francia, ecc.)

Generalizzazioni dello schema tontinario

Possibili generalizzazioni:

1. Definizione del gruppo tontinario
 - (a) individui di varie età \Rightarrow legame tra c e b dipendente dall'età (non considerato negli schemi tontinari "storici")
 - (b) possibile apertura a futuri aderenti
2. Intervallo temporale dei pagamenti
 - (a) pagamenti vitalizi (non limitati)
 - (b) possibili restrizioni
 - ▷ rendite tontine differite
 - ▷ rendite tontine temporanee
3. Relazione tra beneficio e rendimento degli investimenti
 - (a) tasso di interesse fisso
 - (b) legame tra B e C dipendente dal rendimento degli investimenti

10.3 Group-self annuitisation

Rendite vitalizie (standard): l'assicuratore assume i rischi

- di longevità individuale (idiosincratice) \Rightarrow diversificabile mediante pooling
- di longevità aggregato (sistemico) \Rightarrow non diversificabile mediante pooling

Consequente necessità di allocazione di capitale

Problema: definire un modello di rendita vitalizia tale che il rischio sistemico sia gestito mediante indebolimento della struttura di garanzia

Soluzione: rendita vitalizia con benefici determinati progressivamente in funzione della mortalità osservata nel gruppo assicurato
 \Rightarrow *Group-self annutization (GSA)*

(Per confronto, vedi: Benefici "longevity-linked")

Lo schema GSA

Sia $F_0^{[P]}$ il fondo al tempo 0, dato dai contributi degli ℓ_x membri coetanei di età x

GSA pagherà a ciascun membro un beneficio (inizialmente stabilito) b_0 , tale che:

$$F_0^{[P]} = \ell_x b_0 \ddot{a}_x$$

Fondo al tempo 1 (prima del pagamento del beneficio in 1):

$$F_1^{[P]} = (F_0^{[P]} - \ell_x b_0) (1 + i) = \ell_x b_0 (\ddot{a}_x - 1) (1 + i)$$

con i = tasso di rendimento del fondo

Group-self annuitisation (cont.)

Sia ℓ_{x+1}^* una possibile determinazione del numero aleatorio di superstiti al tempo 1

Ricalcolo del beneficio $\Rightarrow b_1^*$ beneficio calcolato secondo la:

$$F_1^{[P]} = \ell_{x+1}^* b_1^* \ddot{a}_{x+1}$$

e quindi dato dalla:

$$b_1^* = \frac{1}{\ell_{x+1}^*} \frac{F_1^{[P]}}{\ddot{a}_{x+1}} = \frac{1}{\ell_{x+1}^*} \frac{\ell_x b_0 (\ddot{a}_x - 1) (1 + i)}{\ddot{a}_{x+1}}$$

Mediante l'equazione ricorrente

$$\ddot{a}_x = 1 + (1 + i)^{-1} p_x \ddot{a}_{x+1}$$

si trova:

$$b_1^* = \frac{1}{\ell_{x+1}^*} \frac{\ell_x b_0 (\ddot{a}_x - 1) (1 + i)}{(\ddot{a}_x - 1) (1 + i) \frac{1}{p_x}} = b_0 \frac{\ell_x p_x}{\ell_{x+1}^*}$$

Group-self annuitisation (cont.)

Sia p_x^* la frequenza di sopravvivenza ad età x , cioè:

$$p_x^* = \frac{l_{x+1}^*}{l_x^*} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Si trova quindi:

$$b_1^* = b_0 \frac{p_x}{p_x^*}$$

Più alta la frequenza p_x^* (in relazione alla probabilità p_x) \Rightarrow più forte la riduzione del beneficio

Rapporto $\frac{p_x}{p_x^*}$: *fattore di aggiustamento in base alla mortalità osservata nel gruppo*

La relazione vale per $t = 1, 2, \dots$:

$$b_t^* = b_{t-1}^* \frac{p_{x+t-1}}{p_{x+t-1}^*}$$

Generalizzazioni

Possibili generalizzazioni

- Apertura del gruppo GSA a nuovi aderenti
- Fattore di aggiustamento basato anche su relazione tra rendimento degli investimenti e tasso ipotizzato i
- Esperienza di bassa mortalità su lungo termine (cioè $l_{x+t}^* > l_{x+t}$ per molti anni) \Rightarrow uso di una tavola di mortalità aggiornata
 \Rightarrow valori \ddot{a}_{x+t} coinvolti nel processo di aggiustamento

11 RENDITE VITALIZIE E CONDIZIONI DI SALUTE

- 11.1 Introduzione: modelli di linking
- 11.2 Rendite vitalizie in ambito LTC
- 11.3 Un modello generale

11.1 Introduzione: modelli di linking

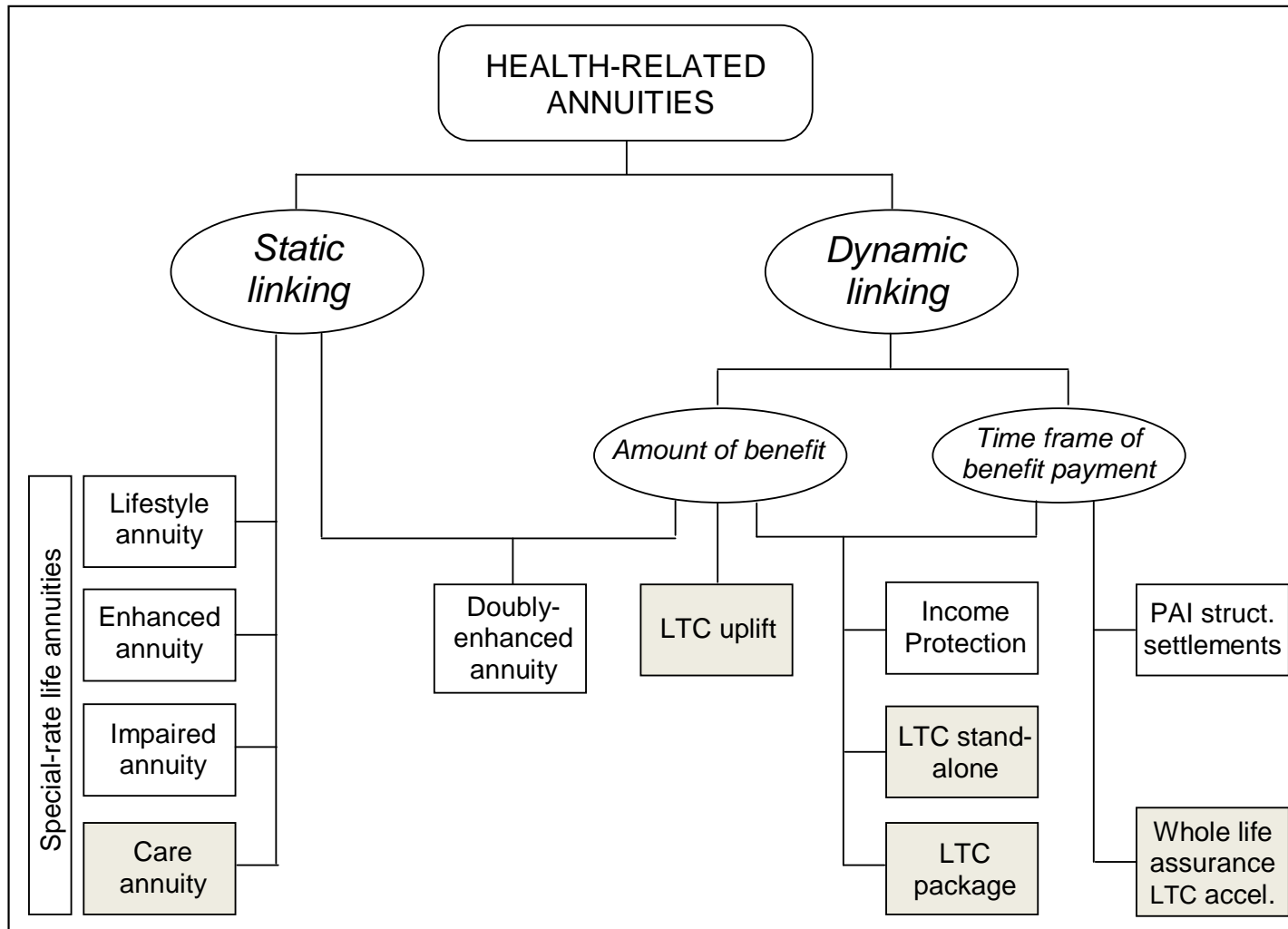
Struttura di rendita vitalizia presente in vari prodotti assicurativi nell'area delle assicurazioni di persone e, in particolare, delle assicurazioni sulla salute

In relazione ai legami tra rendita e condizioni di salute \Rightarrow modelli di linking

- *statico* (link tra condizioni di salute e importo e durata della rendita non variabile nel tempo)
- *dinamico*
 - ▷ in relazione all'importo
 - ▷ in relazione all'intervallo di pagamento della rendita

(Vedi figura seguente)

Introduzione: modelli di linking (cont.)



Benefici dipendenti dalle condizioni di salute: link statici e dinamici

11.2 Rendite vitalizie in ambito LTC

Tipi di prodotti LTCI con beneficio predefinito

- *Pre-funded plans*
 - ▷ periodo di accumulazione \Rightarrow pagamento di premi periodici fino a età stabilita (o fino a ingresso nello stato LTC)
 - ▷ l'accumulazione può ridursi a un premio unico, pagato da assicurato non invalido LTC
 - ▷ periodo di decumulazione \Rightarrow (possibile) pagamento di benefici, solitamente in forma di rendita vitalizia
- *Immediate care plans*
 - ▷ pagamento di un premio unico (assicurato invalido LTC)
 - ▷ pagamento immediato del beneficio, solitamente in forma di rendita vitalizia

Rendite vitalizie in ambito LTC (cont.)

Immediate care plans \Rightarrow *Care annuities*

Prodotti acquistati da o per persone già in stato LTC

Appartengono alla categoria delle *special rate annuities*, data l'ipotesi di mortalità aggravata, dette anche *underwritten annuities* per la necessità di una fase di underwriting nella quale si accerta lo stato di salute della persona

Altre *special rate annuities* (in ordine di sovrarmortalità crescente):

- ▷ *life-style annuities*
- ▷ *enhanced annuities*
- ▷ *impaired-life annuities*

(Vedi: 9.3 Rendite a tasso speciale)

Rendite vitalizie in ambito LTC (cont.)

Pre-funded plans si articolano in:

- ▷ fase di accumulazione, durante la quale si pagano premi
- ▷ fase di decumulazione, durante la quale sono pagati benefici LTC, solitamente in forma di rendita vitalizia (in caso di non autosufficienza) ed eventuali altri benefici

Diversi prodotti appartengono alla categoria dei pre-funded plans

- *Assicurazione LTC autonoma (Stand alone)*
 - ▷ beneficio: rendita vitalizia (eventualmente in funzione di ADL)
 - ▷ premi: premio unico, premi vitalizi temporanei, premi vitalizi illimitati
 - ▷ interruzione dei premi all'ingresso in LTC
 - ▷ nessun beneficio in assenza di bisogno LTC ⇒ prodotto assicurativo di puro "rischio"

Rendite vitalizie in ambito LTC (cont.)

- *Prodotti combinati* \Rightarrow benefici LTC combinati con benefici sulla durata di vita (esempio: rendita vitalizia standard)

Scopo: ridurre il peso della “componente rischio” aggiungendo elementi “di risparmio”

- ▷ *Copertura LTC come assicurazione complementare di assicurazione caso morte a vita intera*

- beneficio “anticipativo”: un’assegnata aliquota del capitale assicurato pagata come rendita \Rightarrow beneficio LTC dato da:

$$\text{beneficio annuale} = \frac{\text{capitale assicurato}}{s}$$

pagabile per s anni al max

- eventuale capitale residuo pagato al decesso
- eventuale possibilità di prosecuzione della rendita LTC dopo esaurimento del capitale (\Rightarrow incremento di premio)
- presenza del beneficio anticipativo LTC \Rightarrow disincentivo al riscatto

Rendite vitalizie in ambito LTC (cont.)

- ▷ *Pacchetto assicurativo*: LTC + benefici dipendenti dalla durata di vita (caso morte, rendita vitalizia); struttura usuale:
 1. rendita LTC
 2. rendita vitalizia differita (ad es. dall'età 80), mentre l'assicurato non è nello stato LTC (benefici (1) e (2) mutuamente escludentisi)
 3. beneficio (capitale) caso morte
 - (a) uguale alla differenza (se positiva) tra importo prefissato e totale rate pagate sub (1) e (2)
 - (b) capitale prefissato, indipendente dalle rate pagate

“Certezza” di beneficio \Rightarrow costo elevato
- ▷ *Copertura IP+LTC*
 - Income Protection durante il periodo di attività lavorativa
 - Long Term Care dopo il pensionamento

Rendite vitalizie in ambito LTC (cont.)

▷ *Life care pensions*

- prodotti di rendita vitalizia in cui il beneficio LTC è definito in termini di incremento di importo rispetto al beneficio base
- pagamento del beneficio base b , successivamente possibile pagamento beneficio incrementato
- possibile incremento finanziato da un premio maggiore di quello richiesto dal solo beneficio base
- *Enhanced pension*: particolare prodotto previdenziale del tipo Life care pension, in cui l'incremento è finanziato da una riduzione (rispetto alla pensione base b) del beneficio pagato mentre l'assicurato non è nello stato LTC, quindi:
 - pagamento del beneficio ridotto b' , successivamente possibile pagamento del beneficio incrementato b''
 - possibili problemi di antiselezione nei soggetti che scelgono (opzione) la enhanced pension in luogo della pensione standard b

Vedi 7.5: LTC uplift

11.3 Un modello generale

In generale, dato il premio unico Π , benefici dipendono dallo stato di salute dell'assicurato nel tempo

Sia $H(t)$ lo stato di salute al tempo t , risultante da accertamento medico, espresso per esempio da ADL o IADL nel caso di prodotti LTC

In particolare, $H(0) =$ stato di salute all'emissione della polizza

Per $t > 0$: stato di salute $H(t)$ aleatorio

Sia $b(t)$ il beneficio pagabile al tempo t , eventualmente aleatorio a seconda del modello di linking

In una *rendita vitalizia (standard)*:

$$b(t) = b = f(\Pi) = \frac{\Pi}{a_x} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

\Rightarrow beneficio deterministico, stato di salute non esplicitamente considerato ma supposto molto buono

Sia il beneficio definito come segue:

$$b(t) = b = \phi(\Pi, H(0)) \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

\Rightarrow beneficio deterministico \Rightarrow link statico, esempio: *rendite vitalizie special rate*

Scopo:

$$\phi(\Pi, H(0)) > f(\Pi)$$

Sia il beneficio definito come segue:

$$b(t) = \psi(\Pi, H(t)) \quad \text{per } t = t_1, t_2, \dots$$

con t_1, t_2, \dots definiti dalle condizioni di polizza \Rightarrow link dinamico
 \Rightarrow benefici futuri aleatori

Vedi esempi seguenti

Assicurazione LTC stand-alone, con beneficio in funzione della gravità dello stato LTC:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } H(t) = \text{buono} \\ b^{(1)} & \text{se } H(t) = \text{grave} \\ b^{(2)} & \text{se } H(t) = \text{molto grave} \end{cases}$$

con $b^{(2)} > b^{(1)}$

Assicurazione a vita intera con beneficio LTC anticipativo:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } H(t) = \text{buono} \cup (t > \tau + s) \\ \frac{C}{s} & \text{se } H(t) = \text{grave} \cap (\tau < t \leq \tau + s) \end{cases}$$

dove:

- ▷ C = somma assicurata
- ▷ τ = tempo di ingresso nello stato LTC
- ▷ s = numero max di anni di pagamento della rendita

Life care pension:

$$b(t) = \begin{cases} b' & \text{se } H(t) = \text{buono} \\ b'' & \text{se } H(t) = \text{grave} \end{cases}$$

dove:

- ▷ b' = beneficio base (o ridotto)
- ▷ b'' = beneficio incrementato nello stato LTC

Rendita LTC combinata con rendita old-age:

$$b(t) = \begin{cases} b' & \text{se } H(t) = \text{buono} \cap (t \geq t^*) \\ b'' & \text{se } H(t) = \text{grave} \end{cases}$$

dove:

- ▷ b' = beneficio della rendita old-age, pagabile dal tempo t^* se l'assicurato non è nello stato LTC
- ▷ b'' = beneficio della rendita LTC

Rendita vitalizia “doubly enhanced”:

$$b(t) = \Phi(\Pi, H(0), H(t))$$

- accertamento medico all'emissione per determinare $H(0)$
⇒ rendita special rate
- evoluzione dello stato di salute ⇒ sequenza $\{H(t)\}$ per $t > 0$

12 GLI “ATTORI” NEL MERCATO DELLE RENDITE VITALIZIE

12.1 Gli “attori” e le relazioni

12.2 L’innovazione in alcune relazioni

12.1 Gli “attori” e le relazioni

Numerose “parti” nel contesto delle rendite vitalizie e della previdenza:

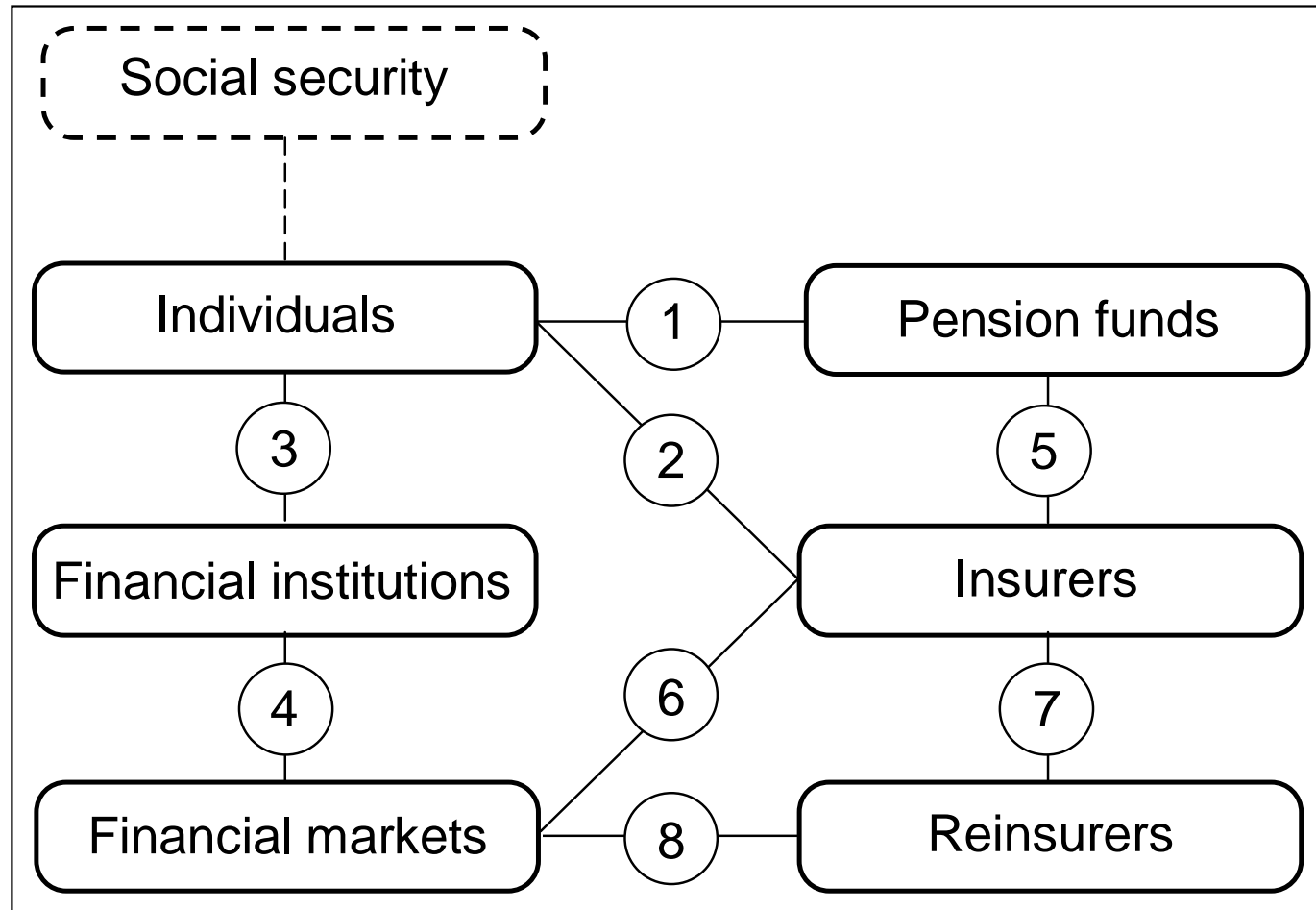
- Individui
- Fondi pensione
- Assicuratori
- Riassicuratori
- Istituzioni finanziarie
- Mercati finanziari
- (Previdenza pubblica)

e relazioni tra le varie parti

(Vedi figura seguente)

Aspetti innovativi possono riguardare varie relazioni

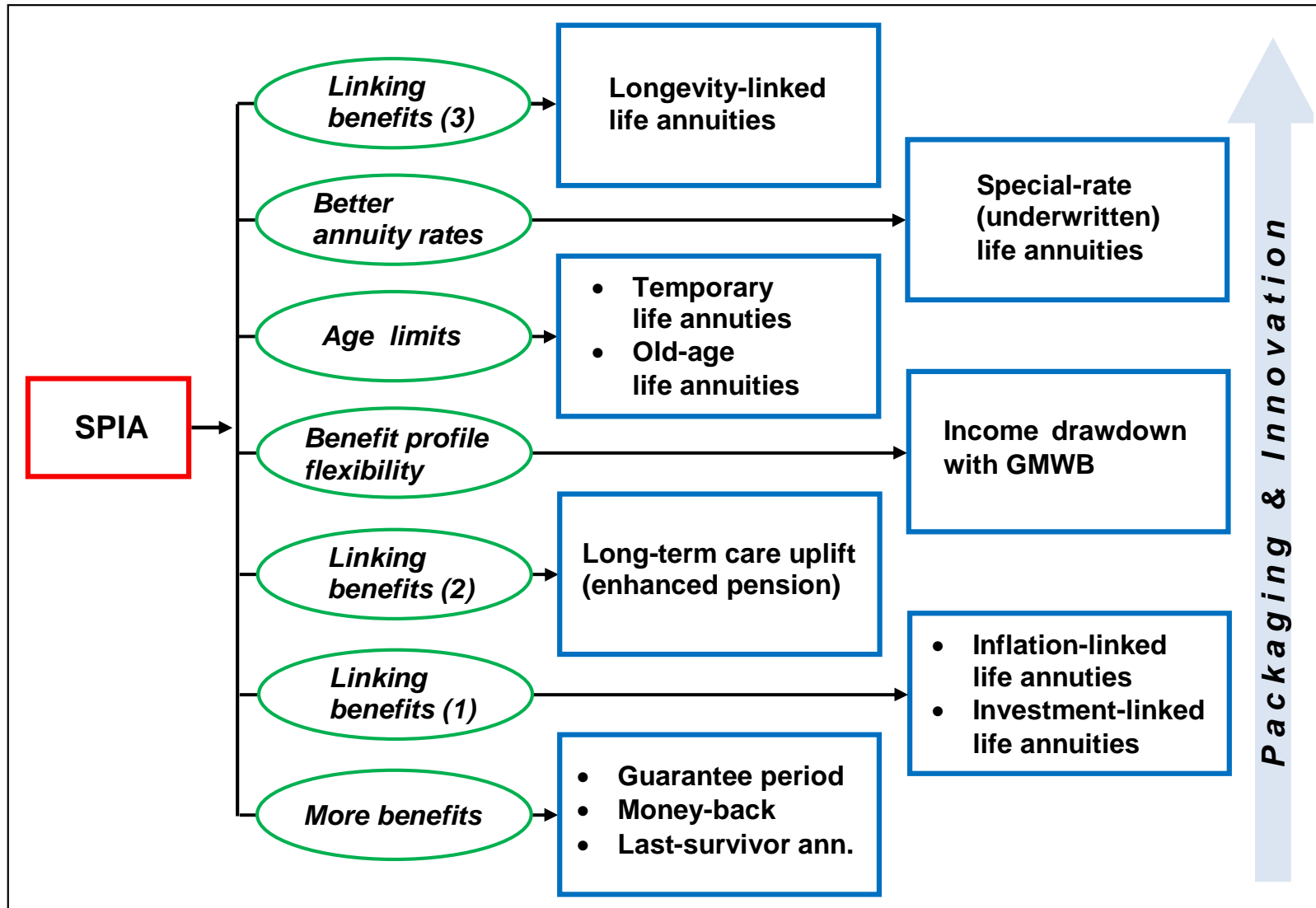
Gli “attori” e le relazioni (cont.)



“Attori” e relazioni

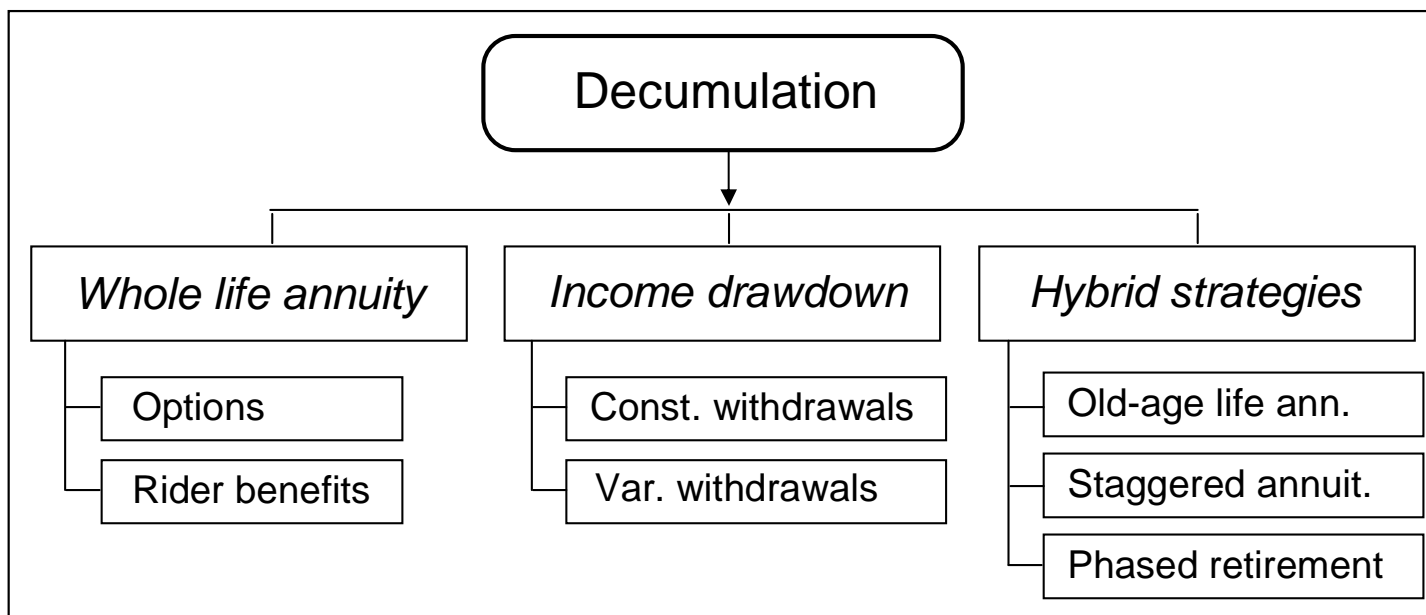
12.2 L'innovazione in alcune relazioni

L'offerta assicurativa (Relazione ②)



L'innovazione in alcune relazioni (cont.)

Le scelte individuali (Relazioni ② e ③)



Strategie alternative per il reddito post-pensionamento

Il “de-risking” dei fondi pensione: Bulk annuities (Relazione ⑤)

Fondi pensione che erogano rendite vitalizie esposti a vari rischi; in particolare:

- ▷ rischio longevità
- ▷ rischio finanziario

Possibile trasferimento di entrambi i rischi mediante *bulk annuities*, contratti a lungo termine disegnati su misura per uno specifico fondo pensioni

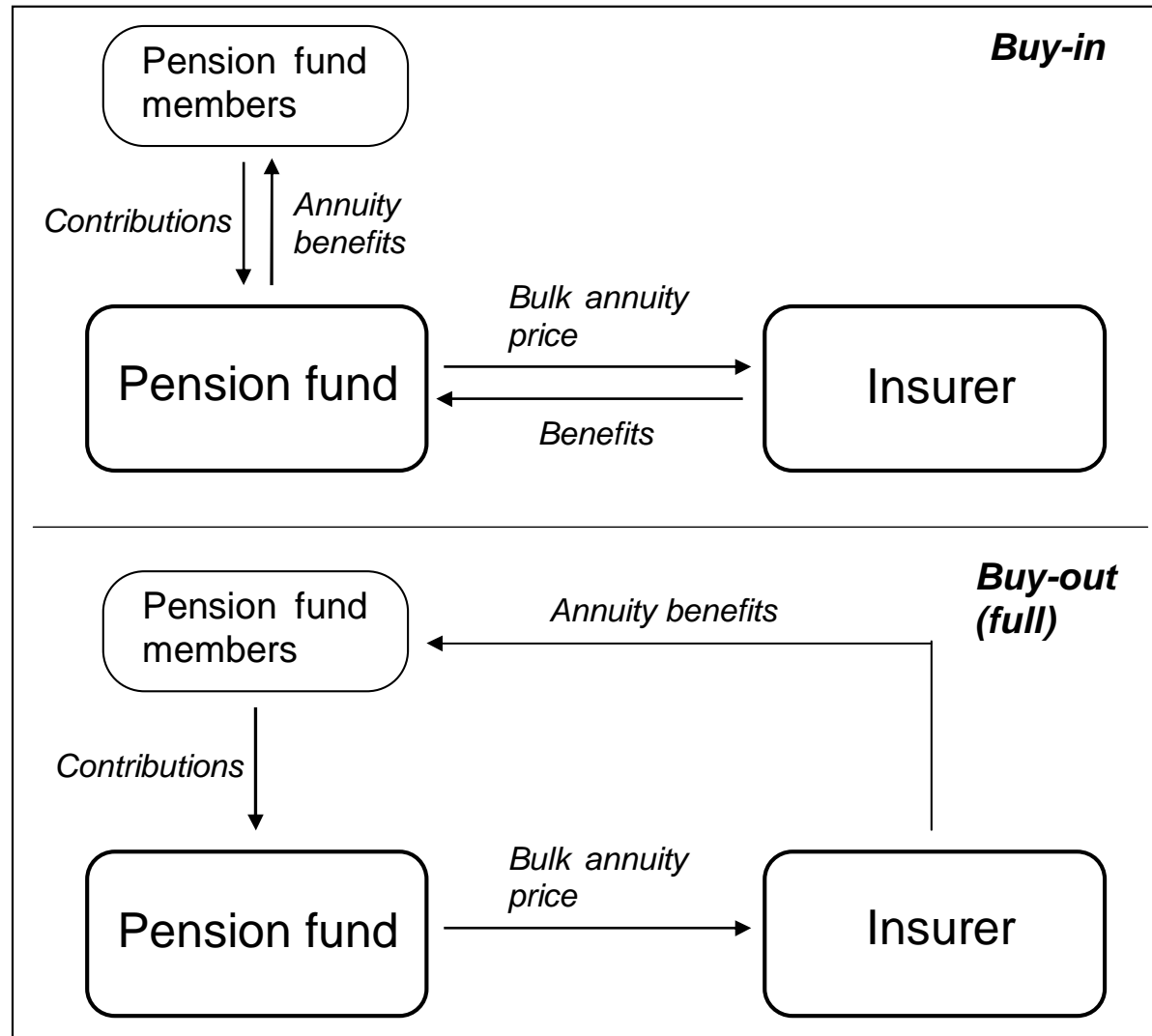
Classificazione in base alla modalità di trasferimento dei rischi da fondo pensioni ad assicuratore

L'innovazione in alcune relazioni (cont.)

- *Buy-in*
 - ▷ il fondo pensioni acquista dall'assicuratore una polizza con cui finanzia il pagamento delle pensioni
 - ▷ la polizza comprende tutti o parte dei pensionati, e può comprendere anche pensionati futuri
 - ▷ il fondo pensioni rimane operante
- *Buy-out*
 - ▷ scopo: estinzione delle passività del fondo pensioni
 - ▷ l'assicuratore emette contratti di rendita vitalizia ai pensionati
 - ▷ possono essere interessati tutti i pensionati (full buy-out) ⇒ il fondo pensioni viene chiuso

(Vedi figura seguente)

L'innovazione in alcune relazioni (cont.)



Bulk annuities: buy-in e buy-out

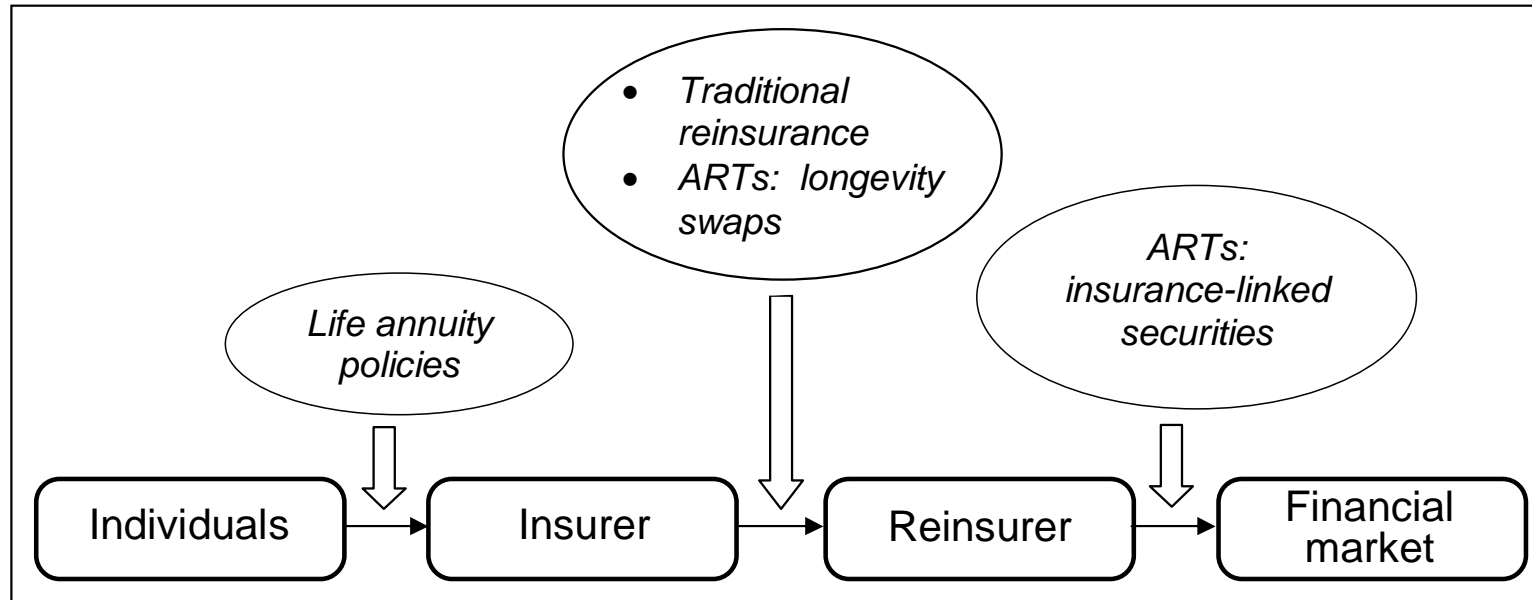
Riassicurazione tradizionale e ART (Relazioni ⑦ e ⑧)

Trasferimento del longevity risk:

- scarti accidentali (rischio *individuale* \Rightarrow componente non sistematica)
 - ▷ diversificabile via pooling \Rightarrow riassicurazione tradizionale
- scarti sistematici (rischio *aggregato* \Rightarrow componente sistematica)
 - ▷ non diversificabile via pooling \Rightarrow Alternative Risk Transfers (ART)
 - da assicuratore a riassicuratore \Rightarrow *longevity swaps*
 - da riassicuratore a mercato finanziario \Rightarrow *insurance-linked securities* (longevity bonds)

(Vedi figura seguente)

L'innovazione in alcune relazioni (cont.)



La catena di trasferimento dei rischi