

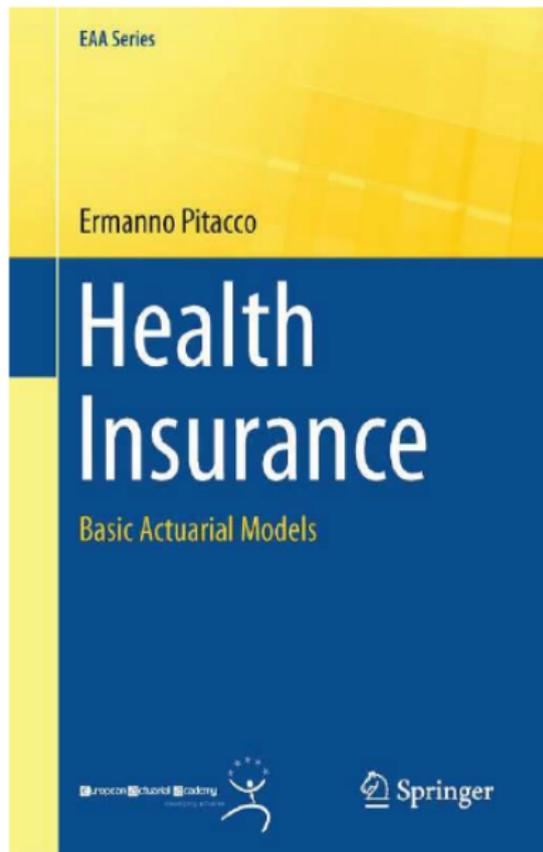
Tecnica attuariale delle assicurazioni di persone

a.a. 2022/2023

Assicurazioni sulla salute

mario.marino@deams.units.it

Riferimento bibliografico



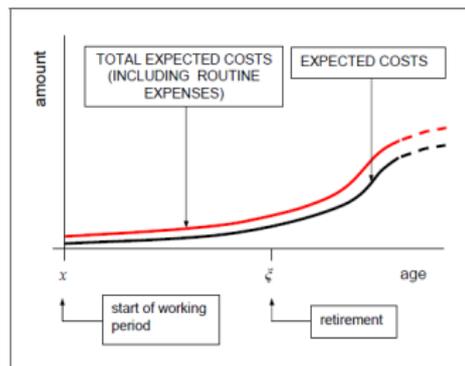
*E. Pitacco (2014)
Health Insurance.
Basic actuarial models
EAA Series, Springer*

Il sistema di copertura dei rischi sanitari

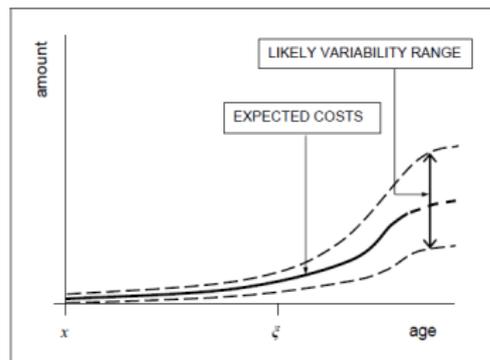
- ▶ **Assicurazione privata** → prevede l'intervento dell'assicuratore al manifestarsi di un'**alterazione**, tra quelle previste in polizza, dello **stato di salute** dell'assicurato o al sopraggiungere di **condizioni di non autosufficienza**:
 - ▶ **Fondi sanitari integrativi** (II pilastro): forme integrativi al SSN al fine di ampliare il ventaglio di prestazioni socio-sanitarie;
 - ▶ **Coperture sanitarie individuali** (III pilastro): stipulazione di polizze sulla salute con compagnie di assicurazioni.
- ▶ Tratteremo coperture assicurative in assenza di coperture offerte dal SSN

Il bisogno di copertura assicurativa

Figure: Il profilo temporale dei costi per la salute di un generico individuo (potenziale assicurato).



Costi attesi relativi alla salute



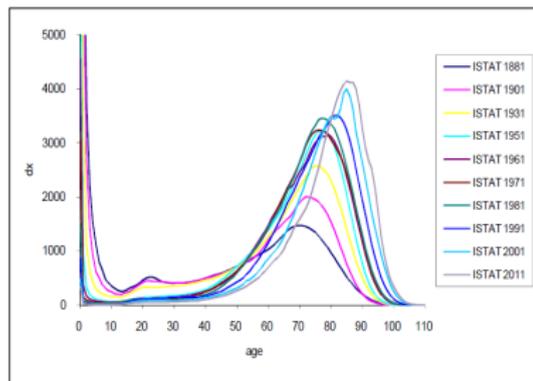
Costi attesi relativi alla salute e variabilità dei costi stessi

La gestione assicurativa dei rischi salute

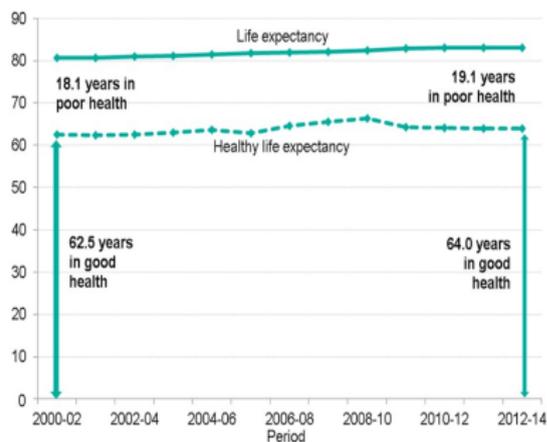
- ▶ I rischi salute trasferiti dall'assicurato all'assicuratore sono **rischi puri**, quindi
- ▶ Le assicurazioni sulla salute sono prodotti di **protezione** con prevalente o esclusivo scopo di copertura del rischio e scarso carattere di risparmio;
- ▶ I rischi salute assunti dall'assicuratore sono di natura biometrica e composta:
 - ▶ rischio inerente alla durata di vita dell'assicurato → rischio di longevità;
 - ▶ rischio inerente alla salute dell'assicurato → rischio di morbilità, disabilità
- ▶ ciascun rischio può presentarsi in termini:
 - ▶ Rischio accidentale (e.g. longevity risk individuale)
 - ▶ Rischio sistematico (e.g. longevity risk aggregato)
 - ▶ Rischio catastrofe

La gestione assicurativa dei rischi salute

Figure: Andamento numero dei decessi nel tempo e aspettativa di vita (genere: female)

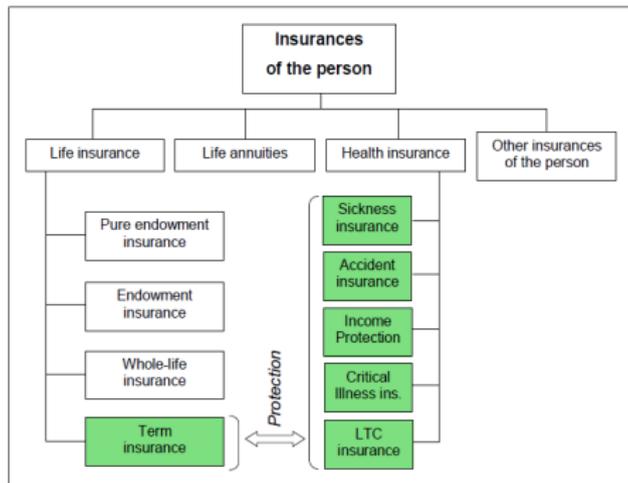


Curve dei decessi (Fonte: ISTAT)



Aspetti generali dei prodotti ass.vi dell' "area salute"

- ▶ Le assicurazioni sulla salute sono annoverabili nell'ambito delle assicurazioni di persone di persone, ma non necessariamente sono inquadrabili nell'ambito delle assicurazioni sulla vita.



I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Scopo

- coperture assicurative per situazioni di bisogno derivanti da alterazioni del normale stato di salute di una persona

Cause

- **infortunio**: “evento dovuto a causa fortuita, violenta ed esterna che produce lesioni corporali obiettivamente constatabili, che abbiano come conseguenza la morte o un’invalidità permanente o un’inabilità temporanea” (definizione: polizza infortuni italiana tipo)
- **malattia**: alterazione dello stato di salute non dovuta a causa violenta ed esterna

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Conseguenze

- **invalidità professionale:** variamente definibile
 - ▷ incapacità di svolgere la propria professione
 - ▷ incapacità di svolgere qualsiasi professione
 - ▷ incapacità di svolgere professioni conformi al proprio livello di istruzione ed esperienza maturata
 - ▷ incapacità di svolgere un dato numero di ADW (Activities of Daily Work), per esempio
 - camminare
 - scrivere a penna
 - scrivere su tastiera
 - ...

(vedi ADL per assicurazioni Long Term Care)

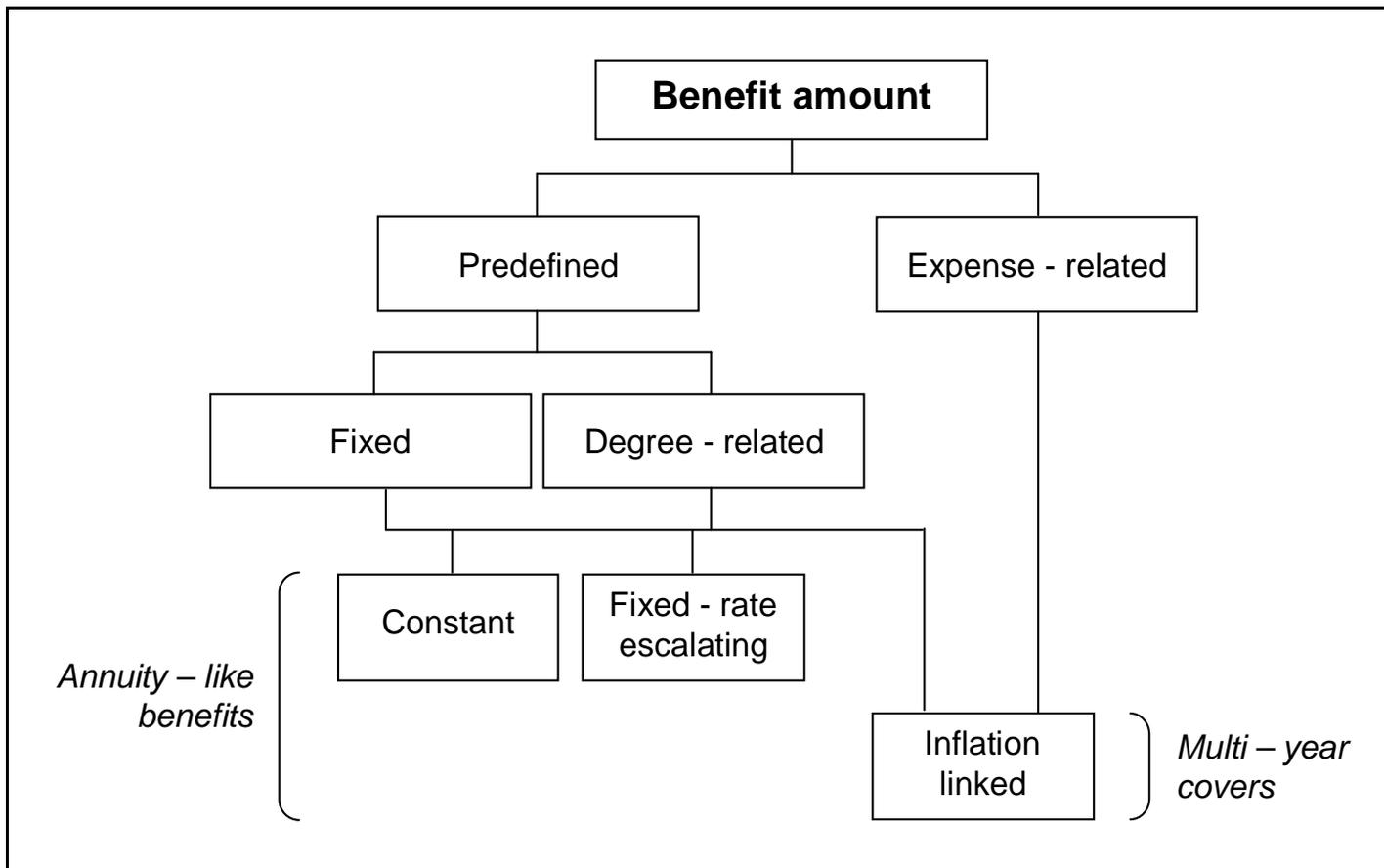
in ogni caso: temporanea oppure permanente
- **invalidità generica:** prescinde dalla capacità occupazionale

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Benefici

- **indennitari**: rimborso (totale o parziale) di spese effettivamente sostenute
 - ▷ sostitutivi (rispetto al sistema sanitario pubblico)
 - ▷ integrativi (rispetto al sistema sanitario pubblico)
- **predefiniti**: stabiliti alla stipulazione del contratto (ad es. per sostituire parzialmente l'usuale reddito da lavoro)
 - ▷ di rendita
 - ▷ di capitaledi ammontare
 - ▷ fisso
 - ▷ commisurato alla gravità dell'alterazione dello stato di salute
- **di servizio**: di cura, ospedaliero, ecc.

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



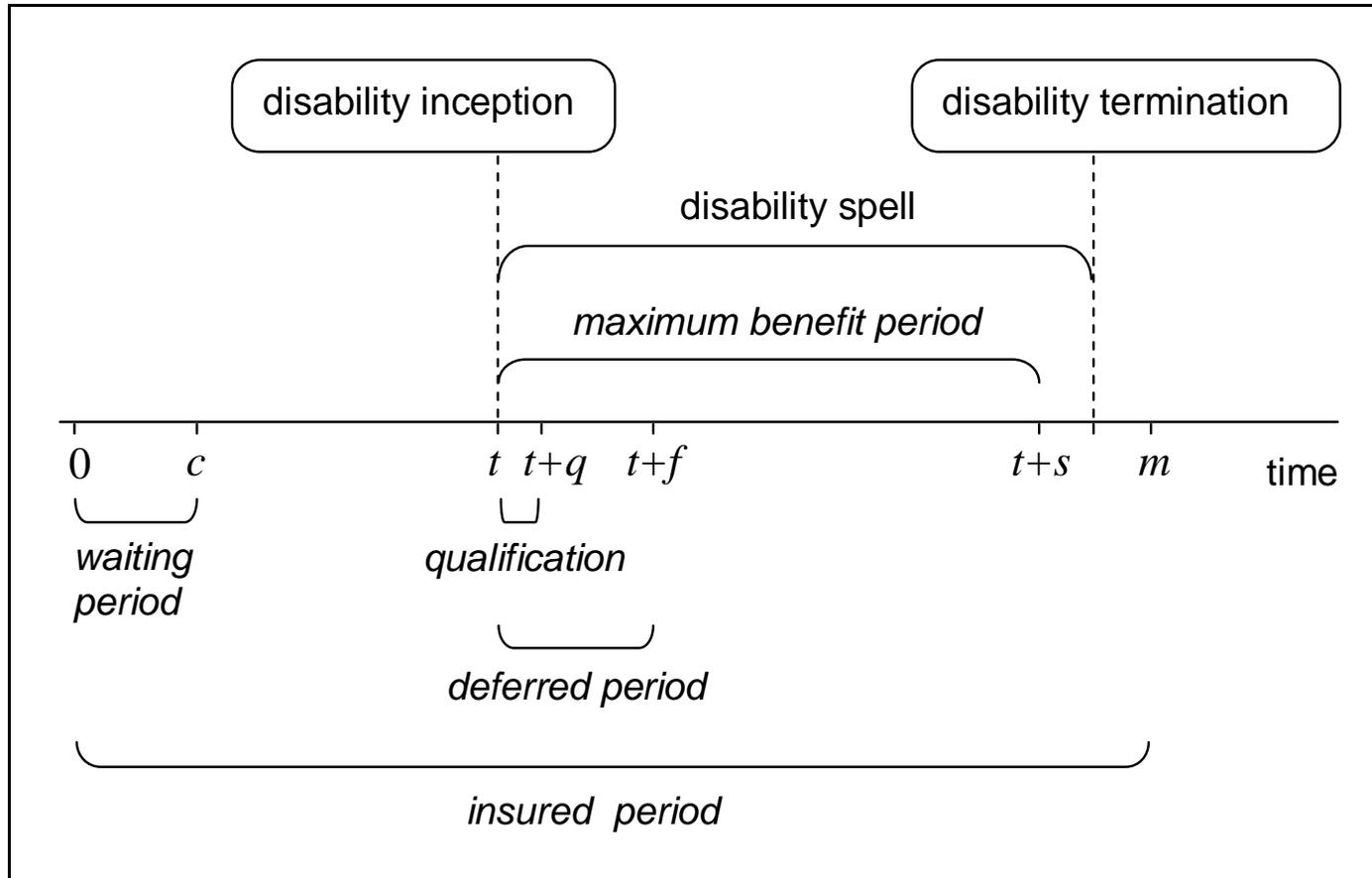
Tipi di benefici monetari nelle assicurazioni sulla salute

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Aspetti contrattuali

- **durata contrattuale**
 - ▷ mononannuali (o durata minore)
 - ▷ pluriennali (eventualmente a vita intera)
- **esclusioni**: limitazioni all'insieme di cause che comportano pagamento di benefici (ad es. esclusione di spese non collegate ad un ricovero ospedaliero)
- **limitazioni di importo**
 - ▷ massimale
 - ▷ franchigia
 - ▷ aliquota di scoperto
- **limitazioni di durata**
 - ▷ applicazione ad assicurazioni con benefici tipo rendita
 - ▷ carenza, franchigia, ecc. (vedi Figura seguente)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Alcune condizioni contrattuali per benefici di tipo rendita

DIFFICOLTÀ NEL MERCATO ASSICURATIVO “SALUTE”

- Barriere “lato offerta”
 - ▷ incertezza della base tecnica (frequenze, costi attesi, durata di vita e relativi aspetti evolutivi)
 - ▷ difficoltà di realizzare efficaci meccanismi di indicizzazione
 - ▷ antiselezione \Rightarrow “oggettiva” sinistrosità del rischio
 - ▷ “moral hazard” \Rightarrow propensione a denunciare (e “proseguire”) sinistri
- Barriere “lato domanda”
 - ▷ scarsa propensione al trasferimento assicurativo
 - ▷ premi elevati per prodotti “di rischio”
 - ▷ problemi collegati alla dinamica dei premi

TIPOLOGIA DEI PRODOTTI

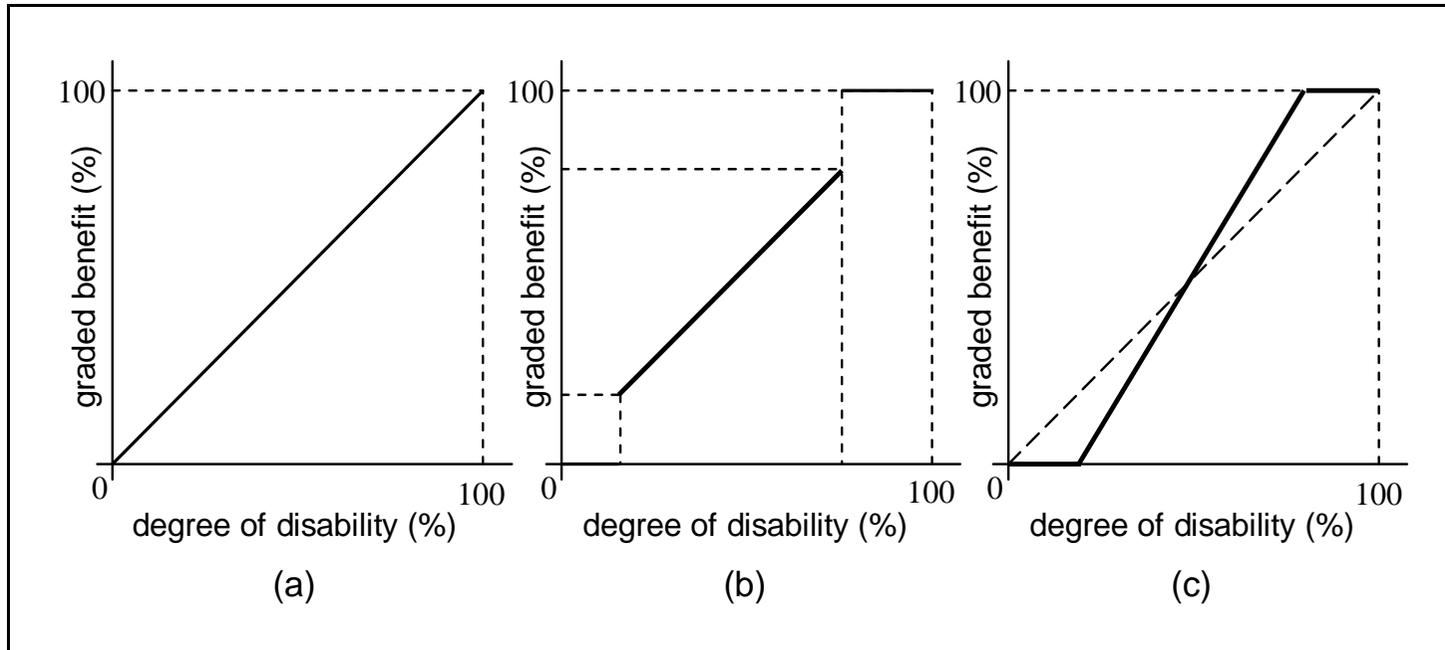
- ▷ assicurazioni infortuni
- ▷ assicurazioni malattia
- ▷ assicurazioni per invalidità professionale (Income Protection)
- ▷ assicurazioni per invalidità senile (Long Term Care)
- ▷ assicurazioni Critical Illness
- ▷ altri prodotti assicurativi a copertura limitata
- ▷ benefici assicurativi “combinati”

ASSICURAZIONI INFORTUNI

Tipi di coperture

- invalidità permanente da infortunio; invalidità va intesa in senso generale (sia incapacità professionale che invalidità generica)
 - ▷ beneficio: capitale di ammontare predefinito, corrisposto in misura dipendente dal grado di invalidità
 - (a) senza franchigia
 - (b) franchigia relativa
 - (c) franchigia assoluta con “assorbimento”
- (vedi Figure seguenti)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Beneficio in funzione del grado di invalidità

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

- inabilità temporanea da infortunio
 - ▷ pagamento di una rendita (“diaria”) per il periodo durante il quale l'assicurato è totalmente o parzialmente incapace, a causa di infortunio, di svolgere la propria attività
 - ▷ massimali di durata (es. 150 gg, 300 gg, 1 anno)
- decesso a causa di infortunio
 - ▷ beneficio di capitale
 - ▷ spesso complementare di assicurazioni vita con beneficio caso morte

Caratteristiche

- coperture solitamente monoannuali (se non complementari di assicurazioni vita)
- “polizza infortuni”: comprende le tre coperture
- polizze speciali: infortuni professionali, infortuni connessi con l'uso di determinati mezzi di trasporto, infortuni sportivi, ecc.

ASSICURAZIONI MALATTIA

Tipi di coperture

- invalidità permanente da malattia (vedi assic. infortuni)
- inabilità temporanea da malattia (vedi assic. infortuni)
- diaria per ricovero ospedaliero
 - ▷ pagamento della diaria assicurata per i periodi di ricovero
 - ▷ prescinde da eventuali spese connesse con il ricovero
 - ▷ causa del ricovero: malattia o infortunio

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

- rimborso spese mediche (RSM)
 - ▷ copertura di tipo indennitario
 - ▷ rimborso (solitamente parziale per presenza di franchigia, massimale, ecc.) di costi sostenuti per malattia, infortunio o parto
 - ▷ varie estensioni di copertura, ad esempio:
 - in caso di ricovero con o senza intervento chirurgico
 - anche in caso di intervento chirurgico ambulatoriale
 - anche in caso di spese fuori ricovero o senza intervento ambulatoriale
 - ▷ spese ammesse (a seconda del tipo di polizza): accertamenti diagnostici, onorari medici, uso di sale operatorie, spese di degenza, medicinali, riabilitazione, trattamenti fisioterapici, ecc.

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Esempio di condizioni di polizza RSM

- (1) *Franchigia fissa* (detta anche *flat deductible*, o *fixed-amount deductible*): ammontare predefinito che l'assicurato deve pagare prima che l'assicuratore intervenga per coprire (parzialmente) la parte rimanente di spese; può essere riferita a un singolo sinistro (malattia o infortunio), o al periodo di copertura (ad es. un anno)
- (2) *Aliquota di scoperto* (detta anche *fixed-percentage deductible*, o *coinsurance*): frazione delle spese che l'assicurato deve pagare dopo aver superato la franchigia fissa
- (3) *Stop-loss*: massimo ammontare che l'assicurato dovrà pagare; può essere riferito a un singolo sinistro o al periodo di copertura

(1) + (2) + (3) \Rightarrow ripartizione del costo tra assicurato e assicuratore

Nel seguito: riferimento a un sinistro

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Notazione:

x = generico ammontare di spese

D = flat deductible

α = proportional deductible

SL = stop-loss

M = ammontare che dipende da D , α , SL (vedi Eq. (*))

u = importo pagato dall'assicurato (*out-of-pocket*)

y = importo pagato dell'assicuratore (*reimbursement benefit*)

Ovviamente $u + y = x$

Per $0 < \alpha \leq 1$:

$$u = \begin{cases} x & \text{se } x < D \\ \alpha(x - D) + D & \text{se } D \leq x < M \\ SL & \text{se } x \geq M \end{cases}$$

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

$$y = \begin{cases} 0 & \text{se } x < D \\ (1 - \alpha)(x - D) & \text{se } D \leq x < M \\ x - SL & \text{se } x \geq M \end{cases}$$

dove

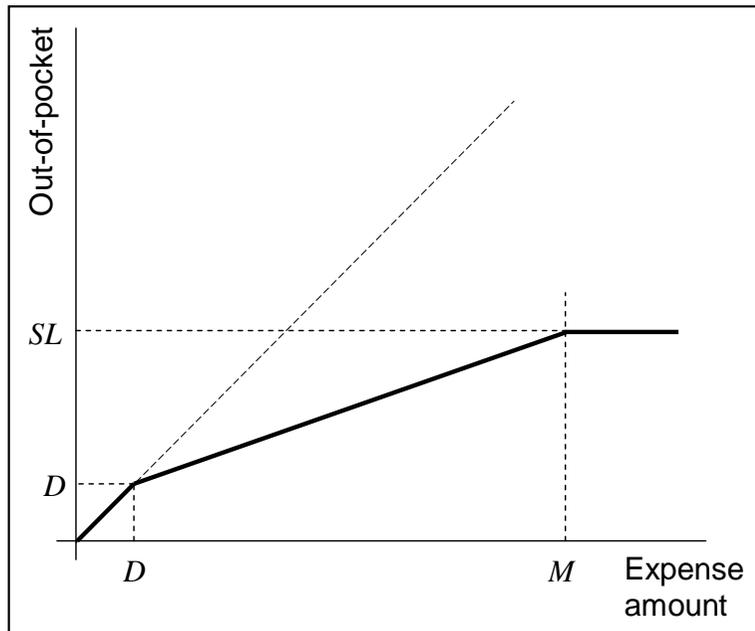
$$M = \frac{1}{\alpha} (SL - (1 - \alpha) D) \quad (*)$$

In particolare:

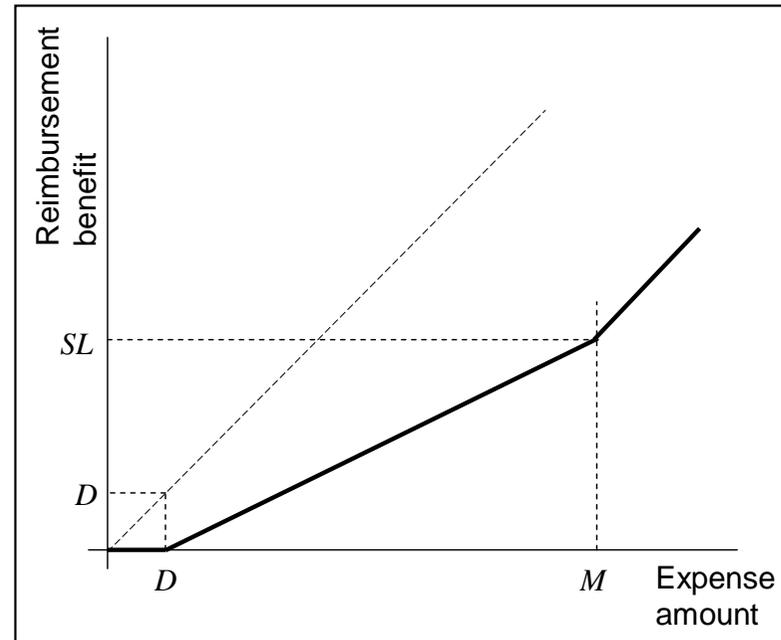
$$M = SL \text{ se } \alpha = 1$$

$$M = \frac{1}{\alpha} SL \text{ se } D = 0 \text{ e } 0 < \alpha \leq 1$$

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



(a)



(b)

Ripartizione del costo

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Esempio

Si assuma: $D = 100$, $\alpha = 0.25$, $SL = 500$

Si trova : $M = 1\,700$

Expense amount x	Out-of-pocket u	Reimbursement benefit y
50	50 (= 100%)	0
300	150 (= 50%)	150
900	300 (= 33%)	600
1 800	500 (= 28%)	1 300

Ripartizione del costo: esempi

ASSICURAZIONI PER L'INVALIDITÀ PROFESSIONALE CAUSATA DA MALATTIA O INFORTUNIO

Beneficio: corresponsione di una rendita (di rata prestabilita) per i periodi in cui, a causa di infortunio o malattia, l'assicurato sia totalmente (o anche solo parzialmente) incapace di svolgere attività lavorativa e conseguire reddito da lavoro

Nella terminologia internazionale: IP (Income Protection); precedente denominazione britannica: PHI (Permanent Health Insurance)

Varie definizioni possibili di incapacità professionale (v. sopra)

Notevoli variazioni di premio al variare della definizione; ad es.

- ▷ propria o altra simile occupazione $\Rightarrow P = 100$
- ▷ propria occupazione $\Rightarrow P = 110$
- ▷ qualsiasi occupazione $\Rightarrow P = 45$

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Usuale presenza di franchigia (assoluta), anche di durata notevole (6 mesi o 1 anno)

Possibile “integrazione” con copertura di inabilità temporanea (con massimale di 6 mesi o 1 anno)

Contratto pluriennale, senza possibilità di recesso da parte dell'assicuratore

Sospensione dei premi durante i periodi di incapacità

Durata contrattuale comunque limitata dall'età di pensionamento

Copertura a carattere non indennitario; limitazione usualmente imposta (\Rightarrow contenimento del moral hazard):

$$\frac{b}{w} \leq \alpha$$

con:

b = rata annua della rendita

w = reddito annuo da lavoro

ad es. $\alpha = 60\%$

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Esempio

Prodotto assicurativo Income Protection in Gran Bretagna
(importi in GBP)

$$b' = \begin{cases} 0.60 w & \text{se } w \leq 25\,000 \\ 15\,000 + 0.50 (w - 25\,000) & \text{se } w > 25\,000 \end{cases}$$

$$b'' = \max\{180\,000 - b^{[\text{other}]}, 0\}$$

$$b = \min\{b', b''\}$$

con $b^{[\text{other}]}$ = benefici di invalidità di altra provenienza

ASSICURAZIONI LONG TERM CARE

Aspetti generali

Long Term Care (LTC): complesso di interventi, erogati da istituzioni pubbliche o private, necessari a fronte di situazioni di bisogno di assistenza che si possono verificare soprattutto in età avanzata, non necessariamente provocate da infortunio o malattia ma anche da senescenza e conseguente menomazione dell'autosufficienza

A livello di popolazione, diffusione acuita dai trends demografici e sociali in atto

Necessità:

- ▷ assistenza domiciliare
- ▷ soggiorno con assistenza in case di riposo
- ▷ ricovero in case di cura

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Assicurazioni LTC (o LTCI = Long Term Care Insurance) \Rightarrow mezzi finanziari per far fronte al bisogno di LTC

Interesse delle coperture LTC:

- prodotti relativamente nuovi (inizio: anni Ottanta)
- prodotti utili dato il trend socio-demografico

Difficoltà:

- per l'assicuratore: scarsità di basi tecniche \Rightarrow elevati caricamenti di sicurezza
- per l'assicurato: prodotto di “protezione”, con scarso o nullo contenuto di risparmio, ma premio elevato

Difficoltà \Rightarrow packaging di vari prodotti

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Tipi di benefici

- predefinito: rendita di rata prestabilita, fissa o dipendente dal grado di autosufficienza
- indennitario: rimborso (parziale) delle spese di assistenza
- di servizio: assistenza in istituti convenzionati

Pagamento del beneficio

- richiesta di assistenza LTC (ed accertamento sanitario)
- quantificazione della mancanza di autosufficienza, ad es. mediante ADL

Quantificazione dell'autosufficienza

Metodo ADL (Activities of Daily Living)

- ▷ si considerano ad es. le seguenti attività
 1. lavarsi
 2. vestirsi e spogliarsi
 3. usare i servizi igienici
 4. trasferirsi dal letto alla poltrona e viceversa
 5. continenza
 6. alimentarsi
- ▷ per ogni attività, si considera la capacità o meno di svolgerla (o eventualmente la % di capacità)
- ▷ mediante somma (o media ponderata), si determina il livello di autosufficienza (o di “dipendenza”)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

ADL score; unable to perform:	LTC state	Graded benefit (% of the insured benefit)
3 activities	I	40
4 or 5 activities	II	70
6 activities	III	100

Beneficio in funzione dello stato LTC

- Indice di Barthel (UK): esempio di sistema ADL basato sui livelli di capacità di svolgere le varie attività (vedi pag. seguente)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

BARTHEL ACTIVITIES OF DAILY LIVING INDEX (BAI)

Function	Score	Description
Bowels	0	Incontinent (or needs to be given enema)
	1	Occasional accident (once a week)
	2	Continent
Bladder	0	Incontinent, or catheterised and unable to manage
	1	Occasional accident (maximum once per 24 hours)
	2	Continent (for more than 7 days)
Grooming	0	Needs help with personal care: face, hair, teeth, shaving
	1	Independent (implements provided)
Toilet use	0	Dependent
	1	Needs some help, but can do something alone
	2	Independent (on and off, wiping, dressing)
Feeding	0	Unable
	1	Needs help in cutting, spreading butter, etc.
	2	Independent (food provided within reach)
Transfer	0	Unable—no sitting balance
	1	Major help (physical, 1 or 2 people), can sit
	2	Minor help (verbal or physical)
	3	Independent
Mobility	0	Immobile
	1	Wheelchair independent, including corners, etc.
	2	Walks with help of one person (verbal or physical)
	3	Independent
Dressing	0	Dependent
	1	Needs help, but can do about half unaided
	2	Independent (including buttons, zips, laces, etc.)
Stairs	0	Unable
	1	Needs help (verbal, physical, carrying aid)
	2	Independent up and down
Bathing	0	Dependent
	1	Independent (Bath: must get in and out unsupervised and wash self. Shower: unsupervised/unaided)

Levels of ability in each category are scored, and the total gives an indication of the overall care requirements of the individual.

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

- Indice OPCS (Office for Population Censuses and Surveys, UK): esempio di sistema ADL basato sui livelli di capacità di svolgere 13 attività,
 - mobilità
 - vista
 - udito
 - mangiare, bere
 - ...

pesati e riassunti in un punteggio sintetico:

- ▷ per ogni ADL il livello di incapacità è quantificato da un punteggio p_j
- ▷ siano $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ i tre punteggi più alti per una persona
- ▷ punteggio complessivo ponderato

$$p = p^{(1)} + 0.4 p^{(2)} + 0.3 p^{(3)}$$

- ▷ in base a p si definiscono la “categoria” e il “livello” di invalidità (v. Tabella seguente)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

p	Categoria	Livello
0.5 – 2.95	1	-
3.0 – 4.95	2	-
5.0 – 6.95	3	-
7.0 – 8.95	4	-
9.0 – 10.95	5	-
11.0 – 12.95	6	I
13.0 – 14.95	7	I
15.0 – 16.95	8	I
17.0 – 18.95	9	II
19.0 – 21.40	10	II

Sistema OPCS

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Metodo IADL (Instrumental Activities of Daily Living)

- ▷ basato sulla capacità di svolgere vita “di relazione”
- ▷ attività considerate
 - telefonare
 - fare acquisti
 - usare mezzi di trasporto
 - gestire risorse finanziarie
 - ...
- ▷ proposto negli USA; esempio: v. Tabella seguente

Problema riguardante uso di metodi ADL e IADL: correlazioni significative tra capacità di svolgere le varie attività ⇒ possibile tendenza a concentrazione nelle classi di elevata mancanza di autosufficienza e in quelle di buona autosufficienza

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

INSTRUMENTAL ACTIVITIES OF DAILY LIVING SCALE (IADL)

M.P. Lawton & E.M. Brody

A. Ability to use telephone

- | | |
|---|---|
| 1. Operates telephone on own initiative; looks up and dials numbers, etc. | 1 |
| 2. Dials a few well-known numbers | 1 |
| 3. Answers telephone but does not dial | 1 |
| 4. Does not use telephone at all. | 0 |

B. Shopping

- | | |
|---|---|
| 1. Takes care of all shopping needs independently | 1 |
| 2. Shops independently for small purchases | 0 |
| 3. Needs to be accompanied on any shopping trip. | 0 |
| 4. Completely unable to shop. | 0 |

C. Food Preparation

- | | |
|--|---|
| 1. Plans, prepares and serves adequate meals independently | 1 |
| 2. Prepares adequate meals if supplied with ingredients | 0 |
| 3. Heats, serves and prepares meals or prepares meals but does not maintain adequate diet. | 0 |
| 4. Needs to have meals prepared and served. | 0 |

D. Housekeeping

- | | |
|--|---|
| 1. Maintains house alone or with occasional assistance (e.g. “heavy work domestic help”) | 1 |
| 2. Performs light daily tasks such as dish-washing, bed making | 1 |
| 3. Performs light daily tasks but cannot maintain acceptable level of cleanliness. | 1 |
| 4. Needs help with all home maintenance tasks. | 1 |
| 5. Does not participate in any housekeeping tasks. | 0 |

E. Laundry

- | | |
|---|---|
| 1. Does personal laundry completely | 1 |
| 2. Launders small items; rinses stockings, etc. | 1 |
| 3. All laundry must be done by others. | 0 |

F. Mode of Transportation

- | | |
|--|---|
| 1. Travels independently on public transportation or drives own car. | 1 |
| 2. Arranges own travel via taxi, but does not otherwise use public transportation. | 1 |
| 3. Travels on public transportation when accompanied by another. | 1 |
| 4. Travel limited to taxi or automobile with assistance of another. | 0 |
| 5. Does not travel at all. | 0 |

G. Responsibility for own medications

- | | |
|--|---|
| 1. Is responsible for taking medication in correct dosages at correct time. | 1 |
| 2. Takes responsibility if medication is prepared in advance in separate dosage. | 0 |
| 3. Is not capable of dispensing own medication. | 0 |

H. Ability to Handle Finances

- | | |
|---|---|
| 1. Manages financial matters independently (budgets, writes checks, pays rent, bills goes to bank), collects and keeps track of income. | 1 |
| 2. Manages day-to-day purchases, but needs help with banking, major purchases, etc. | 1 |
| 3. Incapable if handling money. | 0 |

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Prodotti LTCI

Tipi di prodotti LTCI con beneficio predefinito

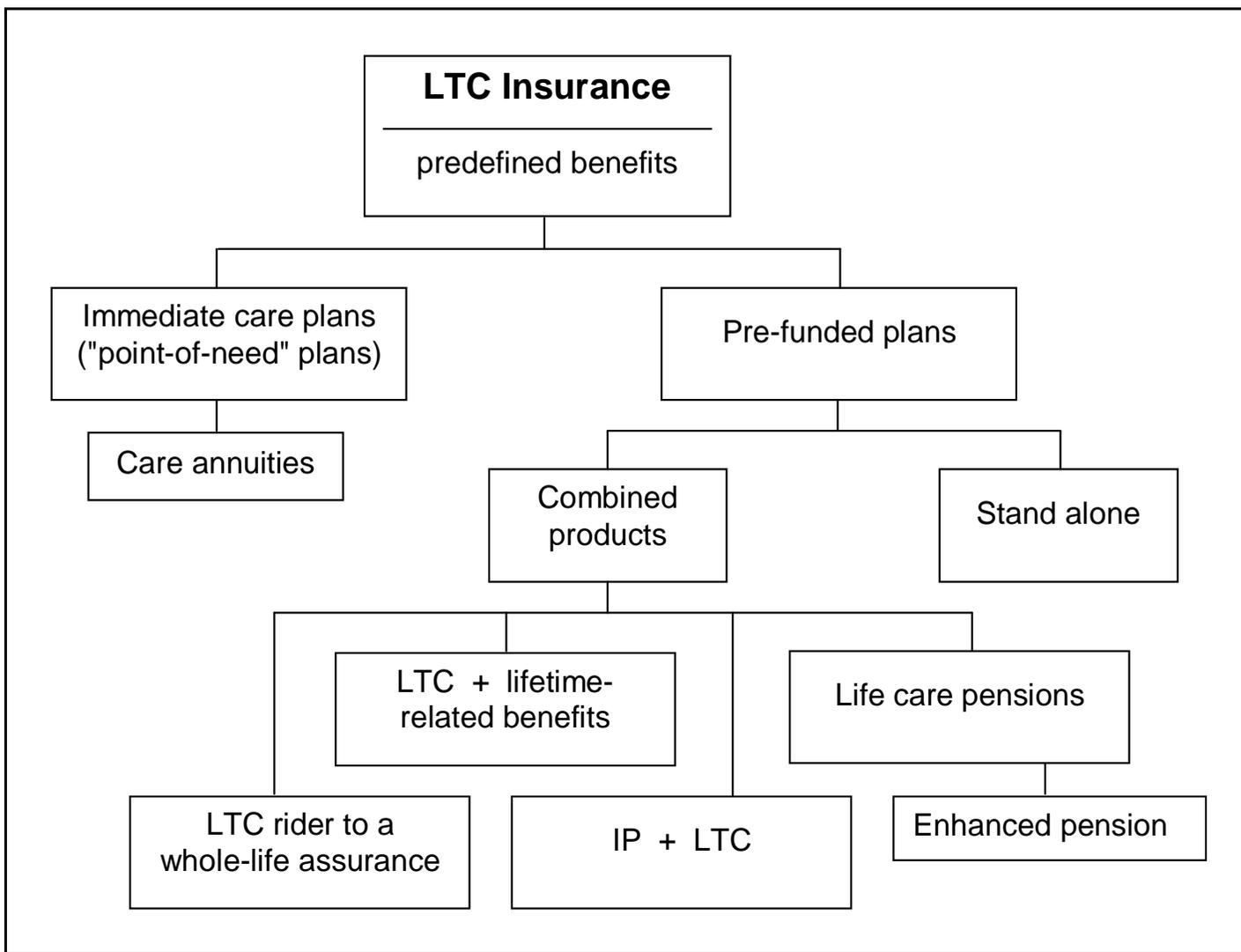
Pre-funded plans

- ▷ periodo di accumulazione \Rightarrow pagamento di premi periodici fino a età stabilita (o fino a ingresso nello stato LTC)
- ▷ l'accumulazione può ridursi a un premio unico, pagato da assicurato non invalido LTC
- ▷ periodo di decumulazione \Rightarrow (possibile) pagamento di benefici, solitamente in forma di rendita vitalizia

Immediate care plans

- ▷ pagamento di un premio unico (assicurato invalido LTC)
- ▷ pagamento immediato del beneficio, solitamente in forma di rendita vitalizia

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Prodotti assicurativi LTC con benefici predefiniti

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Immediate care plans \Rightarrow *Care annuities*

Prodotti acquistati da o per persone già in stato LTC

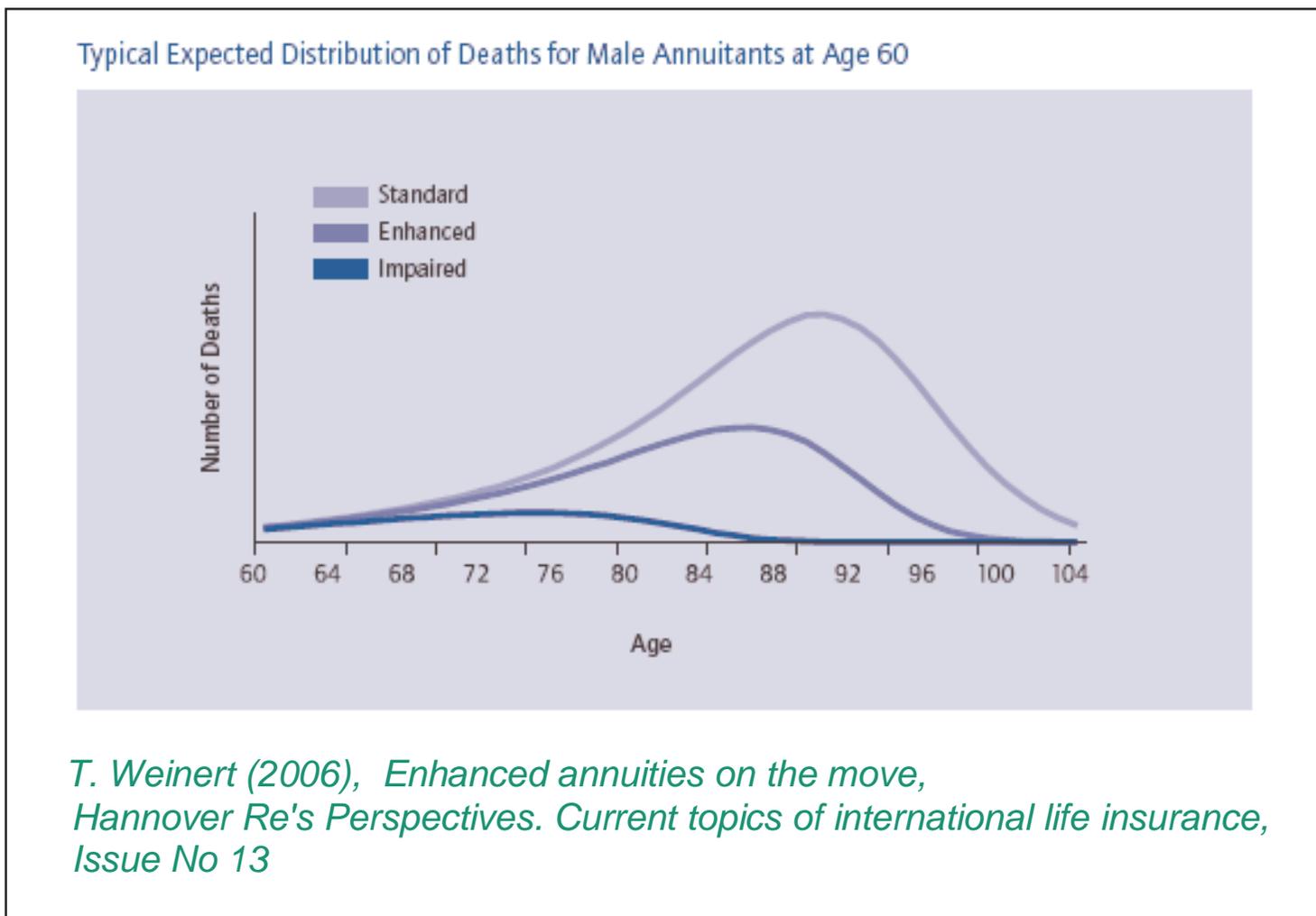
Appartengono alla categoria delle *special rate annuities*, data l'ipotesi di mortalità aggravata (vedi Figura), dette anche *underwritten annuities* per la necessità di una fase di underwriting nella quale si accerta lo stato di salute della persona

Altre *special rate annuities* (in ordine di sovrarmortalità crescente):

- ▷ life-style annuities
- ▷ enhanced annuities
- ▷ impaired-life annuities

(vedi: Rendite vitalizie)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Mortalità aggravata in impaired-life annuities e enhanced annuities

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

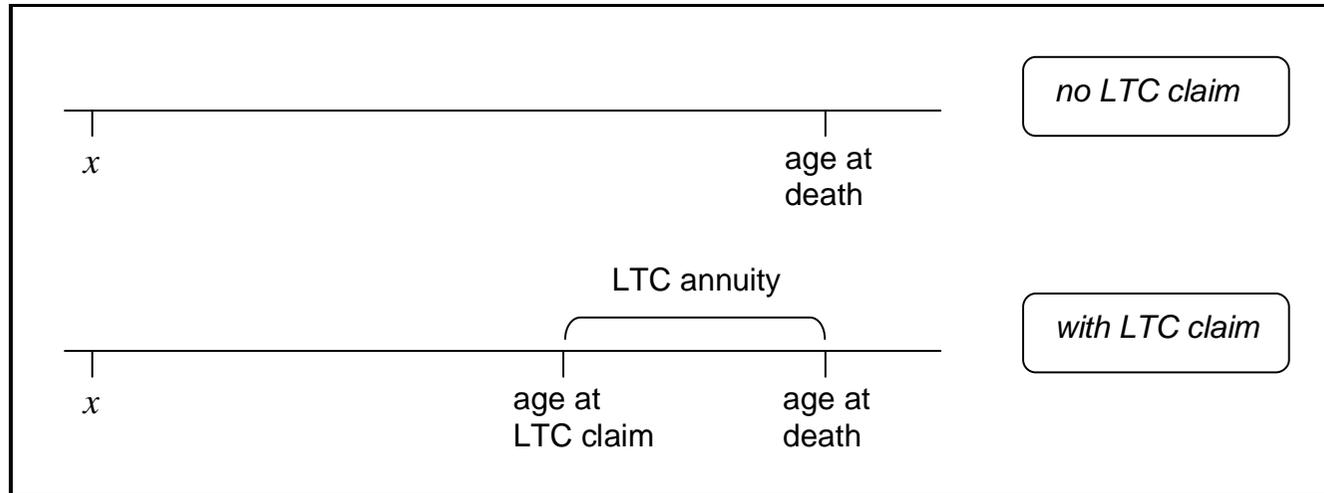
Pre-funded plans consistono si articolano in:

- ▷ fase di accumulazione, durante la quale si pagano premi
- ▷ fase di decumulazione, durante la quale sono pagati benefici LTC, solitamente in forma di rendita vitalizia (in caso di non autosufficienza) ed eventuali altri benefici

Diversi prodotti appartengono alla categoria dei pre-funded plans

- *Assicurazione LTC autonoma (Stand alone)*
 - ▷ beneficio: rendita vitalizia (eventualmente in funzione di ADL)
 - ▷ premi: premio unico, premi vitalizi temporanei, premi vitalizi illimitati
 - ▷ interruzione dei premi all'ingresso in LTC
 - ▷ nessun beneficio in assenza di bisogno LTC ⇒ prodotto assicurativo di puro “rischio”

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



LTC autonoma: possibili risultati

- *Prodotti combinati* \Rightarrow benefici LTC combinati con benefici sulla durata di vita (esempio: rendita vitalizia standard)

Scopo: ridurre il peso della “componente rischio”
aggiungendo elementi “di risparmio”

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

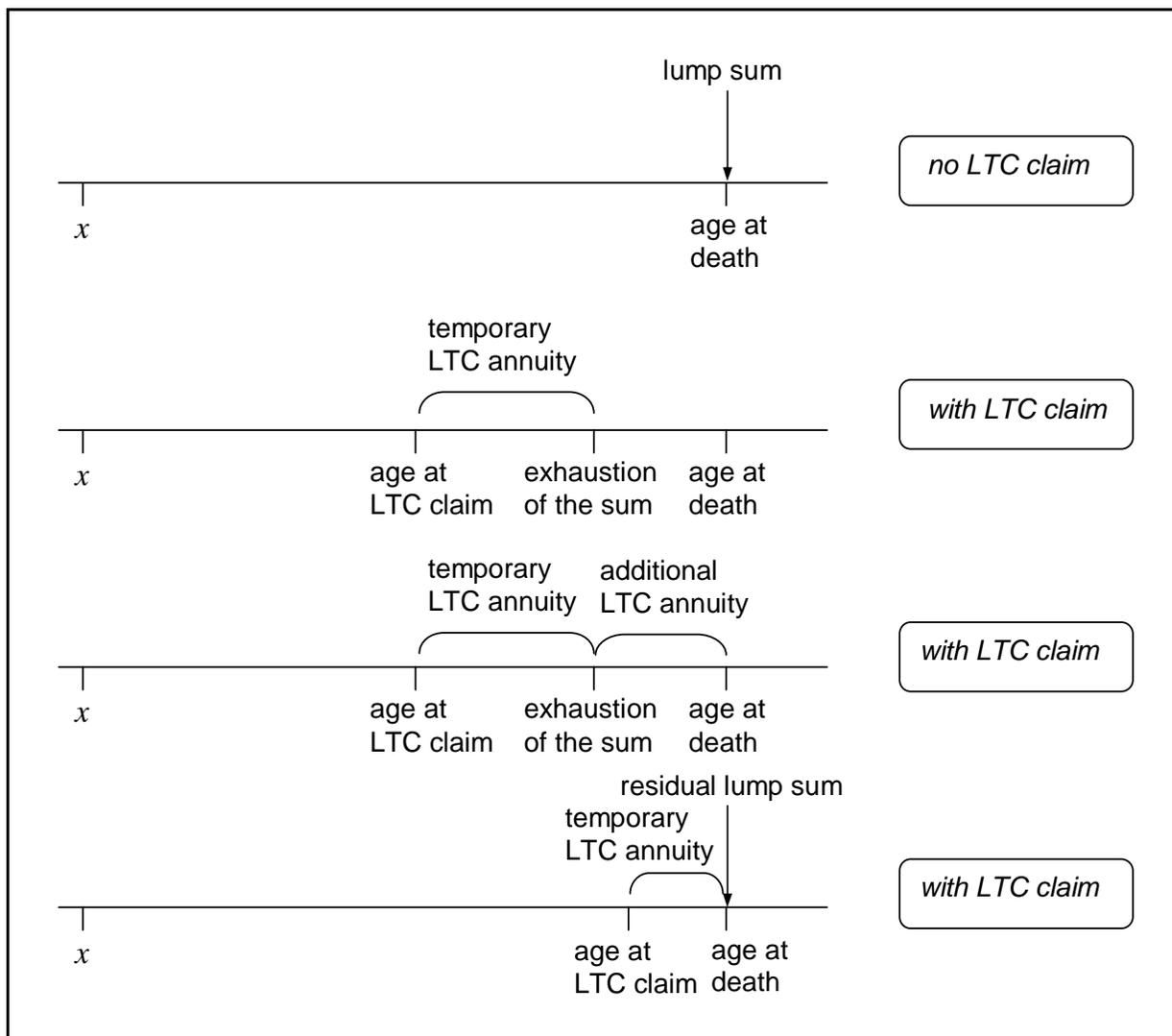
- ▷ *Copertura LTC come assicurazione complementare di assicurazione caso morte a vita intera*
 - beneficio “anticipativo”: un'assegnata aliquota del capitale assicurato pagata come rendita \Rightarrow beneficio LTC dato da:

$$\text{beneficio annuale} = \frac{\text{capitale assicurato}}{r}$$

pagabile per r anni al max

- eventuale capitale residuo pagato al decesso
- eventuale possibilità di prosecuzione della rendita LTC dopo esaurimento del capitale (\Rightarrow incremento di premio)
- presenza del beneficio anticipativo LTC \Rightarrow disincentivo al riscatto

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



LTC come beneficio anticipativo in una assicurazione a vita intera: possibili risultati

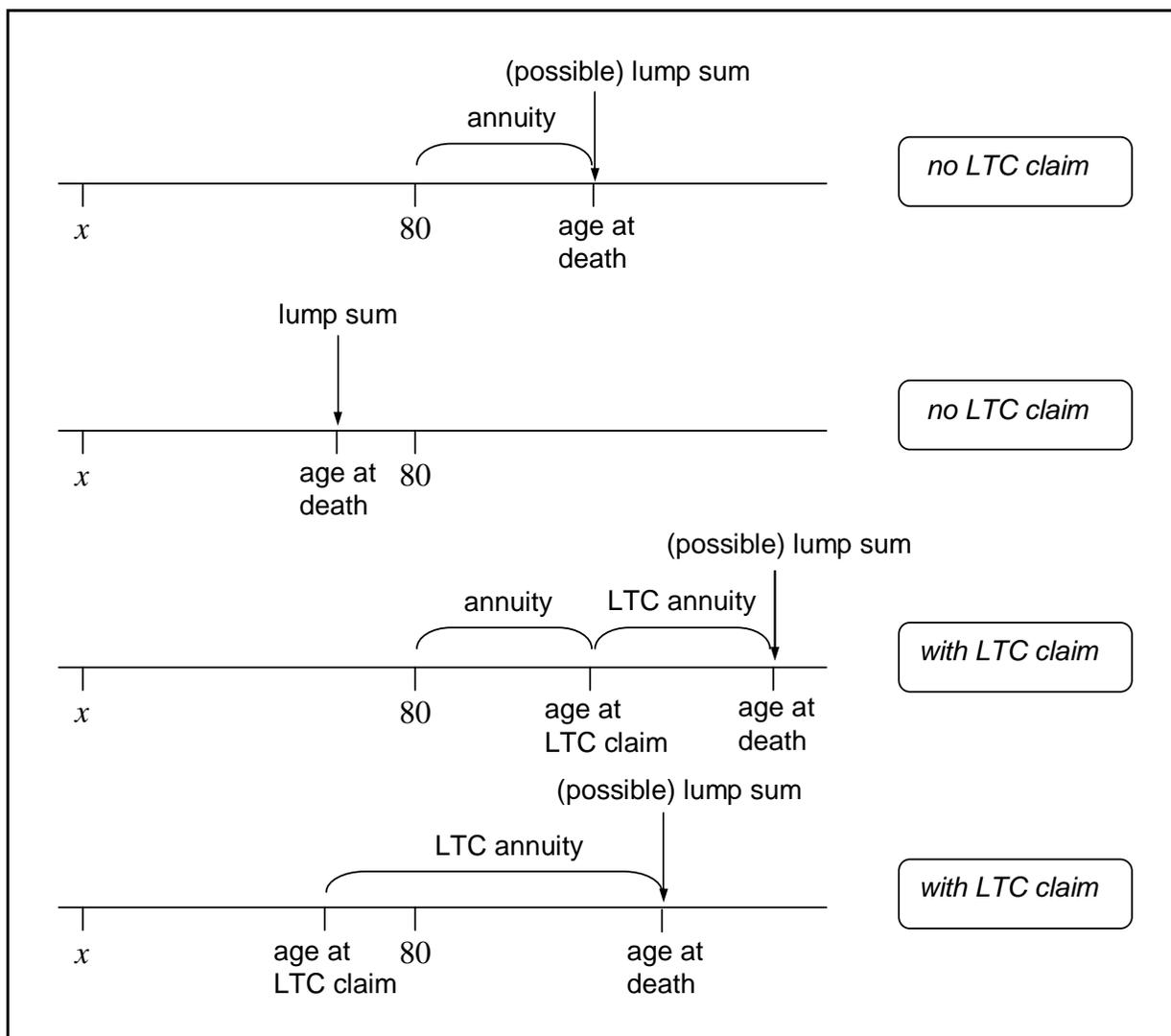
I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

- ▷ *Pacchetto assicurativo*: LTC + benefici dipendenti dalla durata di vita (caso morte, rendita vitalizia); struttura usuale:
 - (1) rendita LTC
 - (2) rendita vitalizia differita (ad es. dall'età 80), mentre l'assicurato non è nello stato LTC (benefici (1) e (2) mutuamente escludentisi)
 - (3) beneficio (capitale) caso morte
 - (a) uguale alla differenza (se positiva) tra importo prefissato e totale rate pagate sub (1) e (2)
 - (b) capitale prefissato, indipendente dalle rate pagate

Vedi Figura

“Certezza” di beneficio \Rightarrow costo elevato
- ▷ *Copertura IP+LTC*
 - Income Protection durante il periodo di attività lavorativa
 - Long Term Care dopo il pensionamento

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



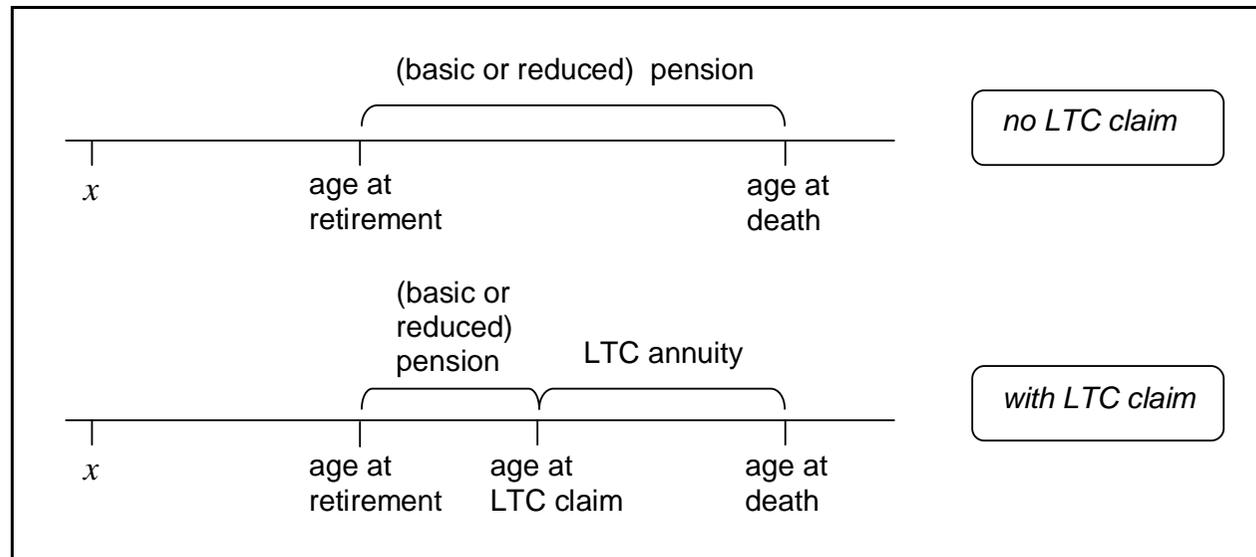
Pacchetto comprendente LTC e altri benefici sulla durata di vita: possibili risultati

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

▷ *Life care pensions*

- prodotti di rendita vitalizia in cui il beneficio LTC è definito in termini di incremento di importo rispetto al beneficio base
- pagamento del beneficio base b , successivamente possibile pagamento beneficio incrementato $b^{(i)}$
- possibile incremento finanziato da un premio maggiore di quello richiesto dal solo beneficio base
- *Enhanced pension*: particolare prodotto previdenziale del tipo Life care pension, in cui l'incremento è finanziato da una riduzione (rispetto alla pensione base b) del beneficio pagato mentre l'assicurato non è nello stato LTC, quindi:
 - pagamento del beneficio ridotto $b^{(a)}$, successivamente possibile pagamento del beneficio incrementato $b^{(i)}$
 - possibili problemi di antiselezione nei soggetti che scelgono (opzione) la enhanced pension in luogo della pensione standard b

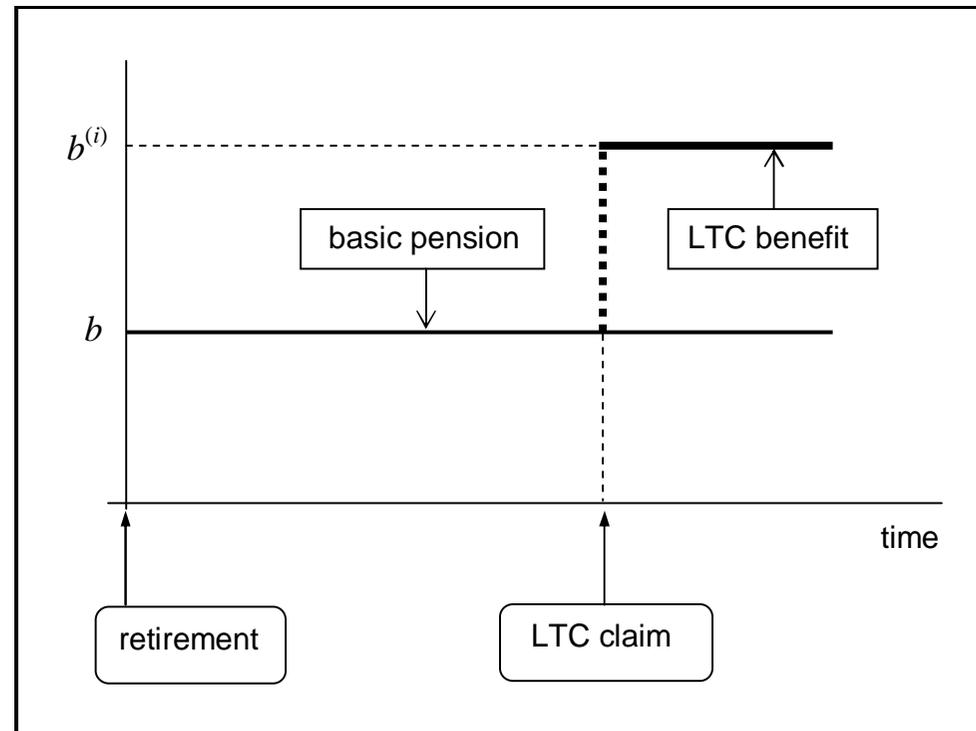
I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Life care pension e enhanced pension: possibili risultati

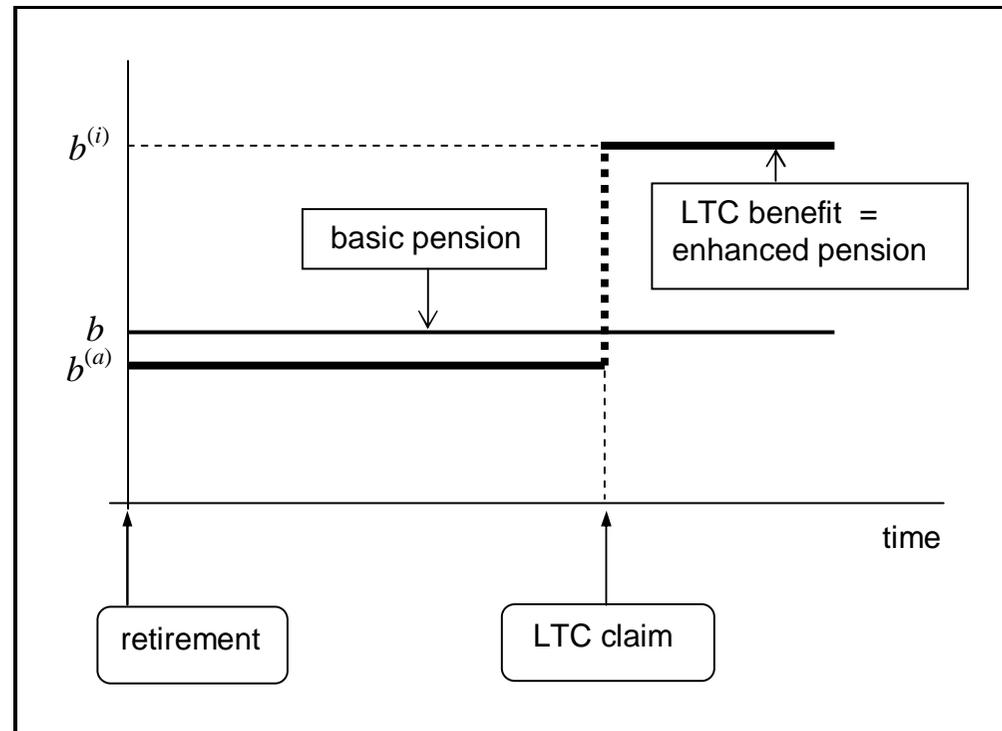
Benefici b , $b^{[a]}$, $b^{[i]}$: vedi figure seguenti

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Benefici in un prodotto “Life Care Pension”

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Benefici in un prodotto “Enhanced Pension”

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Tipi di prodotti LTC con benefici di rimborso spese

- *Copertura LTC autonoma (stand alone)*
 - ▷ beneficio: rimborso delle spese connesse con bisogno LTC (assistenza in istituto, assistenza domiciliare, terapie e riabilitazione)
 - ▷ usuali limitazioni sul tipo di spesa
 - ▷ usuali franchigia e/o aliquota di scoperto, massimale
- *Copertura LTC complementare di un'assicurazione malattia*
 - ▷ assicurazione a vita intera
 - ▷ ampliamento della gamma di spese rimborsabili (es. spese di ricovero in case di cura)
 - ▷ diaria in caso di assistenza domiciliare con spese non documentabili

11.3 Un modello generale

In generale, dato il premio unico Π , benefici dipendono dallo stato di salute dell'assicurato nel tempo

Sia $H(t)$ lo stato di salute al tempo t , risultante da accertamento medico, espresso per esempio da ADL o IADL nel caso di prodotti LTC

In particolare, $H(0) =$ stato di salute all'emissione della polizza

Per $t > 0$: stato di salute $H(t)$ aleatorio

Sia $b(t)$ il beneficio pagabile al tempo t , eventualmente aleatorio a seconda del modello di linking

In una *rendita vitalizia (standard)*:

$$b(t) = b = f(\Pi) = \frac{\Pi}{a_x} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

\Rightarrow beneficio deterministico, stato di salute non esplicitamente considerato ma supposto molto buono

Sia il beneficio definito come segue:

$$b(t) = b = \phi(\Pi, H(0)) \quad \text{per } t = 1, 2, \dots$$

\Rightarrow beneficio deterministico \Rightarrow link statico, esempio: *rendite vitalizie special rate*

Scopo:

$$\phi(\Pi, H(0)) > f(\Pi)$$

Sia il beneficio definito come segue:

$$b(t) = \psi(\Pi, H(t)) \quad \text{per } t = t_1, t_2, \dots$$

con t_1, t_2, \dots definiti dalle condizioni di polizza \Rightarrow link dinamico

\Rightarrow benefici futuri aleatori

Vedi esempi seguenti

Assicurazione LTC stand-alone, con beneficio in funzione della gravità dello stato LTC:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } H(t) = \text{buono} \\ b^{(1)} & \text{se } H(t) = \text{grave} \\ b^{(2)} & \text{se } H(t) = \text{molto grave} \end{cases}$$

con $b^{(2)} > b^{(1)}$

Assicurazione a vita intera con beneficio LTC anticipativo:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } H(t) = \text{buono} \cup (t > \tau + s) \\ \frac{C}{s} & \text{se } H(t) = \text{grave} \cap (\tau < t \leq \tau + s) \end{cases}$$

dove:

- ▷ C = somma assicurata
- ▷ τ = tempo di ingresso nello stato LTC
- ▷ s = numero max di anni di pagamento della rendita

Life care pension:

$$b(t) = \begin{cases} b' & \text{se } H(t) = \text{buono} \\ b'' & \text{se } H(t) = \text{grave} \end{cases}$$

dove:

- ▷ b' = beneficio base (o ridotto)
- ▷ b'' = beneficio incrementato nello stato LTC

Rendita LTC combinata con rendita old-age:

$$b(t) = \begin{cases} b' & \text{se } H(t) = \text{buono} \cap (t \geq t^*) \\ b'' & \text{se } H(t) = \text{grave} \end{cases}$$

dove:

- ▷ b' = beneficio della rendita old-age, pagabile dal tempo t^* se l'assicurato non è nello stato LTC
- ▷ b'' = beneficio della rendita LTC

Rendita vitalizia “doubly enhanced”:

$$b(t) = \Phi(\Pi, H(0), H(t))$$

- accertamento medico all'emissione per determinare $H(0)$
⇒ rendita special rate
- evoluzione dello stato di salute ⇒ sequenza $\{H(t)\}$ per $t > 0$

ASSICURAZIONI CRITICAL ILLNESS

Pagamento di capitale prefissato se l'assicurato è colpito da malattia grave (appartenente ad un fissato elenco)

Beneficio predefinito (non rimborso spese)

Tipologia

- “stand alone”
- complementare di assicurazione vita con capitale caso morte
 - ▷ anticipativa (cioè “acceleration benefit”)
 - ▷ aggiuntiva

ALTRI PRODOTTI ASSICURATIVI A COPERTURA LIMITATA

L'assicurazione Critical Illness non va confusa con assicurazioni malattia aventi ambito di copertura molto ristretto, definito mediante elencazione (anziché mediante esclusioni)

Esempi:

- polizza grandi interventi chirurgici
 - ▷ beneficio = rimborso spese mediche, limitatamente a importanti interventi chirurgici
- copertura assicurativa contro i tumori
 - ▷ beneficio = rimborso spese mediche (chirurgia, terapie, ecc.) limitatamente a malattie oncologiche

BENEFICI ASSICURATIVI “COMBINATI”

Vari abbinamenti di

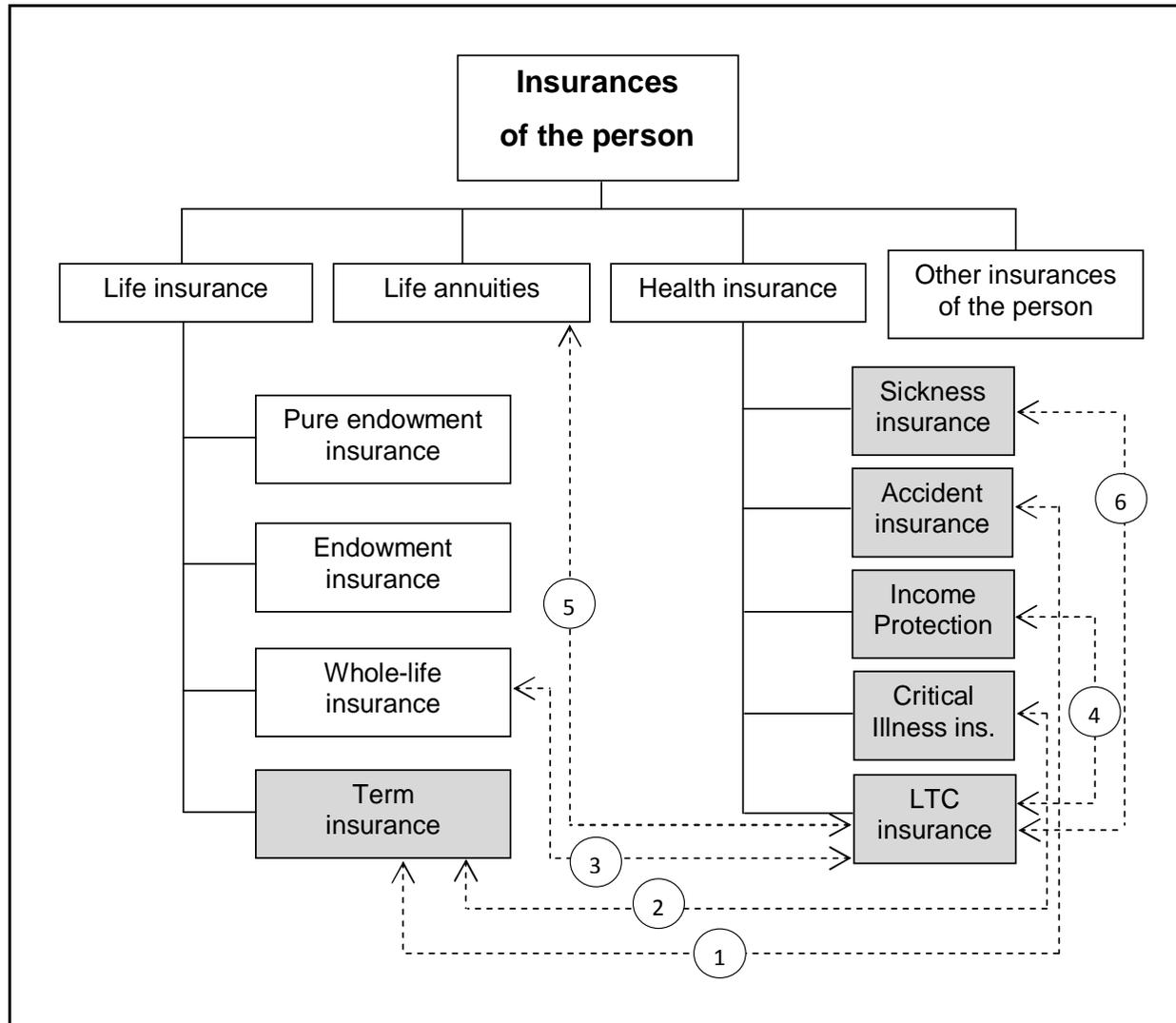
- assicurazioni sulla durata di vita
 - rendite vitalizie
 - assicurazioni caso morte
- assicurazioni sulla salute

Scopi:

- ▷ ridurre il costo e quindi i caricamenti per spese di acquisizione e di gestione
- ▷ in alcuni abbinamenti \Rightarrow ridurre la componente “rischio” (tipica delle assicurazioni sulla salute) mediante abbinamento con componente “risparmio” (esempi: assicurazione a vita intera, rendita vitalizia)

Esempi: vedi Figura seguente

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Combinazioni di benefici sulla durata di vita e sulla salute

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Assicurazioni sulla salute come complementari di assicurazioni sulla durata di vita

Abbinamento consistente in

- assicurazione principale: assicurazione sulla durata di vita
⇒ frazione maggiore del premio
- assicurazione complementare: assicurazione sulla salute

Tipi di coperture

- “invalidità come decesso”
 - ▷ corresponsione del capitale caso morte al verificarsi di invalidità totale e permanente
- “esonero premi”
 - ▷ polizza vita affrancata dal pagamento premi in caso di invalidità totale e permanente

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

- rendita di invalidità totale e permanente
 - ▷ rendita corrisposta fino a scadenza contrattuale o vitalizia non limitata
 - ▷ rata = aliquota del capitale assicurato
- sospensione premi per interruzione dell'attività lavorativa
 - ▷ causa dell'interruzione: malattia o fattori esterni
- beneficio operazioni chirurgiche (BOC)
 - ▷ anticipo della somma assicurata (nei limiti della “somma ridotta” o del “valore di riscatto”) al fine di sostenere spese chirurgiche

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

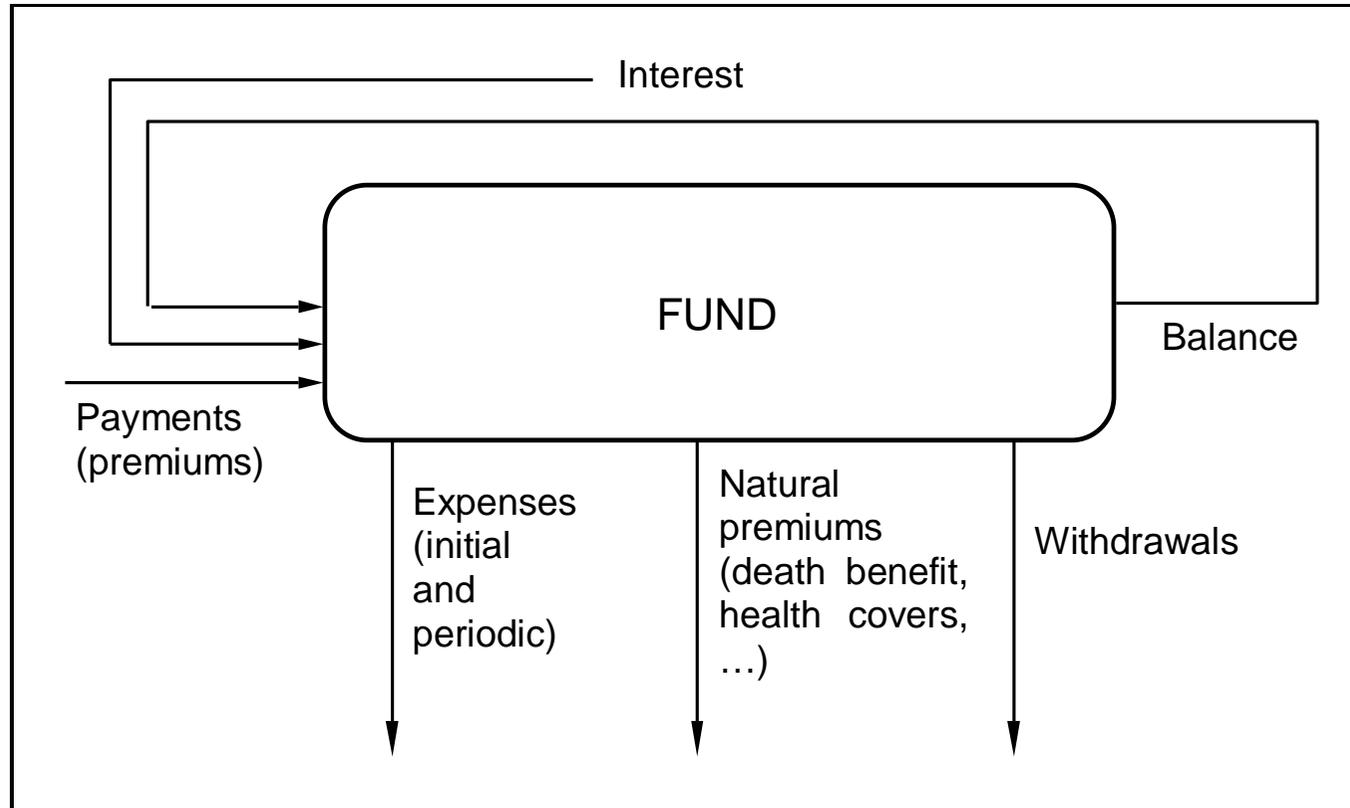
Pacchetti assicurativi

Prodotti assicurativi che combinano diversi benefici senza “prevalenza” di un tipo di beneficio

Esempi:

- ▷ assicurazioni LTC combinate con assicurazioni sulla durata di vita
- ▷ assicurazioni Universal Life (vedi Figura seguente)

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)



Finanziamento di assicurazioni sulla salute in un prodotto Universal Life

ASSICURAZIONI COLLETTIVE

Molti prodotti dell'“area salute” possono essere strutturati e commercializzati per collettività

Forniscono coperture assicurative a un definito gruppo di persone (tipicamente dipendenti di un'azienda, con possibile estensione ai familiari)

Benefici usuali:

- rimborso spese mediche (eventualmente esteso ai familiari)
- income protection

L'assicurazione può essere

- ▷ obbligatoria \Rightarrow tutti i dipendenti sono assicurati \Rightarrow evita anti-selezione
- ▷ volontaria \Rightarrow i dipendenti possono decidere di entrare nel gruppo assicurato \Rightarrow processo di selezione dei rischi

I prodotti assicurativi dell'“area salute” (cont.)

Le assicurazioni collettive sulla salute a favore di dipendenti si collocano nell'ambito degli *employee benefit plans*

Benefici di un employee benefit plan (oltre allo stipendio):

- beneficio caso morte (limitatamente al periodo di attività lavorativa)
- pensione
- assicurazioni sulla salute

4 INTRODUZIONE AI MODELLI ATTUARIALI: COMPONENTI TECNICHE “VITA” E “DANNI”

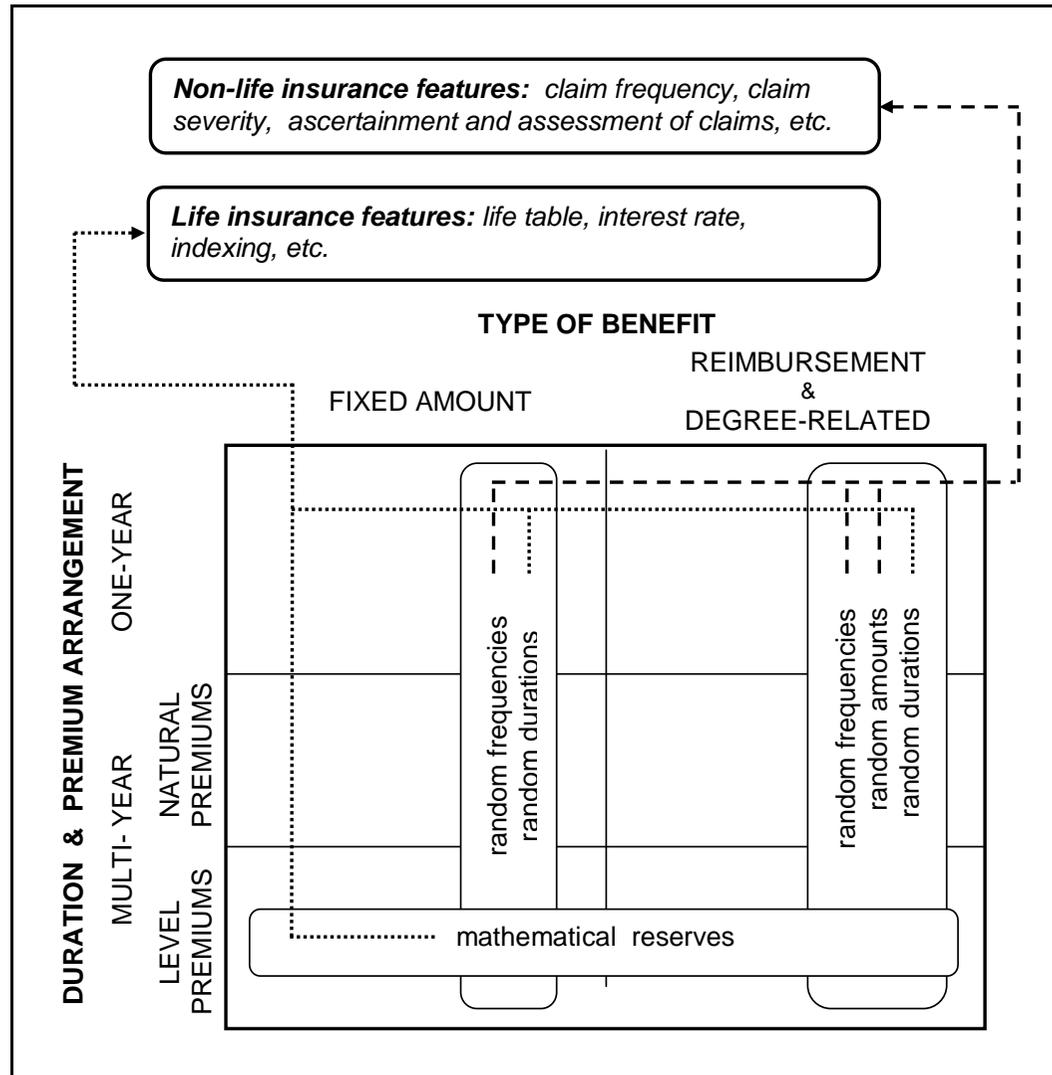
Aspetti delle **assicurazioni vita**:

- durata pluriennale \Rightarrow rilievo del fattore tempo \Rightarrow aspetti finanziari
 - ▷ sfasamento temporale tra incasso premi e pagamento benefici
 - \Rightarrow formazione di riserve \Rightarrow problemi di investimento
- aleatorietà collegata alla durata di vita

Aspetti delle **assicurazioni contro i danni**:

- durata solitamente monoannuale (o più breve) \Rightarrow scarsa importanza del fattore tempo
- aleatorietà di
 - ▷ numero
 - ▷ importodei sinistri

Introduzione ai modelli attuariali ... (cont.)



Componenti tecnico-attuariali nei prodotti assicurativi dell'area "salute"

5 MODELLI ATTUARIALI PER LE ASSICURAZIONI MALATTIA

COPERTURE ASSICURATIVE MONOANNUALI

Prodotti

1. Rimborso spese mediche
2. Diaria durante ricovero ospedaliero
3. Diaria per invalidità di breve termine

Aspetti generali

- Numero aleatorio N di sinistri del generico assicurato ($N = 0, 1, \dots$)
- Beneficio pagato dall'assicuratore: Y_j per il sinistro j
- Pagamento totale nell'anno: S

$$S = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

- *Calcolo del premio*: principio di equità
- Premio netto (cioè esclusi caricamenti per spese)

$$II = \mathbb{E}[S]$$

o (per tener conto approx dei tempi di pagamento)

$$II = \mathbb{E}[S] (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

dove i = tasso di interesse

- Ipotesi (realistiche ?)
 - ▷ per ogni $N = n$, indipendenza stocastica e uguale distribuzione di prob. per le variabili aleatorie (v.a.) Y_1, Y_2, \dots, Y_n
 - ▷ indipendenza stocastica delle v.a. N, Y_1, Y_2, \dots
- Ipotesi \Rightarrow fattorizzazione:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[N]$$

con Y v.a. distribuita come le Y_j

Stime statistiche

- Stimare le quantità $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[N]$ (base tecnica)
- Ipotesi: rischi “analoghi”, in termini di importi (max importo di beneficio) e tempo di esposizione
- Portafoglio di contratti di *rimborso spese mediche*
 - ▷ dati
 - r = numero di rischi assicurati (contratti)
 - z = numero di sinistri nel portafoglio
 - y_1, y_2, \dots, y_z = importi pagati
 - ▷ importo di sinistro per contratto

$$Q = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_z}{r}$$

detto anche “premio statistico”

Posto $\Pi = Q \Rightarrow$ assicuratore in equilibrio tecnico

Q fornisce stima di $\mathbb{E}[S]$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

- ▷ numero medio di sinistri per contratto (indice di “frequenza di sinistro”)

$$\bar{n} = \frac{z}{r}$$

- ▷ importo medio per sinistro

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_z}{z}$$

- ▷ quindi:

$$Q = \bar{y} \bar{n}$$

- ▷ stime: $\bar{n} \rightarrow \mathbb{E}[N]$, $\bar{y} \rightarrow \mathbb{E}[Y]$

- ▷ premio

$$II = \bar{y} \bar{n} (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

- Portafoglio di contratti di *diaria per ricovero ospedaliero*

- ▷ dati

- r = numero di rischi assicurati

- z = numero di sinistri nel portafoglio

- d_1, d_2, \dots, d_z = durate dei sinistri in giorni

- b = beneficio giornaliero (= per tutti i contratti)

- ▷ importo di sinistro per contratto

$$Q = b \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_z}{r}$$

- ▷ durata media di sinistro per contratto (*coefficiente di morbilità*)

$$\mu = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_z}{r}$$

- ▷ durata media per sinistro

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_z}{z}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

▷ pertanto:

$$\mu = \bar{d} \bar{n}$$

e quindi:

$$Q = b \mu = b \bar{d} \bar{n}$$

▷ stime: $\bar{n} \rightarrow \mathbb{E}[N]$, $\bar{d} \rightarrow \mathbb{E}[Y]$ (per $b = 1$)

▷ premio:

$$H = b \bar{d} \bar{n} (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

- Impostazione più generale (e realistica) \Rightarrow tenere conto di:
 - ▷ ammontare esposto al rischio nel caso di rimborso spese mediche (max importo annuo)
 - ▷ tempo di esposizione (in 1 anno di osservazione)

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Fattori di rischio

Suddividere una popolazione in classi di rischio, secondo i valori assunti da fattori di rischio

Fattori di rischio

- oggettivi: caratteristiche fisiche dell'assicurato (età, sesso, storia sanitaria, professione)
- soggettivi: atteggiamento personale nei confronti della salute
⇒ domanda individuale di trattamenti medici e quindi richiesta di benefici assicurativi

Rilievo dell'età: vedi Tabella seguente

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Esempio

x	$100 \bar{n}_x$	x	$100 \bar{n}_x$
15 – 19	6.54	45 – 49	11.17
20 – 24	7.13	50 – 54	12.35
25 – 29	5.72	55 – 59	18.71
30 – 34	5.71	60 – 64	19.62
35 – 39	6.23	65 – 69	24.90
40 – 44	10.03		
$100 \bar{n} = 10.48$			

*Numero medio di sinistri per contratto in funzione dell'età;
maschi (Fonte: ISTAT); \bar{n} = media generale*

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Premi

- Età come fattore di rischio \Rightarrow distribuzione di prob. della v.a. S dipendente dall'età
- In particolare: stime $\bar{y}_x, \bar{n}_x, \bar{d}_x$ funzioni dell'età x
- Premi netti:

$$\Pi_x = \bar{y}_x \bar{n}_x (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_x = b \bar{d}_x \bar{n}_x (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

o, considerando solo il numero medio di sinistri in funzione dell'età:

$$\Pi_x = \bar{y} \bar{n}_x (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_x = b \bar{d} \bar{n}_x (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

- Modello “moltiplicativo”

- ▷ Si assuma:

$$\bar{n}_x = \bar{n} t_x$$

$$\bar{y}_x = \bar{y} u_x$$

$$\bar{d}_x = \bar{d} v_x$$

dove

- quantità $\bar{n}, \bar{y}, \bar{d}$ indipendenti dall'età
- coefficienti t_x, u_x, v_x esprimono l'effetto specifico dell'età (*coefficienti di senescenza*)
- ▷ Interesse pratico: assumendo che l'effetto specifico dell'età non vari nel tempo, il monitoraggio dei sinistri può essere limitato alle quantità $\bar{n}, \bar{y}, \bar{d}$ osservate sull'intero portfoglio
⇒ stime più affidabili

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Esempio

Diaria ($b = 100$)

Ipotesi (dati ISTAT, perequati da ANIA):

$$\bar{n}_x = \underbrace{0.1048}_{\bar{n}} \times \underbrace{0.272859 \times e^{0.029841 x}}_{t_x}$$

$$\bar{d}_x = \underbrace{10.91}_{\bar{d}} \times \underbrace{0.655419 \times e^{0.008796 x}}_{v_x}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

x	\bar{n}_x	\bar{d}_x	Π_x
30	0.07000	9.30991	64.53
35	0.08126	9.72849	78.28
40	0.09434	10.16590	94.96
45	0.10952	10.62298	115.20
50	0.12714	11.10060	139.74
55	0.14760	11.59970	169.53
60	0.17135	12.12124	205.65
65	0.19892	12.66623	249.48
70	0.23093	13.23572	302.64

*Numero medio di sinistri per contratto,
durata media (giorni) per sinistro,
premio netto*

COPERTURE ASSICURATIVE PLURIENNALI

Premi

Assicurazione di rimborso spese mediche o di diaria

Età x alla stipulazione del contratto, durata m anni

Premio unico:

$$\Pi_{x,m} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_h p_x (1+i)^{-h} \Pi_{x+h}$$

con ${}_h p_x$ probabilità, per una persona di età x , di essere in vita ad età $x+h$

Premi naturali: $\Pi_x, \Pi_{x+1}, \dots, \Pi_{x+m-1}$, con

$$\Pi_x < \Pi_{x+1} < \dots < \Pi_{x+m-1}$$

(vedi Tabella precedente)

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Premio unico in un modello moltiplicativo

Per esempio, se

$$\Pi_x = \bar{y}_x \bar{n}_x (1+i)^{-\frac{1}{2}} = \bar{y} \bar{n} u_x t_x (1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

allora

$$\begin{aligned} \Pi_{x,m} &= \sum_{h=0}^{m-1} {}_h p_x (1+i)^{-h} \bar{y}_{x+h} \bar{n}_{x+h} (1+i)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \underbrace{\bar{y} \bar{n}}_{K \text{ (indip. dall'età)}} \sum_{h=0}^{m-1} \underbrace{{}_h p_x (1+i)^{-h-\frac{1}{2}} u_{x+h} t_{x+h}}_{w_{x,h} \text{ (dip. dalle età } x \text{ e } x+h)} \\ &= K \sum_{h=0}^{m-1} w_{x,h} \\ &= K \pi_{x,m} \end{aligned}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Osservazione

Premi naturali \Rightarrow equilibrio tecnico su base annuale

Premio unico o premi costanti \Rightarrow equilibrio tecnico solo sulla durata totale del contratto \Rightarrow necessità di riserva

Problema: quale destinazione della riserva se l'assicurato abbandona il contratto ?

Possibili condizioni contrattuali:

- (1) l'ammontare della riserva è riconosciuto (pagato) all'assicurato
 \Rightarrow riserva *trasferibile* (per es. a un nuovo contratto di assicurazione malattia) \Rightarrow l'assicurato *riscatta* il contratto
- (2) l'ammontare della riserva è trattenuto dall'assicuratore, ed è ripartito, secondo principio di cross-subsidy, tra i contratti ancora in vigore

Caso (1) \Rightarrow la riserva costituisce un beneficio, pagato in caso di cessazione del contratto

Caso (2) \Rightarrow assumendo che la riserva sia ripartita tra i contratti ancora in vigore, il meccanismo di cross-subsidy è analogo al meccanismo di mutualità che opera in base alla mortalità degli assicurati

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Diverse strutture probabilistiche richieste nei casi (1) e (2) rispettivamente, per il calcolo dei premi e delle riserve

Caso (1) \Rightarrow usuali probabilità di sopravvivenza richiesta nei calcoli

Caso (2) \Rightarrow necessario operare con le probabilità che il contratto sia in portafoglio (assicurato in vita e non abbandono del contratto)

Non-trasferibilità della riserva (pratica comune in alcuni mercati assicurativi) ha un effetto di riduzione dei premi

Nel seguito assumeremo trasferibilità della riserva \Rightarrow usuali probabilità di sopravvivenza

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Premi annui costanti (pagabili per m anni)

$$P_{x,m} = \frac{II_{x,m}}{\ddot{a}_{x:m}}$$

cioè:

$$P_{x,m} = \frac{\sum_{h=0}^{m-1} {}_h p_x (1+i)^{-h} II_{x+h}}{\sum_{h=0}^{m-1} {}_h p_x (1+i)^{-h}}$$

Quindi: premio costante = media aritmetica ponderata dei premi naturali

Conseguenza: formazione di riserva matematica

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Esempio

Beneficio: diaria per ricovero ospedaliero

- ipotesi di mortalità: prima legge di Heligman-Pollard (con $\omega = 110$):

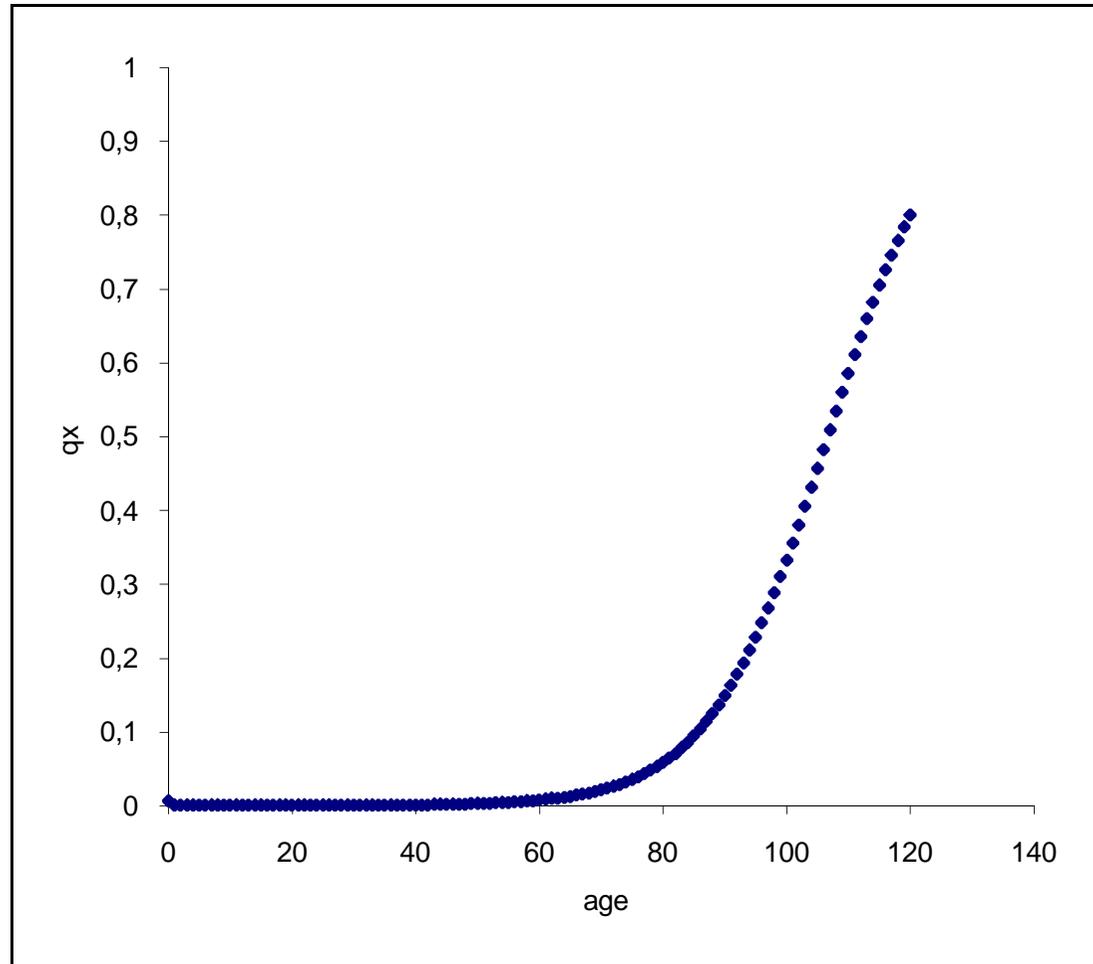
$$\frac{q_y}{1 - q_y} = A^{(y+B)^C} + D e^{-E (\ln y - \ln F)^2} + G H^y$$

parametri (\Rightarrow vedi Figure seguenti):

A	B	C	D	E	F	G	H	$\overset{\circ}{e}_0$	Lexis
0.00054	0.017	0.101	0.00013	10.72	18.67	1.464×10^{-5}	1.11	79.41	85

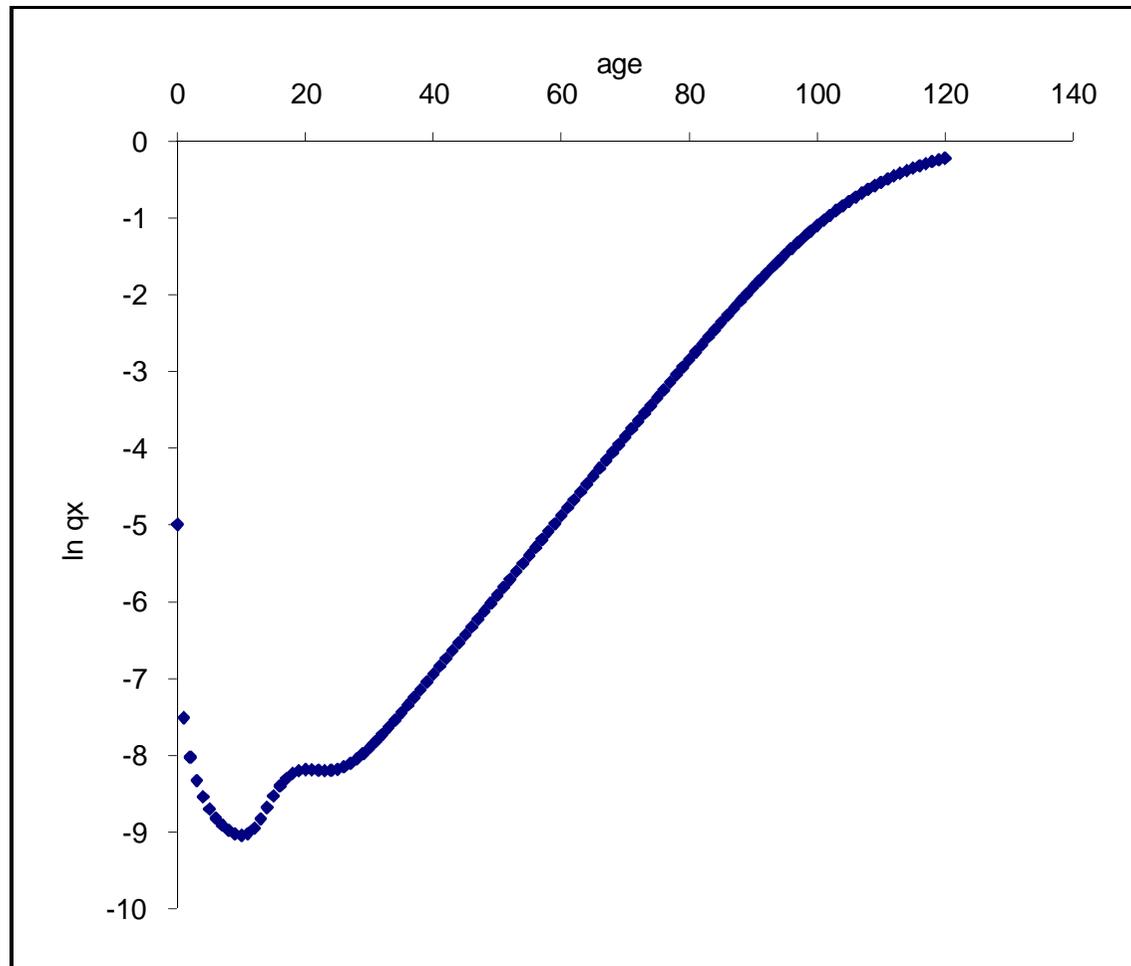
- $i = 0.02$
- $b = 100$
- \bar{n}_x, \bar{d}_x come esempio precedente
- $x + m \leq 70$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)



Prima legge di Heligman-Pollard - q_x

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)



Prima legge di Heligman-Pollard - $\ln q_x$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

x	$m = 5$	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$
30	334.86	701.78	1 103.13	1 540.82
35	406.02	850.13	1 334.46	1 859.98
40	492.11	1 028.79	1 611.12	2 237.62
45	596.11	1 242.92	1 938.80	2 676.86
50	721.35	1 497.42	2 320.53	3 172.86
55	871.42	1 795.66	2 752.71	—
60	1 049.76	2 136.79	—	—
65	1 258.68	—	—	—

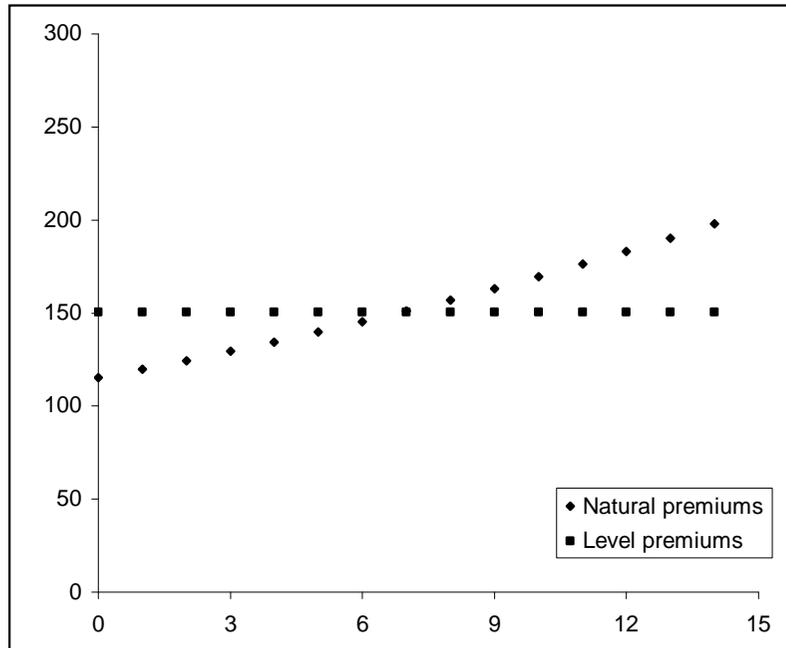
Premi unici

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

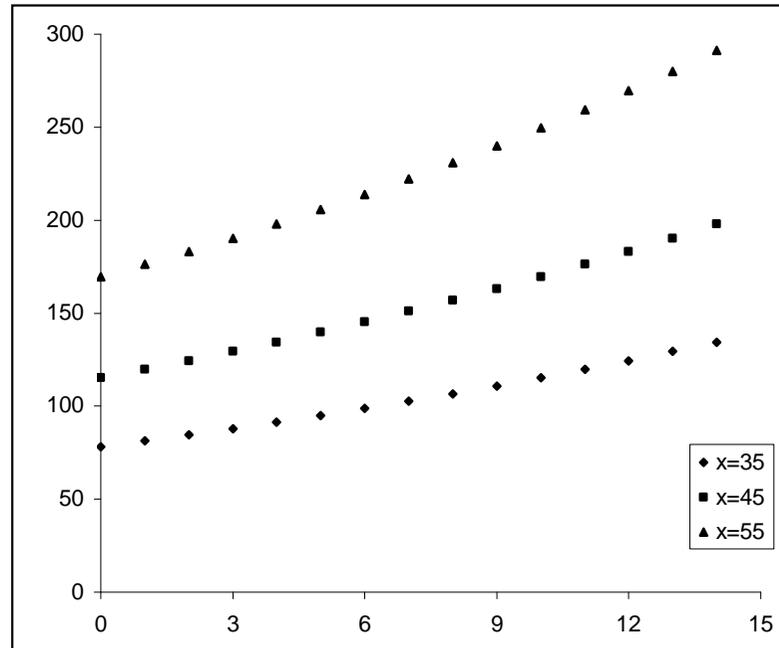
x	$m = 5$	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$
30	69.71	76.75	84.49	92.97
35	84.56	93.10	102.46	112.69
40	102.58	112.92	124.23	136.51
45	124.43	136.94	150.55	165.22
50	150.93	166.03	182.34	199.65
55	183.06	201.23	220.60	—
60	222.01	243.75	—	—
65	269.20	—	—	—

Premi annui costanti

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)



Premi naturali e premi annui costanti;
 $x = 45, m = 15$



Premi naturali per varie età x
all'ingresso; $m = 15$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Riserve

Riserva matematica prospettiva (o *riserva di senescenza*), contratto a premio annuo costante per m anni:

$$V_t = \Pi_{x+t, m-t} - P_{x, m} \ddot{a}_{x+t: m-t}; \quad t = 0, 1, \dots, m \quad (*)$$

con

$$V_0 = V_m = 0$$

Dalla (*) si trova

$$V_t = \Pi_{x+t, 1} - P_{x, m} + {}_1p_{x+t} (1+i)^{-1} (\Pi_{x+t+1, m-t-1} - P_{x, m} \ddot{a}_{x+t+1: m-t-1})$$

e, essendo $\Pi_{x+t, 1} = \Pi_{x+t}$, si ottiene la relazione ricorrente

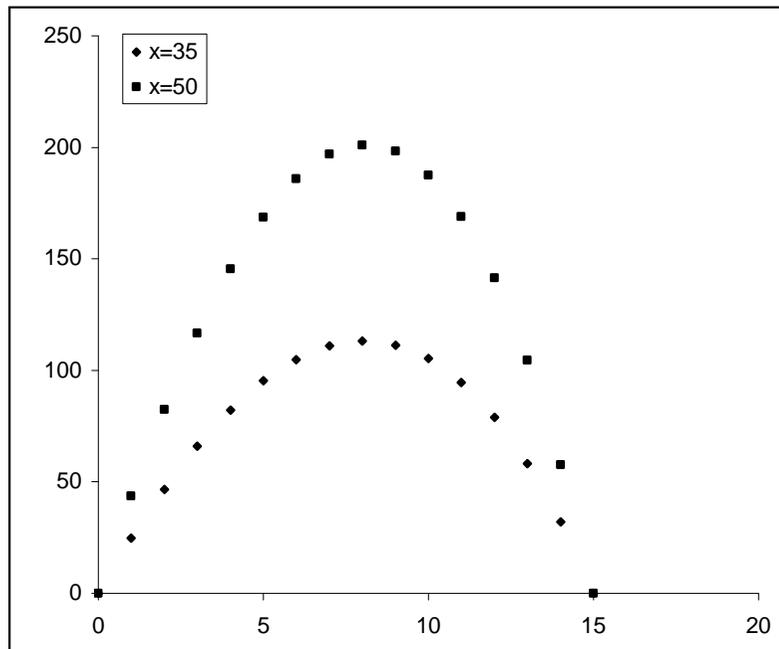
$$V_t + P_{x, m} = \Pi_{x+t} + {}_1p_{x+t} (1+i)^{-1} V_{t+1}$$

\Rightarrow equilibrio tecnico nell'anno $(t, t+1)$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

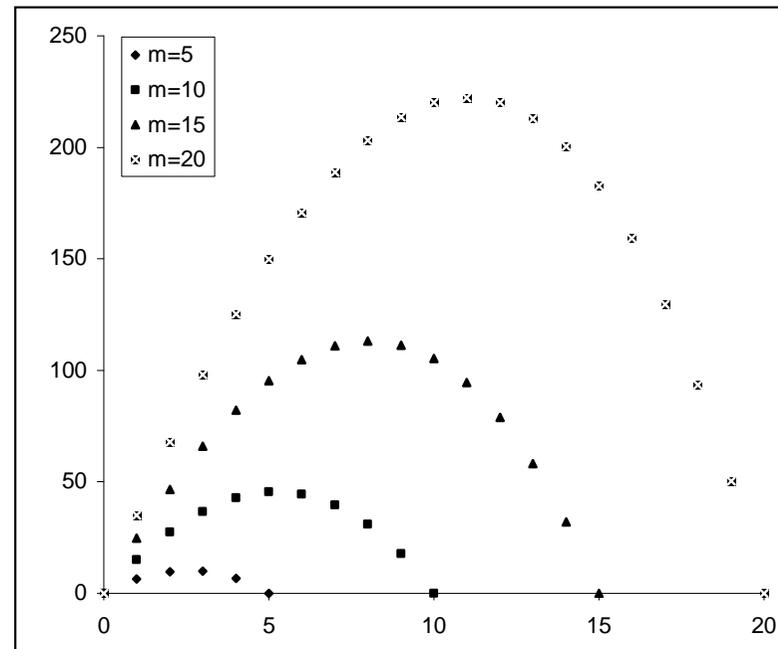
Esempio

Beneficio: diaria per ricovero ospedaliero. Dati: vedi esempio precedente



Riserve per due età all'ingresso;

$$m = 15$$



Riserve per varie durate contrattuali;

$$x = 35$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Riserve per antidurate non intere

Premi naturali

$\Pi_x, \Pi_{x+1}, \dots, \Pi_{x+m-1}$ incassati in $0, 1, \dots, m-1$

Riserva nulla in tutti gli anniversari di contratto, prima di incassare il premio $\Rightarrow V_t = 0$ per $t = 1, 2, \dots, m-1$ (e $V_0 = V_m = 0$)

Subito dopo incassato il premio, debito dell'assicuratore (e attivo corrispondente) = premio

Quindi:

$$V_{t+} = \Pi_{x+t}; \quad t = 0, 1, \dots, m-1$$

Utilizzo del premio durante l'anno (secondo il meccanismo di mutualità) e quindi $V_{t+1} = 0$

Al tempo $t+r$, con $t = 0, 1, \dots, m-1$ e $0 < r < 1$, si assuma:

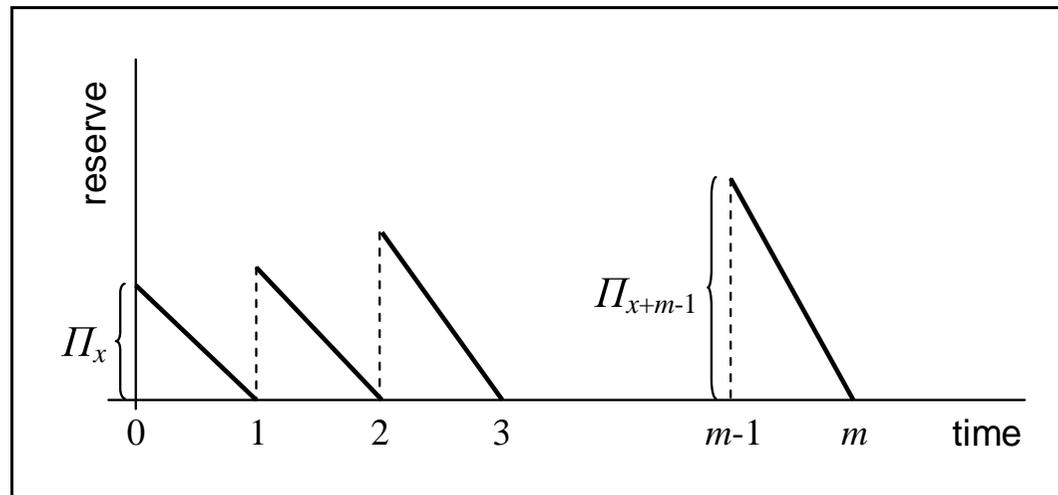
$$V_{t+r} = (1-r)V_{t+} = (1-r)\Pi_{x+t}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Vedi Figura

Osservazione

$V_{t+r} = (1 - r) \Pi_{x+t}$ è la *riserva premi* (o *unearned premium reserve*), secondo la terminologia delle assicurazioni danni



Profilo interpolato della riserva nel caso di premi naturali

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Premi annui costanti

$P_{x,m}$ incassato annualmente

Dopo incassato il premio in t , la riserva passa da V_t a

$$V_{t+} = V_t + P_{x,m}; \quad t = 0, 1, \dots, m - 1$$

In base a interpolazione lineare:

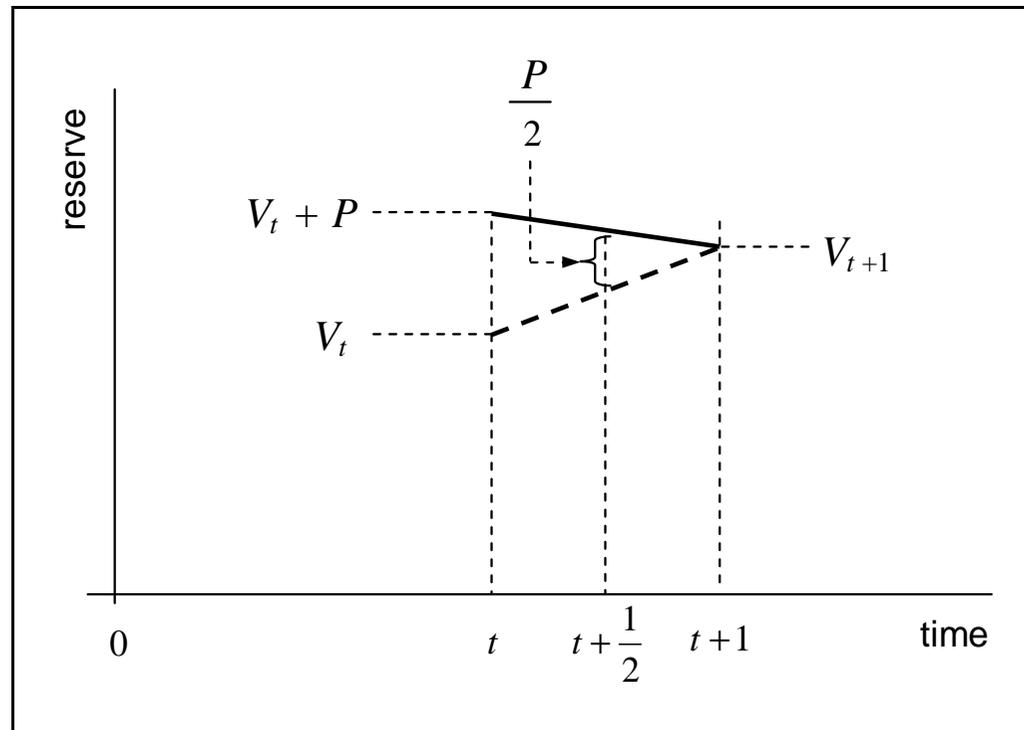
$$V_{t+r} = (1 - r) V_{t+} + r V_{t+1} = [(1 - r) V_t + r V_{t+1}] + (1 - r) P_{x,m}$$

Vedi Figura seguente

Osservazione

L'addendo $(1 - r) P_{x,m}$ rappresenta il *riporto di premio*

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)



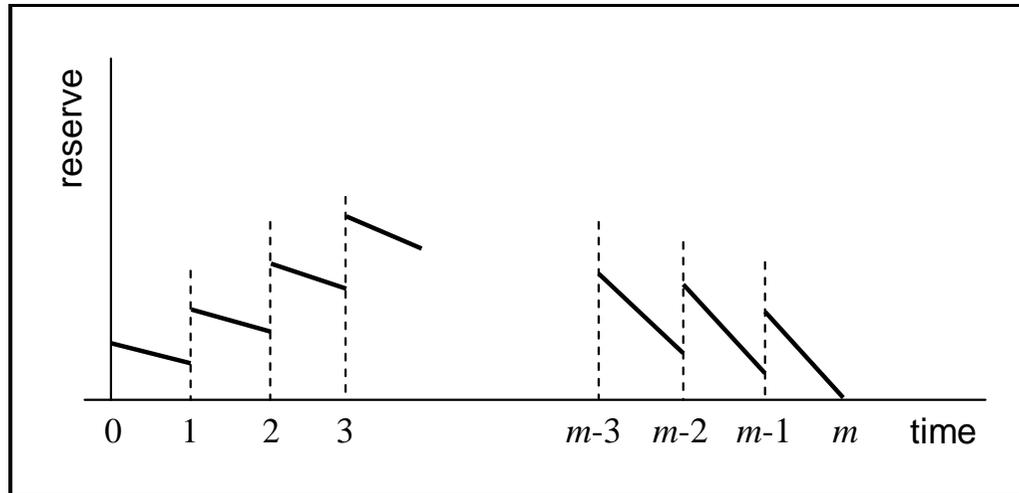
Interpolazione della riserva nel caso di premi annui costanti

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Notare i seguenti aspetti

- Interpolando tra V_t (anziché V_{t+}) e V_{t+1} causerebbe sottovalutazione della riserva in tutti gli istanti tra t e $t + 1$
- “Uso” del premio $P_{x,m}$ variabile nel tempo \Rightarrow la parte di premio impiegata per finanziare benefici secondo il meccanismo di mutualità cresce all’aumentare dell’antidurata, perché il numero atteso di sinistri (ed eventualmente l’importo atteso) cresce all’aumentare dell’età \Rightarrow profilo temporale della riserva: (vedi Figura seguente) pendenza (negativa) crescente dei segmenti interpolanti

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)



Profilo interpolato della riserva nel caso di premi annui costanti

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Premio unico

$\Pi_{x,m}$ incassato alla stipulazione del contratto

Nessuna discontinuità nel profilo della riserva (tranne all'incasso del premio unico) \Rightarrow riserva da $V_0 = 0$ a $V_{0+} = \Pi_{x,m}$

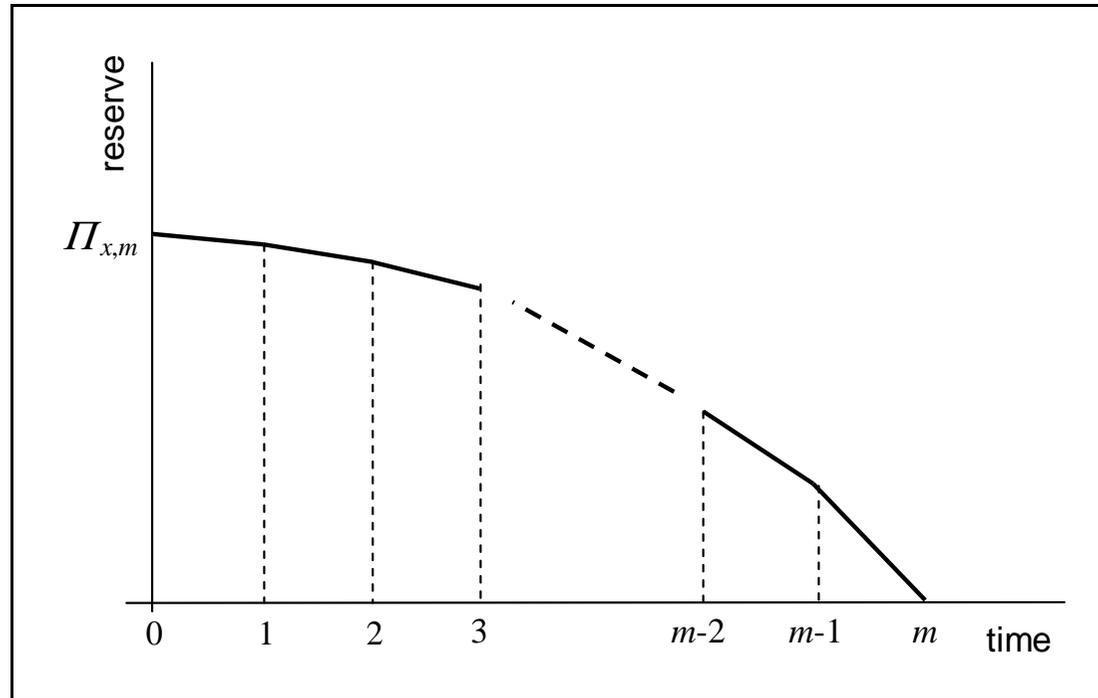
Quindi, procedura di interpolazione:

$$V_r = (1 - r) V_{0+} + r V_1$$

$$V_{t+r} = (1 - r) V_t + r V_{t+1} \quad \text{per } t = 1, 2, \dots, m - 1$$

Vedi Figura seguente

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)



Profilo interpolato della riserva nel caso di premio unico

MECCANISMI DI INDICIZZAZIONE

Possibili variazioni nel tempo di

- frequenza attesa di sinistro
- importo atteso per sinistro
- potere d'acquisto (inflazione)
- ipotesi di mortalità
-

- ▷ Variazioni della frequenza attesa di sinistro o dell'importo atteso dei sinistri \Rightarrow compromesso l'equilibrio tecnico tra premi e benefici
- ▷ Inflazione \Rightarrow perdita del potere d'acquisto di un beneficio di diaria di importo costante \Rightarrow ridotta efficacia della copertura assicurativa

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Per evitare o limitare le conseguenze di situazioni di non equilibrio

⇒ due approcci alternativi

- (1) Introdurre nella valutazione dei benefici, e quindi nel calcolo di premi e riserve, una previsione del trend di alcuni elementi (per es. l'importo atteso dei sinistri, o il tasso di inflazione); non è garantita la copertura dell'impatto delle effettive variazioni
- (2) Adottare una procedura di periodico adeguamento *ex-post* (ad es. annuale), consistente anzitutto in una nuova valutazione dei benefici in base allo scenario osservato e quindi:
 - (a) o rideterminare i futuri premi e/o riserve necessari a mantenere l'equilibrio tecnico secondo il principio di equità
 - (b) o variare alcune condizioni contrattuali; per es., con riferimento all'assicurazione di rimborso spese mediche, aumentare la franchigia o diminuire il massimale di copertura

Possibili soluzioni “combinare”

Nel seguito ⇒ soluzioni di tipo (2a)

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Il modello di “adeguamento”

Riferimento: contratto a premi annui costanti pagabili per tutta la durata contrattuale

Nota: l'espressione “premi costanti” va riferita al calcolo iniziale dei premi, mentre i premi annui effettivi saranno progressivamente ricalcolati secondo il meccanismo di adeguamento

Si assuma che al tempo t ($t = 1, 2, \dots, m - 1$) vi sia un (possibile) adeguamento dei futuri premi e/o della riserva a causa di un ricalcolo del valore dei futuri benefici

Notazione per le quantità al tempo t prima dell' (eventuale) adeguamento a quell'epoca, ma includendo gli (eventuali) adeguamenti fino al tempo $t - 1$:

V_{t^-} = riserva matematica

$\text{Ben}(t^-, m)$ = valore attuariale dei futuri benefici

$\text{Prem}(t^-, m)$ = valore attuariale dei futuri premi

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Equilibrio tecnico espresso da:

$$V_{t^-} + \text{Prem}(t^-, m) = \text{Ben}(t^-, m) \quad (1)$$

Si assuma che al tempo t il valore attuariale dei futuri benefici sia aumentato al tasso $j^{[B]}(t)$ ($j^{[B]}(t) > 0$)

Per mantenere l'equilibrio \Rightarrow le quantità a sinistra dell'Eq. (1) devono essere incrementate al tasso $j^{[B]}(t)$

Nuova condizione di equilibrio:

$$(V_{t^-} + \text{Prem}(t^-, m)) (1 + j^{[B]}(t)) = \text{Ben}(t^-, m) (1 + j^{[B]}(t)) \quad (2)$$

La (2) non implica che sia riserva che premi futuri siano incrementati al tasso $j^{[B]}(t)$; solo il loro valore totale va incrementato al tasso $j^{[B]}(t)$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Possono essere adottati tassi diversi di incremento della riserva e dei premi futuri, $j^{[V]}(t)$ e $j^{[P]}(t)$ rispettivamente, purché sia verificata la condizione di equilibrio:

$$V_{t^-} (1 + j^{[V]}(t)) + \text{Prem}(t^-, m) (1 + j^{[P]}(t)) = \text{Ben}(t^-, m) (1 + j^{[B]}(t)) \quad (3)$$

Dovendo essere soddisfatta la (1), la Eq. (3) richiede:

$$V_{t^-} j^{[V]}(t) + \text{Prem}(t^-, m) j^{[P]}(t) = \text{Ben}(t^-, m) j^{[B]}(t) \quad (4)$$

Condizione (4) \Rightarrow incremento della riserva e dei premi futuri in equilibrio con l'incremento dei benefici

Eq. (4) \Rightarrow infinite soluzioni: dato $j^{[B]}(t)$, le incognite sono $j^{[V]}(t)$ e $j^{[P]}(t)$

Efficacia di specifiche soluzioni \Rightarrow vedi Esempio

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Espressione esplicita per $j^{[B]}(t)$: dalla Eq. (4) si ha

$$j^{[B]}(t) = \frac{V_{t^-} j^{[V]}(t) + \text{Prem}(t^-, m) j^{[P]}(t)}{\text{Ben}(t^-, m)}$$

e, sostituendo $\text{Ben}(t^-, m)$ secondo la (1), si ottiene:

$$j^{[B]}(t) = \frac{V_{t^-} j^{[V]}(t) + \text{Prem}(t^-, m) j^{[P]}(t)}{V_{t^-} + \text{Prem}(t^-, m)}$$

$\Rightarrow j^{[B]}(t) =$ media aritmetica ponderata di $j^{[V]}(t)$ e $j(t)^{[P]}$; i pesi variano con l'antidurata t

In ogni istante:

se $j^{[V]}(t) < j^{[B]}(t)$, allora $j^{[P]}(t) > j^{[B]}(t)$

se $j^{[P]}(t) < j^{[B]}(t)$, allora $j^{[V]}(t) > j^{[B]}(t)$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Riserva necessaria al tempo t , dopo l'adeguamento del beneficio (ma prima dell'incasso del premio):

$$V_t = V_{t^-} (1 + j^{[V]}(t))$$

Quindi:

$$V_t = \text{Ben}(t^-, m) (1 + j^{[B]}(t)) - \text{Prem}(t^-, m) (1 + j^{[P]}(t))$$

Siano:

$$\text{Ben}(t, m) = \text{Ben}(t^-, m) (1 + j^{[B]}(t)) \quad (5a)$$

$$\text{Prem}(t, m) = \text{Prem}(t^-, m) (1 + j^{[P]}(t)) \quad (5b)$$

allora:

$$V_t = \text{Ben}(t, m) - \text{Prem}(t, m)$$

$\Rightarrow V_t$ è la riserva prospettiva

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Applicazione alle assicurazioni malattia

Riferimento a contratto

- emesso al tempo 0, età x
- durata m anni
- beneficio: o rimborso spese mediche o diaria
- premio annuo costante $P_{x,m}$ (calcolato all'emissione)

Risulta:

$$P_{x,m} = \frac{\Pi_{x,m}}{\ddot{a}_{x:m}}$$

dove

$$\Pi_{x,m} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_h p_x (1+i)^{-h} \Pi_{x+h}$$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Ad ogni anniversario \Rightarrow possibile adeguamento dei benefici

Notazione:

$$\text{Ben}(0, m) = II_{x,m}$$

$$\text{Prem}(0, m) = P_{x,m} \ddot{a}_{x:m}]$$

Premi: sia

$$P(0) = P_{x,m}$$

e quindi:

$$P(t) = P(t-1) (1 + j^{[P]}(t)); \quad t = 1, 2, \dots, m-1$$

Si supponga che:

- ▷ il valore attuariale dei benefici sia espresso dal modello moltiplicativo
- ▷ la variazione riguardi solo il fattore K (indipendente dall'età), e non lo specifico effetto dell'età

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Sia $K(0)$ = valore del fattore all'inizio del contratto; quindi

$$\Pi_{x,m} = K(0) \pi_{x,m}$$

e dunque:

$$K(t) = K(t-1) (1 + j^{[B]}(t))$$

Per un contratto di rimborso spese mediche:

$$K(0) = \bar{y}(0) \bar{n}$$

dove $\bar{y}(0)$ = ammontare atteso di sinistro, valutato all'inizio del contratto

Se l'inflazione riguarda l'ammontare dei sinistri (mentre la frequenza attesa è assunta costante), si ha:

$$K(t) = \bar{y}(t) \bar{n} = \bar{y}(t-1) (1 + j^{[B]}(t)) \bar{n}$$

con ovvio significato di $\bar{y}(t)$ e di $\bar{y}(t-1)$

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Per un contratto di diaria:

$$K(0) = b(0) \bar{d} \bar{n}$$

dove $b(0)$ = valore iniziale del beneficio

Il beneficio può essere aumentato per conservarne il potere d'acquisto:

$$K(t) = b(t) \bar{d} \bar{n} = b(t-1) (1 + j^{[B]}(t)) \bar{d} \bar{n}$$

Notare che:

$$\text{Ben}(t^-, m) = K(t-1) \pi_{x+t, m-t}$$

$$\text{Prem}(t^-, m) = P(t-1) \ddot{a}_{x+t: m-t}$$

⇒ Le Eq. (5a), (5b) possono essere usate per determinare la riserva V_t

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Osservazione

In pratica:

- ▷ aumento della riserva (al tasso $j^{[V]}(t)$) usualmente finanziato dall'assicuratore mediante partecipazione agli utili
- ▷ aumento dei premi (al tasso $j^{[P]}(t)$) pagato dall'assicurato

Esempio

Assicurazione di rimborso spese mediche

- $x = 50, m = 15$
- premio annuo costante pagabile per l'intera durata contrattuale
- altri dati: vedi Esempi su premi e riserve

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

t	$j^{[B]}(t)$	$j^{[V]}(t)$	$j^{[P]}(t)$
1	0.00098	0.05	0
2	0.00198	0.05	0
3	0.00301	0.05	0
4	0.00407	0.05	0
5	0.00515	0.05	0
6	0.00625	0.05	0
7	0.00736	0.05	0
8	0.00850	0.05	0
9	0.00965	0.05	0
10	0.01081	0.05	0
11	0.01198	0.05	0
12	0.01316	0.05	0
13	0.01434	0.05	0
14	0.01552	0.05	0

*Tabella 1 - Adeguamento del beneficio finanziato
dal solo incremento di riserva*

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

t	$j^{[B]}(t)$	$j^{[V]}(t)$	$j^{[P]}(t)$
1	0.06	0	0.06120
2	0.06	0	0.06234
3	0.06	0	0.06345
4	0.06	0	0.06450
5	0.06	0	0.06550
6	0.06	0	0.06646
7	0.06	0	0.06737
8	0.06	0	0.06823
9	0.06	0	0.06905
10	0.06	0	0.06982
11	0.06	0	0.07055
12	0.06	0	0.07123
13	0.06	0	0.07187
14	0.06	0	0.07247

Tabella 2 - Solo incremento di premio per finanziare un dato adeguamento di beneficio

Modelli attuariali per le assicurazioni malattia (cont.)

Osservazione 1

Assicurazioni malattia (in particolare coperture temporanee) non sono prodotti di “accumulazione” \Rightarrow la riserva matematica è piccola (vedi precedenti esempi numerici)

Quindi:

- ▷ il solo incremento della riserva non può finanziare un significativo aumento del valore attuariale dei futuri benefici (vedi Tabella 1)
- ▷ l'aumento del valore attuariale dei futuri benefici può invece essere finanziato con un ragionevole incremento dei soli premi futuri (vedi Tabella 2)

Osservazione 2

Maggiore durata del contratto assicurativo \Rightarrow maggiore riserva matematica
 \Rightarrow maggiore contributo al finanziamento dell'aumento dei benefici

6 MODELLI ATTUARIALI PER LE RENDITE DI INVALIDITA'

ASPETTI GENERALI

Prodotto assicurativo: rendita pagata in caso di invalidità (permanente o anche temporanea), intesa come incapacità professionale causata da malattia o infortunio

Alcuni problemi

- definizione di invalidità
- base statistica complessa (probabilità di vari eventi: invalidazione, riattivazione, decesso da attivo, decesso da invalido)
- liquidazione e controllo dei sinistri

Ipotesi: rendita con beneficio annuale b , pagato agli anniversari di contratto in caso di invalidità (non necessariamente permanente)

Vedi Figura seguente (stato a = "attivo", stato i = "invalido")

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

a	a	i	i	a	a	i	i	i	state	
	0	b	b	0	0	b	b	b	benefit	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	time

Rendita di invalidità: una possibile realizzazione

Valore attuale aleatorio Y del beneficio

- periodo assicurato m anni
- rendita pagabile fino al tempo m al max

$$Y = \sum_{h=1}^m B_h v^h$$

con v = fattore annuo di attualizzazione e

$$B_h = \begin{cases} b & \text{se stato} = i \\ 0 & \text{se stato} \neq i \end{cases}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Valore attuale atteso (valore attuariale)

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{h=1}^m \mathbb{E}[B_h] v^h$$

Se x è l'età all'inizio del contratto, si ha

$$\mathbb{E}[B_h] = b {}_h p_x^{ai}$$

con ${}_h p_x^{ai}$ probabilità per un attivo di età x di essere invalido ad età $x + h$, e quindi

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{h=1}^m b {}_h p_x^{ai} v^h$$

Difficoltà pratiche nello stimare “direttamente” le probabilità ${}_h p_x^{ai}$

Necessario un approccio alternativo

MODELLI MULTISTATO

Obiettivo: descrivere l'evoluzione di un rischio in termini di presenza del rischio stesso, in ogni istante di tempo, in uno *stato*, appartenente ad un insieme o *spazio degli stati*

Supporto logico: *modello multistato* con

- *stati*

attivo: stato a

invalido: stato i

deceduto: stato d

- *transizioni* fra stati

invalidazione: transizione $a \rightarrow i$

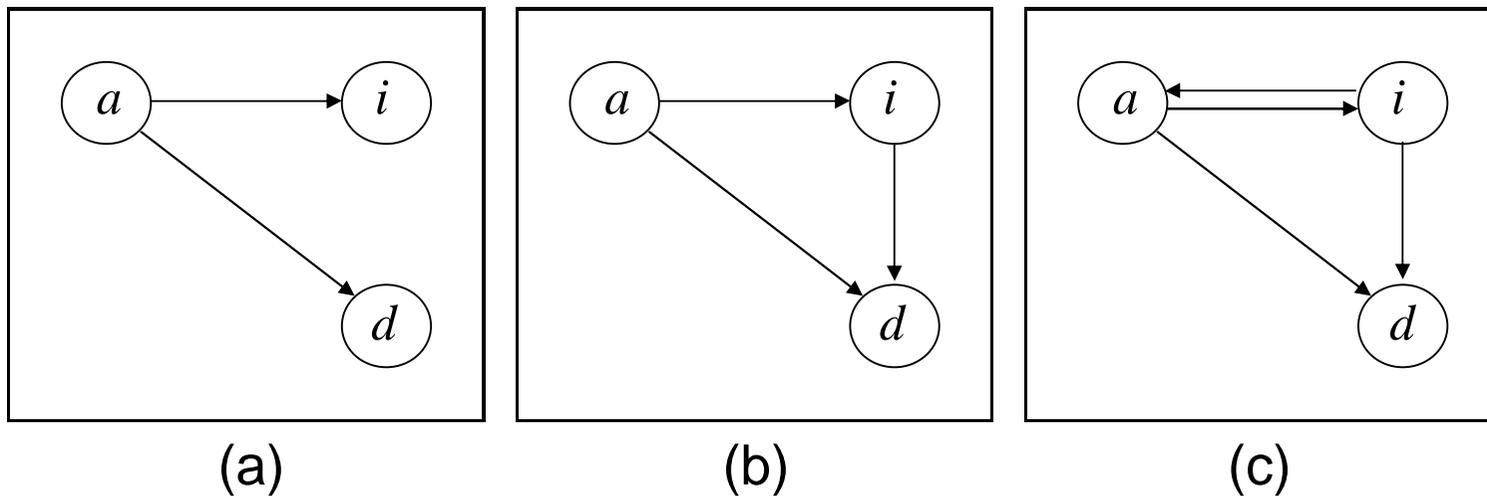
decesso di un attivo: transizione $a \rightarrow d$

decesso di un invalido: transizione $i \rightarrow d$

riattivazione: transizione $i \rightarrow a$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Le transizioni effettivamente considerate dipendono dal particolare problema e modello adottato



Modelli a tre stati

Modello (a): beneficio di capitale in caso di invalidità (permanente)

Modello (b): beneficio di rendita in caso di invalidità permanente

Modello (c): beneficio di rendita in caso di invalidità temporanea o permanente

PROBABILITÀ MONOANNUALI

Approccio probabilistico:

- definire un modello probabilistico basato su probabilità monoannuali, cioè riguardanti lo stato occupato ad età $y + 1$ dato lo stato occupato ad età y (probabilità condizionate)
- individuare relazioni per ottenere probabilità relative ad h anni (ad es. ${}_h p_x^{ai}$) da probabilità monoannuali

Notazione di Hamza

- ▷ p : probabilità di essere in vita
- ▷ q : probabilità di decesso
- ▷ 2 esponenti: stato iniziale ad età y (evento condizionante), stato finale ad età $y + 1$ o all'istante di decesso
- ▷ 1 esponente: stato iniziale ad età y (evento condizionante)

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Probabilità monoannuali relative ad un soggetto attivo (età y)

p_y^{aa} = prob. di essere attivo ad età $y + 1$

q_y^{aa} = prob. di decesso entro un anno, il decesso avvenendo nello stato a

p_y^{ai} = prob. di essere invalido ad età $y + 1$

q_y^{ai} = prob. di decesso entro un anno, il decesso avvenendo nello stato i

p_y^a = prob. di essere in vita (attivo o invalido) ad età $y + 1$

q_y^a = prob. di decesso entro un anno (decesso dallo stato a o i)

w_y = prob. di diventare invalido entro un anno

Probabilità monoannuali relative ad un soggetto invalido (età y)

p_y^{ii} = prob. di essere invalido ad età $y + 1$

q_y^{ii} = prob. di decesso entro un anno, il decesso avvenendo nello stato i

p_y^{ia} = prob. di essere attivo ad età $y + 1$

q_y^{ia} = prob. di decesso entro un anno, il decesso avvenendo nello stato a

p_y^i = prob. di essere in vita (attivo o invalido) ad età $y + 1$

q_y^i = prob. di decesso entro un anno (decesso dallo stato a o i)

r_y = prob. di riattivazione entro un anno

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Ipotesi (usuale): al max una transizione in un anno, a parte il possibile decesso

Esempi

stato ad età y	transizione	stato ad età $y + 1$	ammissibile nel modello ?
a	\rightarrow	i	si
i	\rightarrow	a	si
a	$\rightarrow i \rightarrow$	a	no
a	$\rightarrow i \rightarrow a \rightarrow$	i	no
a	\rightarrow	d	si
i	\rightarrow	d	si
a	$\rightarrow i \rightarrow$	d	si
i	$\rightarrow a \rightarrow$	d	si
a	$\rightarrow i \rightarrow a \rightarrow$	d	no

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Relazioni:

$$p_y^a = p_y^{aa} + p_y^{ai}$$

$$q_y^a = q_y^{aa} + q_y^{ai}$$

$$p_y^i = p_y^{ia} + p_y^{ii}$$

$$q_y^i = q_y^{ia} + q_y^{ii}$$

$$1 = p_y^a + q_y^a$$

$$1 = p_y^i + q_y^i$$

$$w_y = p_y^{ai} + q_y^{ai}$$

$$r_y = p_y^{ia} + q_y^{ia}$$

⇒ stima statistica non necessaria per tutte le prob. monoannuali

Se considerata la sola invalidità permanente:

$$p_y^{ia} = q_y^{ia} = 0$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità *(cont.)*

	stato ad età $y + 1$		
stato ad età y	a	i	d
a	p_y^{aa}	p_y^{ai}	q_y^a
i	p_y^{ia}	p_y^{ii}	q_y^i
d	0	0	1

Probabilità condizionate di essere negli stati a, i, d , ad età $y + 1$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Ulteriore riduzione grazie a ipotesi di approssimazione

Usuale assumere:

$$q_y^{ai} = w_y \frac{q_y^i}{2} \quad (*)$$

$$q_y^{ia} = r_y \frac{q_y^a}{2}$$

Ipotesi sottostanti:

- distribuzione uniforme dell'istante della prima transizione nell'anno (la transizione essendo $a \rightarrow i$ oppure $i \rightarrow a$)
- probabilità che la seconda transizione ($i \rightarrow d$ oppure $a \rightarrow d$ rispettivamente) si verifichi nella seconda metà dell'anno uguale a metà della probabilità che una transizione dello stesso tipo si verifichi nell'anno

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Approssimazioni più rigorose, in particolare:

$$q_y^{ai} = w_y \frac{1}{2} q_{y+\frac{1}{2}}^i$$

$$q_y^{ia} = r_y \frac{1}{2} q_{y+\frac{1}{2}}^a$$

con

$$\frac{1}{2} q_{y+\frac{1}{2}}^i, \quad \frac{1}{2} q_{y+\frac{1}{2}}^a$$

calcolate in base a

$$q_y^i, \quad q_y^a$$

rispettivamente, tramite appropriate ipotesi (es. distribuzione uniforme dei decessi nell'anno)

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Semplificazione:

- in base alla approx (*)
- assumendo stimate le funzioni (*funzioni di Zimmermann*)

w_y (tavola di invalidazione)

r_y (tavola di riattivazione)

q_y^i (tavola di mortalità degli invalidi)

q_y^a (tavola di mortalità degli attivi)

si possono calcolare tutte le altre probabilità; per esempio:

$$p_y^{ai} = w_y - q_y^{ai} = w_y \left(1 - \frac{q_y^i}{2} \right)$$

$$p_y^{aa} = p_y^a - p_y^{ai} = p_y^a - w_y \left(1 - \frac{q_y^i}{2} \right)$$

$$q_y^{aa} = q_y^a - q_y^{ai} = q_y^a - w_y \frac{q_y^i}{2}$$

PROBABILITÀ PLURIENNALI

Calcolo di probabilità del tipo:

${}_h p_y^{aa} =$ probabilità di essere attivo ad età $y + h$, essendo attivo ad età y

${}_h p_y^{ai} =$ probabilità di essere invalido ad età $y + h$, essendo attivo ad età y

etc.

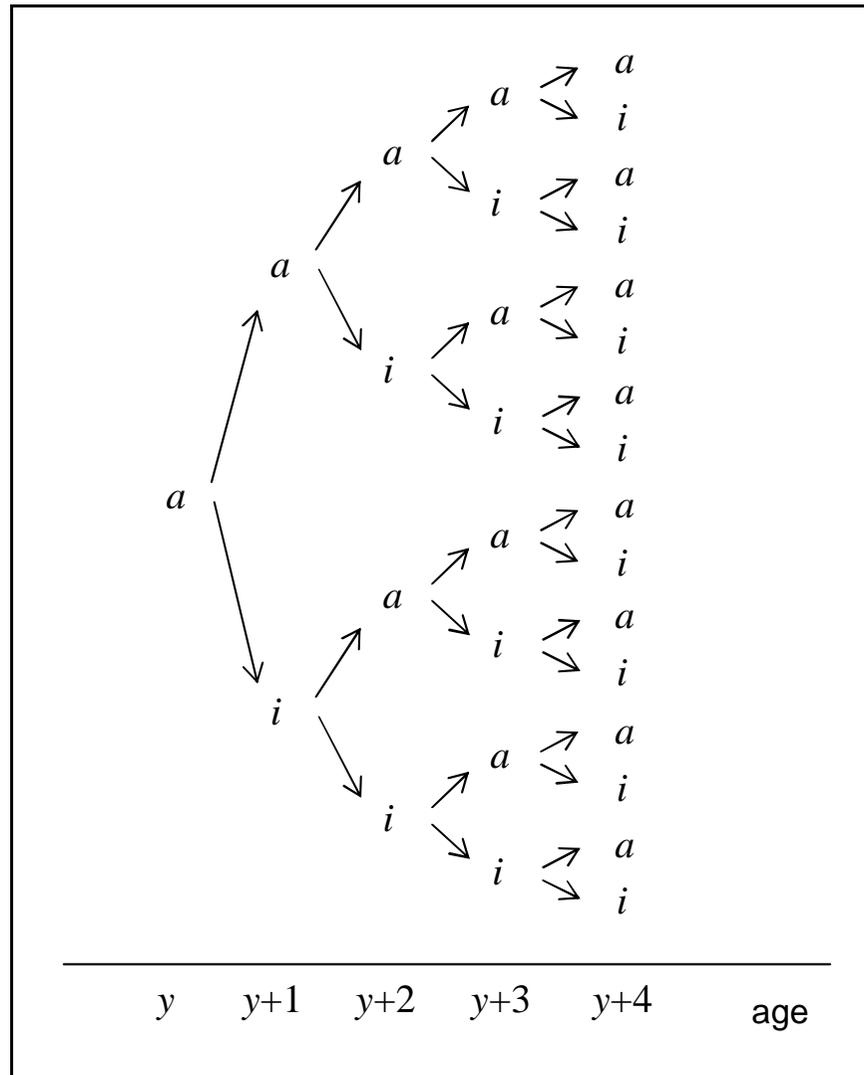
Esempio

Riferimento a un periodo di 4 anni

$2^4 = 16$ possibili storie di invalidità per un soggetto attivo ad età y ed attivo o invalido ad età $y + 4$ (vedi Figura seguente)

Calcolare la probabilità ${}_4 p_y^{ai}$, date tutte le probabilità monoannuali p_{y+j}^{aa} , p_{y+j}^{ai} , p_{y+j}^{ia} e p_{y+j}^{ii} , per $j = 0, 1, 2, 3$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Possibili storie di invalidità su un intervallo di 4 anni

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Stato i raggiunto ad età $y + 4$ da 8 storie, tra loro incompatibili
 \Rightarrow probabilità ${}_4p_y^{ai}$ = somma delle probabilità delle 8 storie

Per es. la probabilità di

$$a \rightarrow a, a \rightarrow a, a \rightarrow a, a \rightarrow i$$

è data da:

$$p_y^{aa} p_{y+1}^{aa} p_{y+2}^{aa} p_{y+3}^{ai}$$

Per raggiungere lo stato i ad età $y + 4$, l'ultima transizione deve essere o $a \rightarrow i$ o $i \rightarrow i$, a seconda dello stato ad età $y + 3$; quindi:

$${}_4p_y^{ai} = {}_3p_y^{aa} p_{y+3}^{ai} + {}_3p_y^{ai} p_{y+3}^{ii}$$

dove ${}_3p_y^{aa}$ e ${}_3p_y^{ai}$ considerano tutte le possibili storie di 3 anni da a ad età y ad a e i rispettivamente ad età $y + 3$

Generalizzazione \Rightarrow equazioni ricorrenti

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

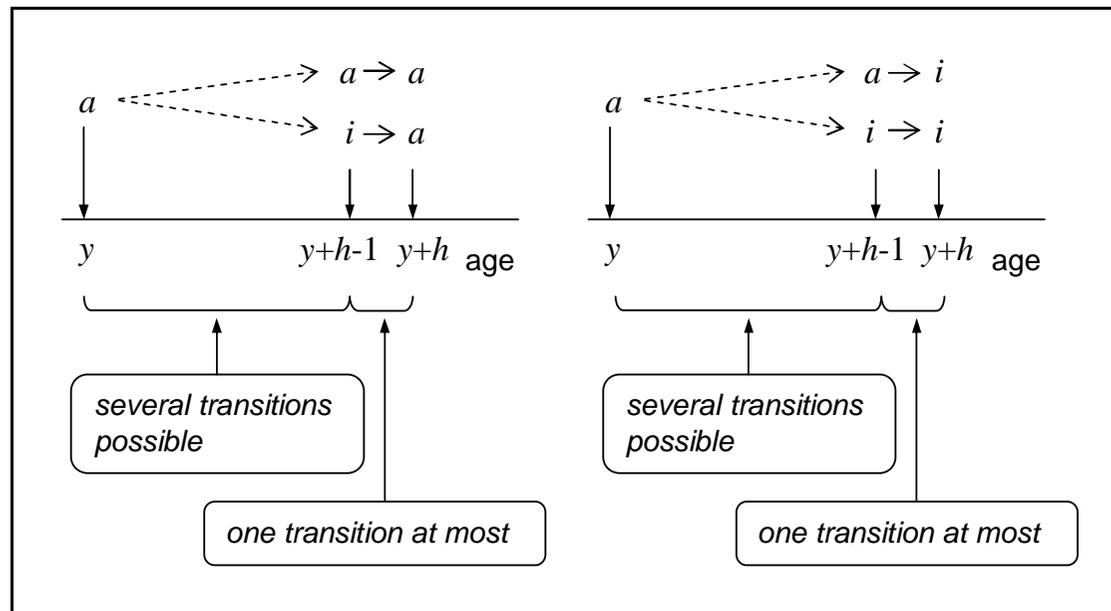
Equazioni ricorrenti

$${}_h p_y^{aa} = {}_{h-1} p_y^{aa} p_{y+h-1}^{aa} + {}_{h-1} p_y^{ai} p_{y+h-1}^{ia}$$

$${}_h p_y^{ai} = {}_{h-1} p_y^{ai} p_{y+h-1}^{ii} + {}_{h-1} p_y^{aa} p_{y+h-1}^{ai}$$

con condizioni iniziali

$${}_0 p_y^{aa} = 1; \quad {}_0 p_y^{ai} = 0$$



Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Probabilità di permanenza

Probabilità per un soggetto invalido di età y di rimanere invalido per h anni (almeno):

$${}_h p_y^{ii} = \prod_{k=0}^{h-1} p_{y+k}^{ii}$$

Probabilità per un soggetto attivo di età y di rimanere attivo per h anni (almeno):

$${}_h p_y^{aa} = \prod_{k=0}^{h-1} p_{y+k}^{aa}$$

Ovviamente:

$${}_0 p_y^{aa} = {}_0 p_y^{ii} = 1$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Esempio

Insieme di storie che terminano nello stato i ad età $y + 4$ suddiviso in 4 sottoinsiemi:

1. storie che entrano in i tra età $y + 3$ e $y + 4$
2. storie che entrano in i tra età $y + 2$ e $y + 3$, poi rimanendo in i
3. storie che entrano in i tra età $y + 1$ e $y + 2$, poi rimanendo in i
4. storie che entrano in i tra età y e $y + 1$, poi rimanendo in i

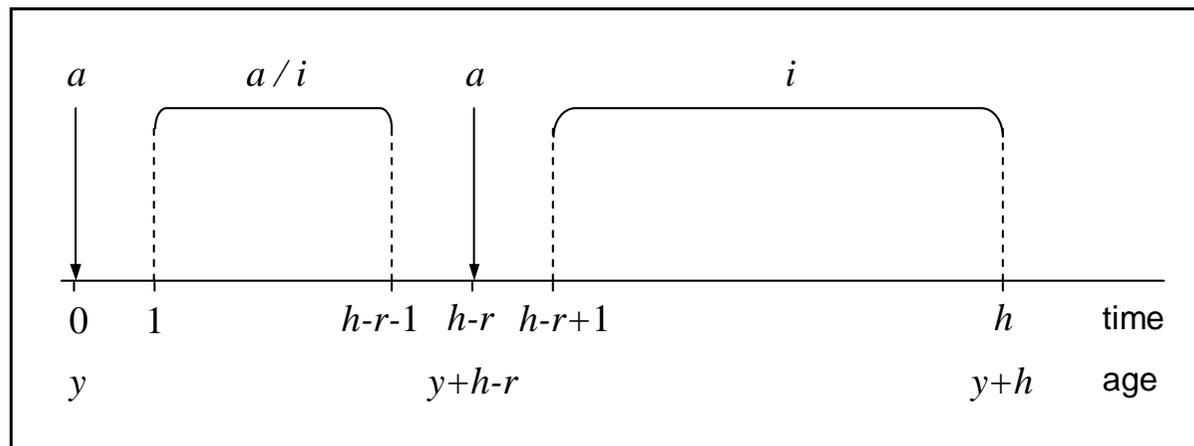
Qualunque sequenza di stati può essere percorsa prima della transizione $a \rightarrow i \Rightarrow$ probabilità ${}_4p_y^{ai}$ espressa dalla:

$${}_4p_y^{ai} = \underbrace{{}_3p_y^{aa} p_{y+3}^{ai}}_{\text{sottoins. 1}} + \underbrace{{}_2p_y^{aa} p_{y+2}^{ai} {}_1p_{y+3}^{ii}}_{\text{sottoins. 2}} + \underbrace{{}_1p_y^{aa} p_{y+1}^{ai} {}_2p_{y+2}^{ii}}_{\text{sottoins. 3}} + \underbrace{p_y^{ai} {}_3p_{y+1}^{ii}}_{\text{sottoins. 4}}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Dall'equazione ricorrente per ${}_h p_y^{ai}$ si trova:

$${}_h p_y^{ai} = \sum_{r=1}^h \left[{}_{h-r} p_y^{aa} p_{y+h-r}^{ai} {}_{r-1} p_{y+h-r+1}^{ii} \right] \quad (^\circ)$$



Sequenze di stati e transizioni: $a \rightarrow \dots \rightarrow i$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

VALORI ATTUARIALI

Riferimento: soggetto attivo (stato a), età x

Valore attuariale dell'assicurazione di invalidità, con $b = 1$ (vedi "Aspetti generali"):

$$a_{x:m|}^{ai} = \mathbb{E}[Y] = \sum_{h=1}^m v^h {}_h p_x^{ai}$$

In base alla ($^{\circ}$) si ha:

$$a_{x:m|}^{ai} = \sum_{h=1}^m v^h \sum_{r=1}^h \left[{}_{h-r} p_x^{aa} {}_r p_{x+h-r}^{ai} {}_{h-r} p_{x+h-r+1}^{ii} \right]$$

Posto $j = h - r + 1$ e invertendo l'ordine di somma, si trova:

$$a_{x:m|}^{ai} = \sum_{j=1}^m {}_{j-1} p_x^{aa} {}_j p_{x+j-1}^{ai} \sum_{h=j}^m v^h {}_{h-j} p_{x+j}^{ii}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Quantità

$$\ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i = \sum_{h=j}^m v^{h-j} {}_{h-j}p_{x+j}^{ii} \quad ({}^{\circ\circ})$$

= valore attuariale di una rendita immediata temporanea pagata a un soggetto invalido di età $x + j$ finché è in stato i , cioè valore attuariale di una *rendita di invalidità*

Mediante $({}^{\circ\circ})$ si ottiene:

$$a_{x:m}^{ai} = \sum_{j=1}^m {}_{j-1}p_x^{aa} p_{x+j-1}^{ai} v^j \ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i$$

⇒ formula *inception-annuity*

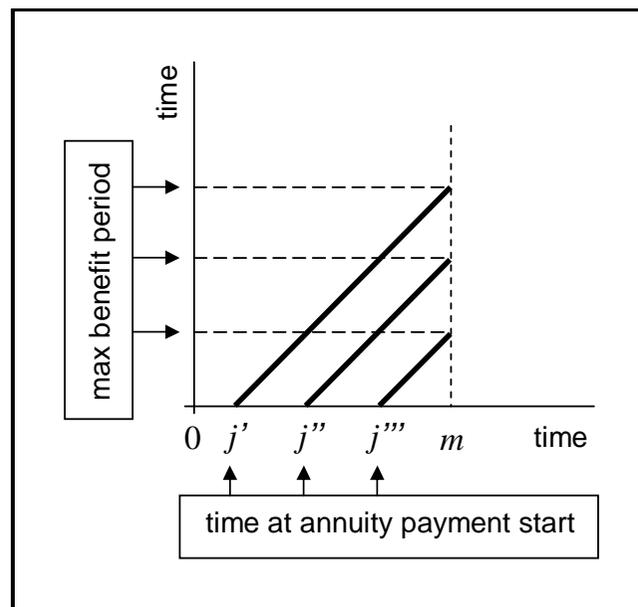
▷ *inception*: ingresso nello stato i , con prob. p_{x+j-1}^{ai}

▷ *annuity*: rendita di invalidità, con valore $\ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i$

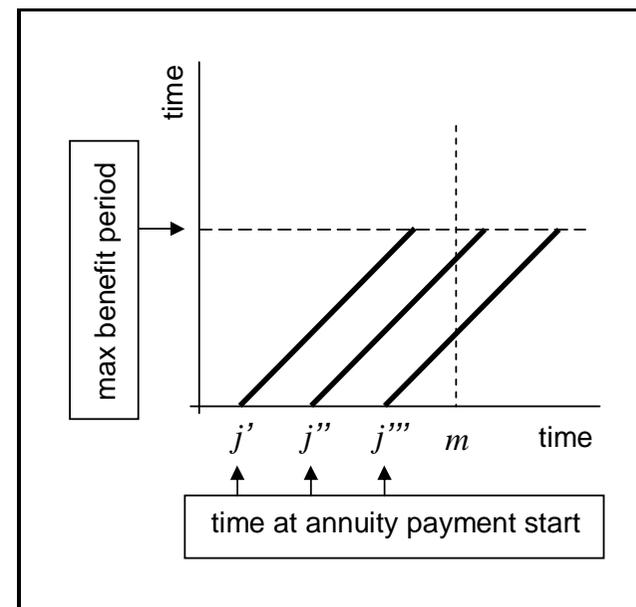
Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Durata max di pagamento della rendita di invalidità

- (a) nella formula precedente \Rightarrow rendita pagabile fino a m , quindi durata max dipendente da istante j di ingresso nello stato i
- (b) alternativa: rendita pagabile per s anni al max (indipendente dall'istante di ingresso in i) \Rightarrow può superare la scadenza m della copertura



(a)



(b)

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Valori attuariali per l'alternativa (b):

$$a_{x:m;s}^{ai} = \sum_{j=1}^m j-1 p_x^{aa} p_{x+j-1}^{ai} \sum_{h=j}^{j+s-1} v^h {}_{h-j} p_{x+j}^{ii}$$

o direttamente dalla formula inception-annuity cambiando la durata max della rendita di invalidità:

$$a_{x:m;s}^{ai} = \sum_{j=1}^m j-1 p_x^{aa} p_{x+j-1}^{ai} v^j \ddot{a}_{x+j:s}^i$$

Alternativa (b) in pratica necessaria se m piccolo. Nelle assicurazioni collettive, usuale calcolo premi su base monoannuale $\Rightarrow m = 1$

Con $m = 1$:

$$a_{x:1;s}^{ai} = p_x^{ai} v \ddot{a}_{x+1:s}^i \quad (*)$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Nelle precedenti equazioni, quantità

$$p_{x+j-1}^{ai} v \ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i]$$

$$p_{x+j-1}^{ai} v \ddot{a}_{x+j:s}^i]$$

⇒ costi annui attesi dell'assicuratore, per assicurato attivo ad età $x + j - 1$, $j = 1, 2, \dots, m$

In base a Eq. (*):

$$p_{x+j-1}^{ai} v \ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i] = a_{x+j-1:1;m-j+1}^{ai}$$

$$p_{x+j-1}^{ai} v \ddot{a}_{x+j:s}^i] = a_{x+j-1:1;s}^{ai}$$

Nel linguaggio attuariale ⇒ costi annui attesi = *premi naturali*

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Valori attuariali $a_{x:m}^{ai}$ e $a_{x:m;s}^{ai}$ espressi come valori attuariali dei premi naturali:

$$a_{x:m}^{ai} = \sum_{j=1}^m j-1p_x^{aa} v^{j-1} a_{x+j-1:1;m-j+1}^{ai}$$

$$a_{x:m;s}^{ai} = \sum_{j=1}^m j-1p_x^{aa} v^{j-1} a_{x+j:1;s}^{ai}$$

Valore attuariale di una rendita temporanea pagabile per m' anni al max mentre l'assicurato, attivo ad età x , è nello stato attivo:

$$\ddot{a}_{x:m'}^{aa} = \sum_{h=1}^{m'} v^{h-1} {}_{h-1}p_x^{aa}$$

⇒ impiegato per il calcolo di premi annui costanti, pagabili da un assicurato attivo al max per m' anni

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Quantità

$$\ddot{a}_{x+t:m-t}^{ii} = \sum_{h=1}^{m-t} v^{h-1} {}_{h-1}p_{x+t}^{ii}$$

= valore attuariale di una rendita temporanea pagabile per $m - t$ anni al max mentre l'assicurato, invalido ad età $x + t$, è (ancora o nuovamente) nello stato invalido

⇒ impiegato per il calcolo di riserve matematiche

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

PREMI

Calcolo di *premi netti* (non considerando spese e relativi caricamenti) secondo il principio di equità

Premio unico per rendita di rata annua b

- rendita di invalidità pagabile al max fino a m :

$$\Pi_{x,m} = b a_{x:m}^{ai}$$

- rendita di invalidità pagabile per s anni al max:

$$\Pi_{x,m;s} = b a_{x:m;s}^{ai}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Premio annuo costante pagabile per m' anni ($m' \leq m$) se l'assicurato è attivo, per rendita di invalidità di rata annua b :

- rendita di invalidità pagabile al max fino a $m \Rightarrow$ premio $P_{x,m(m')}$ dato da:

$$P_{x,m(m')} \ddot{a}_{x:m'}^{aa} = b a_{x:m}^{ai}$$

- rendita di invalidità pagabile per s anni al max \Rightarrow premio $P_{x,m(m');s}$ dato da:

$$P_{x,m(m');s} \ddot{a}_{x:m'}^{aa} = b a_{x:m;s}^{ai}$$

Con $m' = m$, in base all'espressione dei valori $a_{x:m}^{ai}$ e $a_{x:m;s}^{ai}$ come valori attuariali dei premi naturali \Rightarrow relazioni seguenti

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

$$P_{x,m(m)} = b \frac{\sum_{j=1}^m {}_{j-1}p_x^{aa} v^{j-1} a_{x+j-1:m-j+1}^{ai}}{\sum_{j=1}^m v^{j-1} {}_{j-1}p_x^{aa}}$$

$$P_{x,m(m);s} = b \frac{\sum_{j=1}^m {}_{j-1}p_x^{aa} v^{j-1} a_{x+j-1:s}^{ai}}{\sum_{j=1}^m v^{j-1} {}_{j-1}p_x^{aa}}$$

⇒ Premio annuo costante (pagabile per m anni) = media aritmetica ponderata dei premi naturali

Condizione di “finanziamento” ⇒ ammissibilità di $m' = m$?

Necessaria analisi dell'andamento dei premi naturali

$$a_{x+j-1:1;m-j+1}^{ai} = p_{x+j-1}^{ai} v \ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i$$

$$a_{x+j-1:1;s}^{ai} = p_{x+j-1}^{ai} v \ddot{a}_{x+j:s}^i$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

All'aumentare dell'età $x + j - 1$:

- probabilità p_{x+j-1}^{ai} solitamente crescente
- valore attuariale della rendita di invalidità $\ddot{a}_{x+j:m-j+1}^i$ verosimilmente decrescente in quanto decresce la durata max della rendita
- valore attuariale della rendita di invalidità $\ddot{a}_{x+j:s}^i$ approx costante, essendo costante la durata max della rendita
- sui valori attuariali delle rendite di invalidità incidono anche mortalità e probabilità di riattivazione

⇒ necessarie verifiche numeriche

Conclusione probabile:

- ▷ premi naturali decrescenti per rendita pagabile al max fino alla scadenza m
- ▷ premi naturali crescenti per rendita pagabile per s anni al max

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Esempio

Riferimento:

- assicurazione con beneficio di rendita in caso di invalidità temporanea o permanente
- rendita pagabile agli anniversari di contratto fino alla scadenza m al max
- $b = 100$, $v = 1.02^{-1}$
- mortalità secondo la legge di Heligman-Pollard (vedi cap. Assicurazioni malattia)

Si assuma:

$$p_y^{ai} = 0.00223 \times 1.0468^y$$

Si trova, per esempio:

$$p_{30}^{ai} = 0.008795, \quad p_{45}^{ai} = 0.017465, \quad p_{55}^{ai} = 0.027594, \quad p_{60}^{ai} = 0.034684$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Si assuma inoltre:

$$p_y^{ia} = \begin{cases} 0.05 & \text{per } y \leq 60 \\ 0 & \text{per } y > 60 \end{cases}$$

Sia q_y la prob. di decesso tra le età y e $y + 1$, indipend. dallo stato

Per le mortalità specifiche si assuma:

$$q_y^a = q_y$$

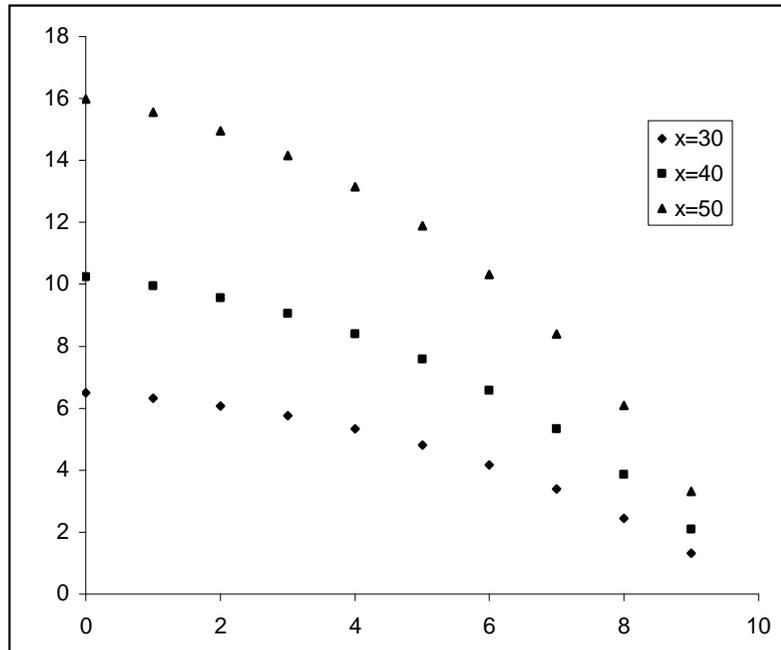
$$q_y^i = (1 + \gamma) q_y$$

con $\gamma = 0.25$. Si hanno poi le:

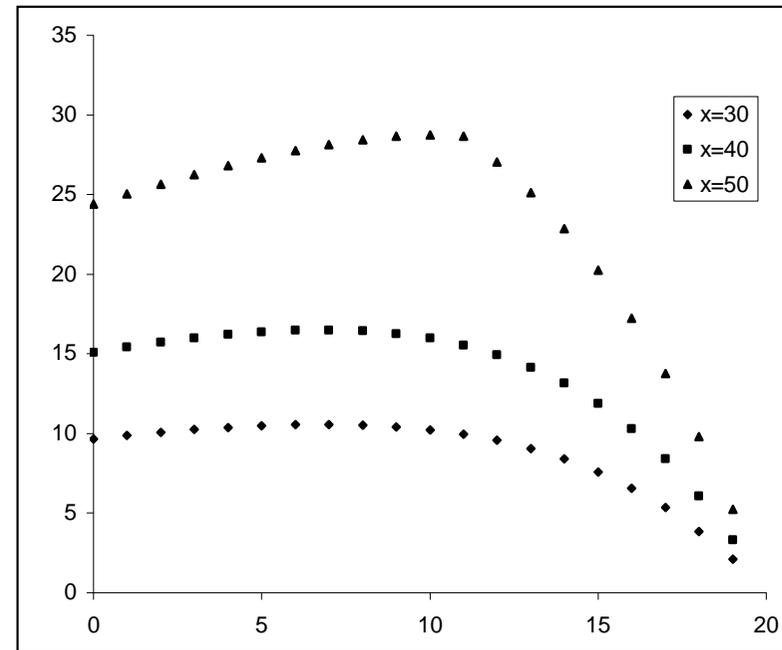
$$p_y^{aa} = 1 - p_y^{ai} - q_y^a$$

$$p_y^{ii} = 1 - p_y^{ia} - q_y^i$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Premi naturali; $m = 10$



Premi naturali; $m = 20$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità *(cont.)*

	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
$m = 10$	41.656	64.219	96.918
	4.756	7.541	11.945
$m = 15$	84.185	127.360	190.563
	6.919	10.965	17.758
$m = 20$	136.777	202.044	311.067
	9.129	14.411	24.816

Premi unici ed annui costanti ($m' = m$)

	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
$m = 10$	6.495	10.197	15.876
$m' = 7$			
$m = 15$	9.611	14.956	23.487
$m' = 10$			
$m = 20$	11.242	17.395	28.988
$m' = 15$			

Premi annui costanti

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

RISERVE MATEMATICHE

Riferimento: assicurazione con beneficio di rendita fino alla scadenza m al max e premi annui costanti $P = P_{x,m(m')}$ per m' anni

In generale:

riserva matematica (prospettiva) al tempo $t =$

valore attuariale dei futuri benefici - valore attuariale dei futuri premi

con valori attuariali calcolati in base all'informazione disponibile al tempo t

Per assicurazioni invalidità:

informazione = stato occupato dall'assicurato al tempo t

Riserva matematica

▷ *per attivi* (assicurati nello stato a) $V_t^{(a)}$

▷ *per invalidi* (assicurati nello stato i) $V_t^{(i)}$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Riserva per attivi:

$$V_t^{(a)} = \begin{cases} b a_{x+t:m-t}^{ai} - P \ddot{a}_{x+t:m'-t}^{aa} & 0 \leq t < m' \\ b a_{x+t:m-t}^{ai} & m' \leq t \leq m \end{cases}$$

con $V_0^{(a)} = V_m^{(a)} = 0$

Riserva per invalidi:

$$V_t^{(i)} = \begin{cases} b \ddot{a}_{x+t:m-t}^{ii} - P \ddot{a}_{x+t:m'-t}^{ia} & 0 \leq t < m' \\ b \ddot{a}_{x+t:m-t}^{ii} & m' \leq t \leq m \end{cases}$$

Nota:

- $b \ddot{a}_{x+t:m-t}^{ii}$ = valore attuariale della rendita in corso di pagamento nonché di possibili future rendite dopo la riattivazione
- $P \ddot{a}_{x+t:m'-t}^{ia}$ = valore attuariale degli eventuali futuri premi dopo la riattivazione

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Dopo alcuni passaggi si trovano le relazioni ricorrenti

Riserva per attivi:

$$V_t^{(a)} + P = v V_{t+1}^{(a)} + v p_{x+t}^{ai} (V_{t+1}^{(i)} - V_{t+1}^{(a)}) - v q_{x+t}^a V_{t+1}^{(a)}$$

Riserva per invalidi:

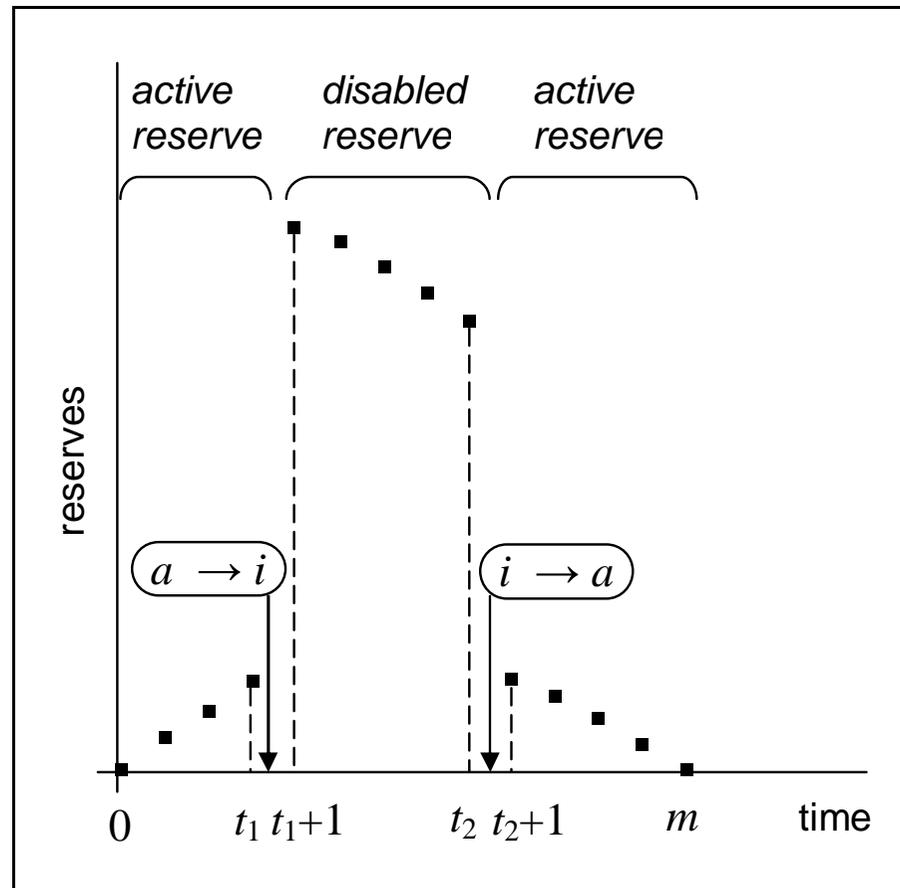
$$V_t^{(i)} - b = v V_{t+1}^{(i)} + v p_{x+t}^{ia} (V_{t+1}^{(a)} - V_{t+1}^{(i)}) - v q_{x+t}^i V_{t+1}^{(i)}$$

⇒ relazioni di equilibrio nell'anno $(t, t + 1)$

Notare:

- ▷ $V_{t+1}^{(i)} - V_{t+1}^{(a)}$ = salto (positivo) della riserva richiesto dalla transizione $a \rightarrow i$
- ▷ $V_{t+1}^{(a)} - V_{t+1}^{(i)}$ = salto (negativo) della riserva corrispondente alla transizione $i \rightarrow a$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Un possibile profilo temporale della riserva di un contratto

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Salto della riserva \Rightarrow analogia con il capitale sotto rischio nelle assicurazioni vita

- ▷ salto positivo finanziato dalla mutualità (vedi assicurazioni temporanee caso morte e miste)
- ▷ salto negativo finanzia la mutualità (vedi capitali differiti e rendite vitalizie)

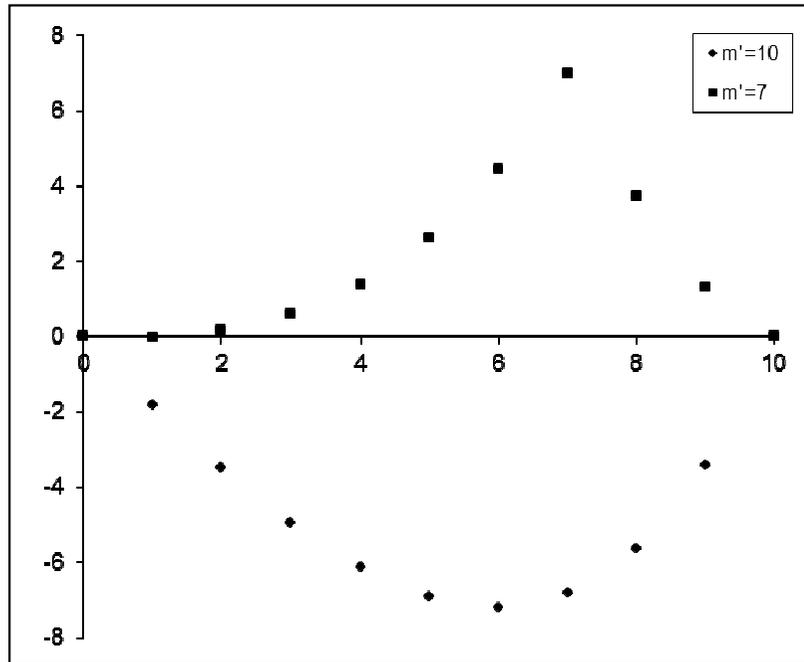
Esempio

Contratto assicurativo e dati come nell'esempio precedente

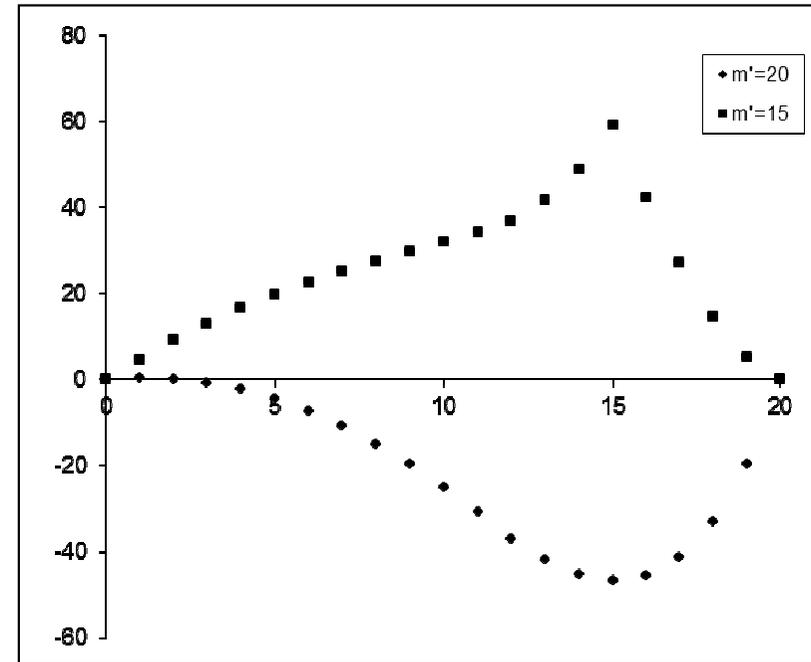
Notare:

- necessità di abbreviare la durata pagamento premi per evitare riserve negative
- diverso ordine di grandezza della riserva per attivi e della riserva per invalidi

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

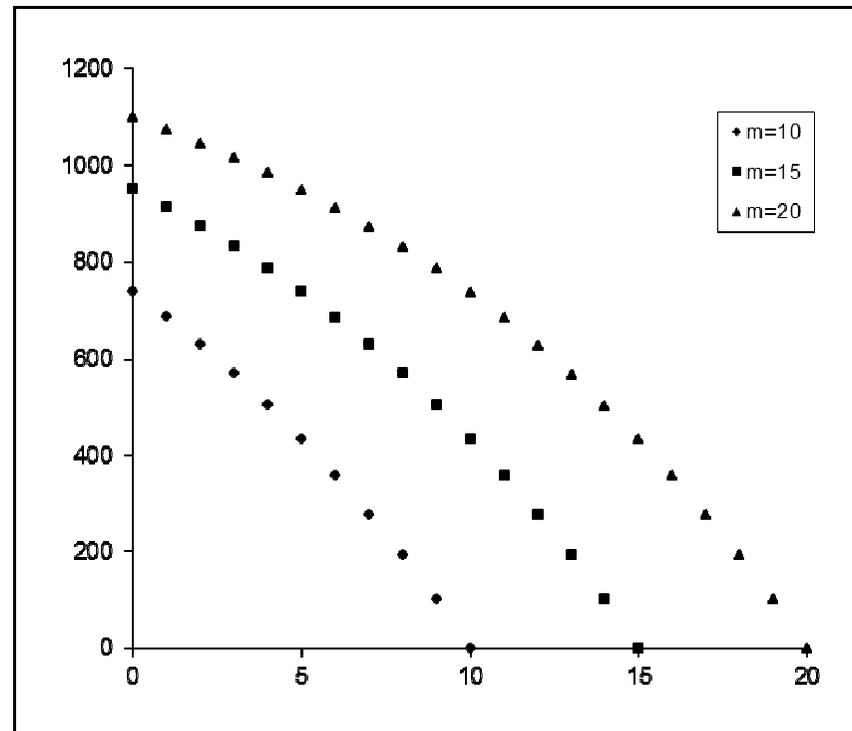


Riserva per attivi; $x = 30, m = 10$



Riserva per attivi; $x = 50, m = 20$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Riserva per invalidi; $x = 30$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Calcolo semplificato (e approx) della riserva per invalidi

Nella espressione di $V_t^{(i)}$:

- $b \ddot{a}_{x+t:m-t}^i$ = valore attuariale della rendita in pagamento + valore attuariale di possibili future rendite
- $P \ddot{a}_{x+t:m'-t}^{ia}$ = valore attuariale degli eventuali futuri premi dopo la riattivazione

⇒ Riserva per invalidi scomponibile in due addendi:

- (1) valore attuariale della rendita in corso di pagamento
- (2) valore attuariale dei benefici dopo la riattivazione - valore attuariale dei premi dopo la riattivazione

Trascurando l'addendo (2) si può porre approx:

$$V_t^{(i)} = b \ddot{a}_{x+t:m-t}^i$$

Nota: espressione esatta per coperture di sola invalidità permanente

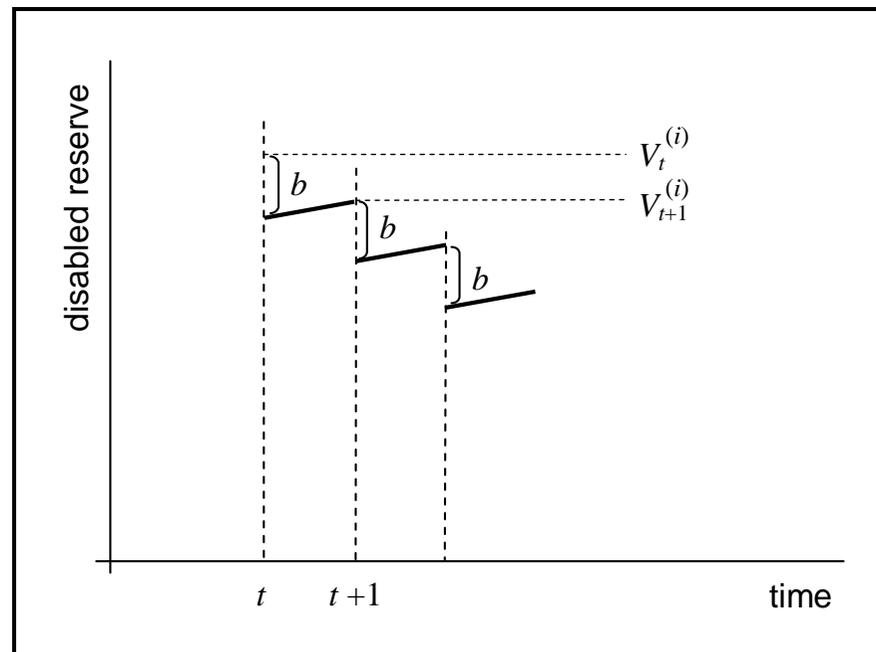
Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

RISERVE PER ANTIDURATE NON INTERE

Riserva per attivi: vedi formule relative alle assicurazioni malattia (riserva di senescenza)

Riserva per invalidi: si assuma, per $t = 0, 1, \dots$ e $0 < r < 1$:

$$V_{t+r}^{(i)} = (1 - r) (V_t^{(i)} - b) + r V_{t+1}^{(i)}$$



Profilo interpolato della riserva per invalidi

CONDIZIONI CONTRATTUALI

Condizioni riguardanti:

- ▷ periodo di copertura del rischio invalidità
- ▷ durata di pagamento della rendita di invalidità

Condizioni descritte da:

$$\Gamma = [m_1, m_2, f, s, r]$$

(tempo in anni) con:

- (m_1, m_2) = periodo di copertura \Rightarrow rendita pagabile solo se l'inizio dell'invalidità è tra m_1 e m_2 ; per esempio:
 - $m_1 = c$ = periodo di carenza (dalla stipulazione del contratto)
 - $m_2 = m$ = scadenza del contratto
- f = periodo di differimento, dall'inizio dell'invalidità
- s = massimo numero di anni di pagamento rendita dall'inizio dell'invalidità

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

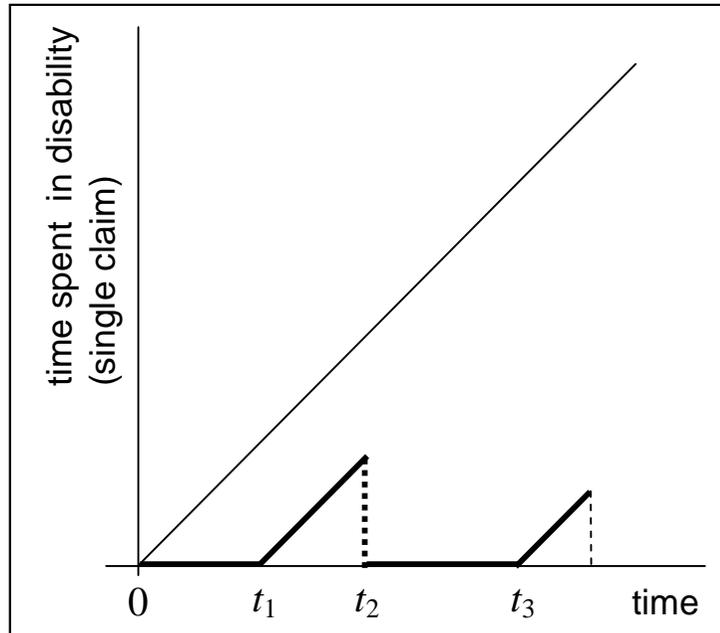
- r = tempo di stop (dalla stipulazione del contratto) del pagamento rendita; per esempio:
 - ▷ x = età alla stipulazione
 - ▷ ξ = età di pensionamentosi può porre: $r = \xi - x$

Rappresentazione grafica: ogni storia individuale rappresentata secondo la logica dei diagrammi di Lexis

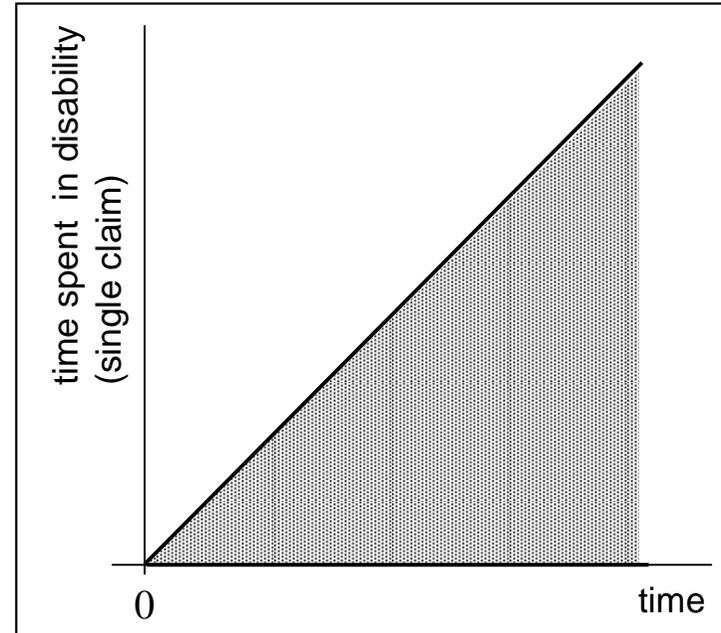
Nella Figura seguente:

- tratti orizzontali \Rightarrow periodi nello stato a
- tratti con pendenza $45^\circ \Rightarrow$ periodi nello stato i

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Un esempio di storia individuale



La regione delle possibili storie

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Esempio 1

Riferimento: rendita pagabile al max fino alla scadenza m ;
 assenza di carenza e franchigia

Condizioni:

$$\Gamma = [0, m, 0, \infty, m]$$

Calcolo del premio unico:

$$\Pi = a_{x:m}^{ai} = \underbrace{\sum_{j=1}^m}_{\uparrow} j-1 p_x^{aa} p_{x+j-1}^{ai} \left[\underbrace{\sum_{h=j}^m}_{\uparrow} v^h \underbrace{h-j p_{x+j}^{ii}}_{\text{addendi I somma}} \right]_{\text{addendi II somma}}$$

Π = somma doppia (integrale doppio, in contesto a tempo continuo) di valori su “regione” definita dalle condizioni contrattuali

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Esempio 2

Riferimento: rendita pagabile per s anni al max; assenza di carenza e franchigia

Condizioni:

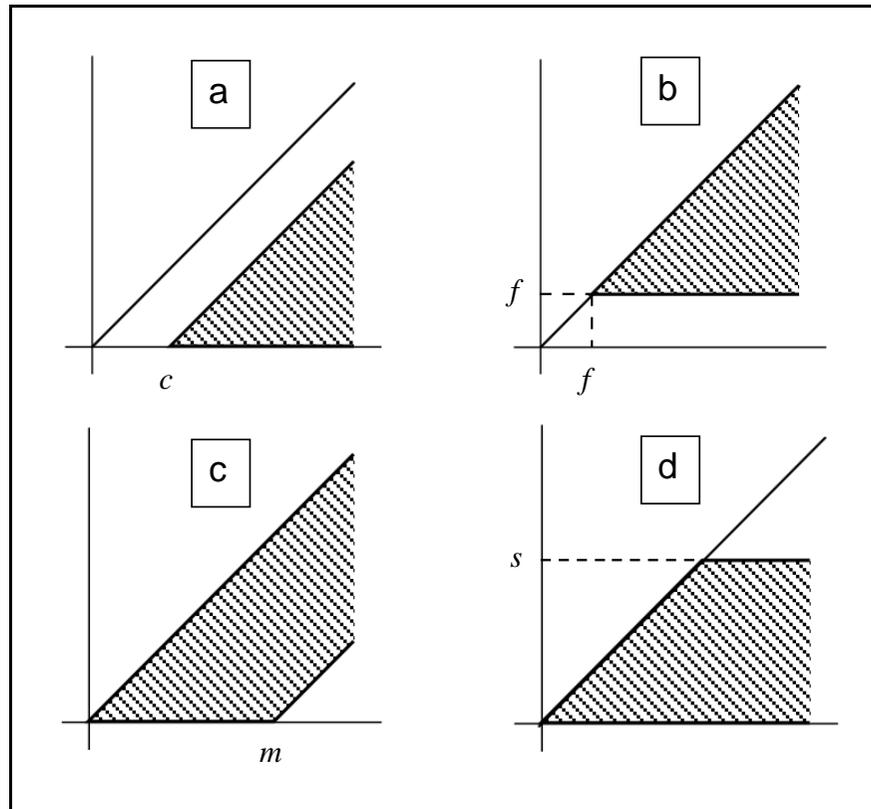
$$\Gamma = [0, m, 0, s, \infty]$$

Calcolo del premio unico:

$$\begin{aligned}
 \Pi = a_{x:m;s}^{ai} &= \underbrace{\sum_{j=1}^m}_{\uparrow} \underbrace{j-1 p_x^{aa} p_{x+j-1}^{ai}}_{\uparrow} \left[\underbrace{\sum_{h=j}^{j+s-1} v^h}_{\uparrow} \underbrace{h-j p_{x+j}^{ii}}_{\text{addendi I somma}} \right] \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{addendi II somma}}
 \end{aligned}$$

Altre condizioni contrattuali: vedi Figure seguenti

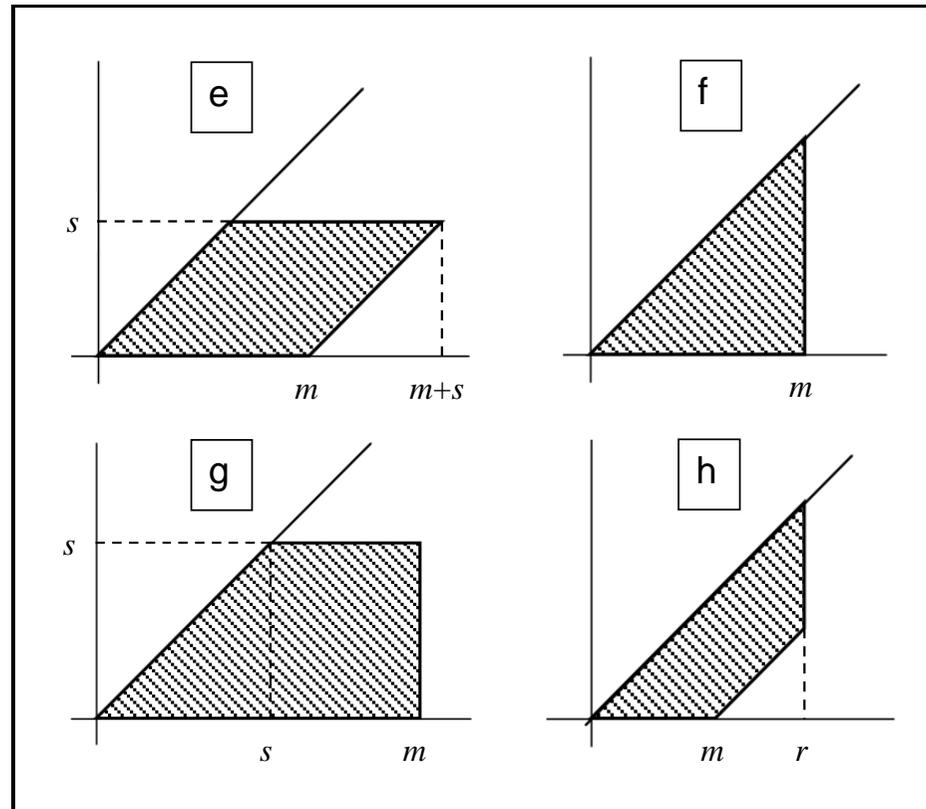
Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Condizioni contrattuali

- (a) $\Gamma = [c, \infty, 0, \infty, \infty]$
- (b) $\Gamma = [0, \infty, f, \infty, \infty]$
- (c) $\Gamma = [0, m, 0, \infty, \infty]$
- (d) $\Gamma = [0, \infty, 0, s, \infty]$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Condizioni contrattuali

(e) $\Gamma = [0, m, 0, s, \infty]$

(f) $\Gamma = [0, m, 0, \infty, m]$

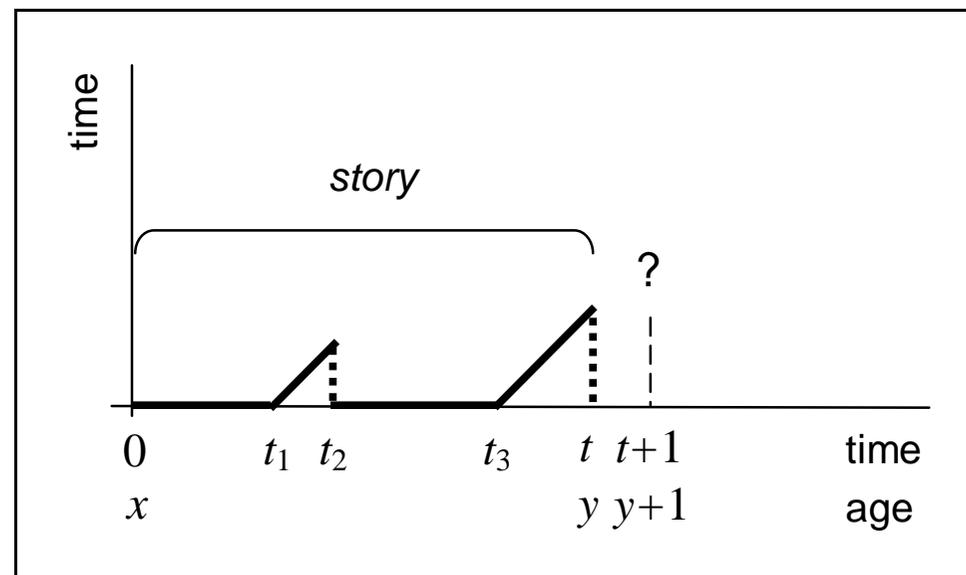
(g) $\Gamma = [0, m, 0, s, m]$

(h) $\Gamma = [0, m, 0, \infty, r]$

MODELLI “SELEZIONATI”

Con riferimento alla Figura seguente:

- ▷ valutazione (in t) di probabilità relative allo stato in $t + 1$
- ▷ informazione disponibile: storia individuale da 0 a t , espressa da $((a, i, a, i); (t_1, t_2, t_3, t))$



Storia di un rischio assicurato

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Per esempio, in relazione alla transizione $i \rightarrow a$ tra le età y e $y + 1$, si possono considerare le seguenti probabilità:

- (1) $\mathbb{P}[\text{in } a \text{ ad età } y + 1 \mid \text{tempo dalla stipulazione}]$
- (2) $\mathbb{P}[\text{in } a \text{ ad età } y + 1 \mid \text{storia fino all'età } y]$
- (3) $\mathbb{P}[\text{in } a \text{ ad età } y + 1 \mid \text{tempo totale in } i \text{ fino all'età } y]$
- (4) $\mathbb{P}[\text{in } a \text{ ad età } y + 1 \mid \text{tempo in } i \text{ dall'ultimo ingresso in } i]$
- (5) $\mathbb{P}[\text{in } a \text{ ad età } y + 1 \mid \text{numero di ingressi in } i \text{ fino all'età } y]$
- (6) $\mathbb{P}[\text{in } a \text{ ad età } y + 1 \mid \text{in } i \text{ all'età } y]$

Nella Figura:

- (1) tempo = t (*antidurata del contratto*)
- (2) storia = $(a, i, a, i; t_1, t_2, t_3)$
- (3) tempo totale = $(t_2 - t_1) + (t - t_3)$
- (4) tempo = $(t - t_3)$ (*antidurata dell'invalidità*)
- (5) numero di ingressi in $i = 2$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Aspetti probabilistici e computazionali

(2) \Rightarrow difficoltà nel definire modelli appropriati

(6) \Rightarrow modello Markoviano, semplice implementazione

Probabilità finora definite ed applicate

$$p_y^{aa}, p_y^{ia}, \dots, q_y^{aa}, q_y^i, \dots$$

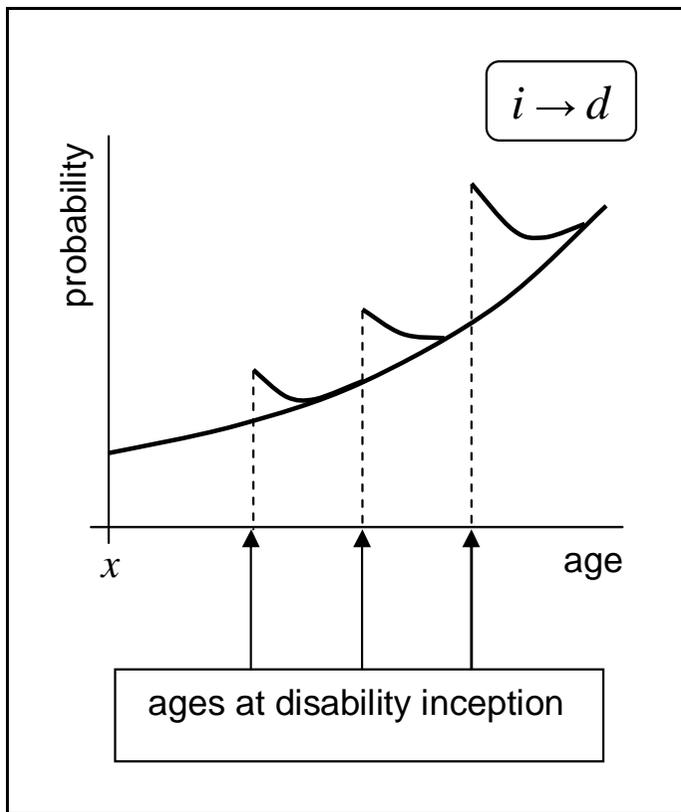
sono funzioni dell'età y , condizionate allo stato occupato ad età y , ma indipendenti dalla storia precedente (in particolare, dal tempo eventualmente già trascorso in invalidità) \Rightarrow modello Markoviano

(1), (3), (4), (5) \Rightarrow modelli non-Markoviani (in particolare semi-Markoviani); possibile shift a modelli Markoviani mediante approssimazioni

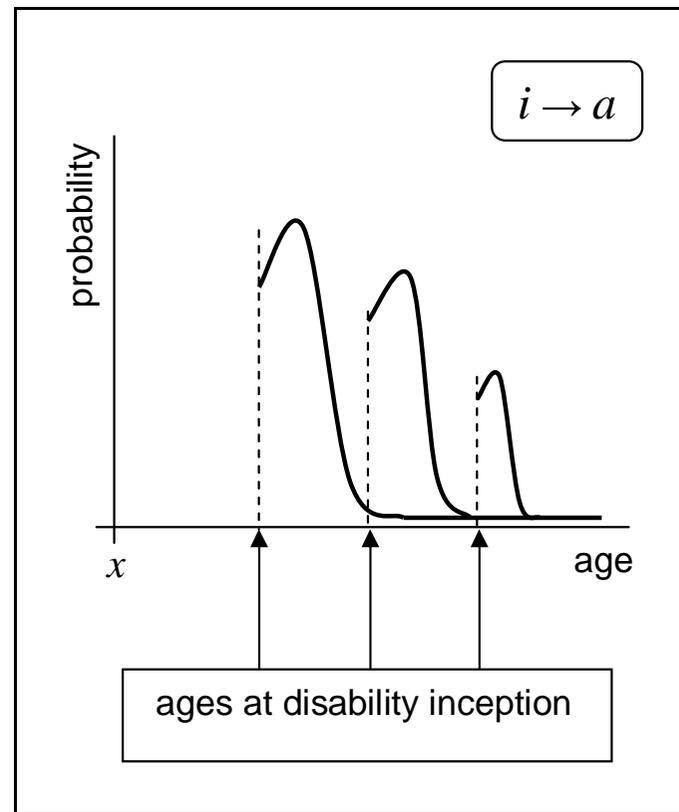
Evidenze statistiche \Rightarrow interesse pratico dei modelli non-Markoviani (in particolare modello (4))

Vedi Figure seguenti

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



(a)



(b)

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Probabilità relative a un assicurato di età y , dipendenti dal tempo trascorso in invalidità (antidurata) secondo il modello (4)

⇒ probabilità *inception-select*

Ipotesi:

- ▷ inizio dell'invalidità ad età $y =$ entrato in invalidità tra $y - 1$ e y
- ▷ $z =$ parte intera dell'effettiva durata di invalidità

Esempi

- $p_{[y]}^{ia} = \mathbb{P}[\text{attivo ad età } y + 1 \mid \text{inizio dell'invalidità ad età } y]$
(antidurata di invalidità = 0)
- $p_{[y-z]+z}^{ia} = \mathbb{P}[\text{attivo ad età } y + 1 \mid \text{inizio dell'invalidità ad età } y - z]$
(antidurata di invalidità = z)
- $kP_{[y]}^{ii} = \mathbb{P}[\text{invalido fino all'età } y + k \mid \text{inizio dell'invalidità ad età } y]$
(antidurata di invalidità = 0)

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

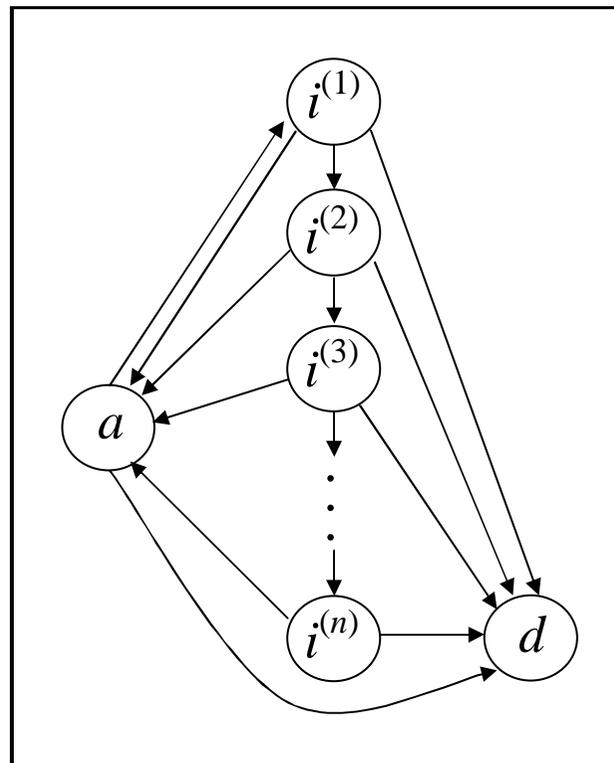
Valore attuariale inception-select di una rendita di invalidità pagata ad un assicurato di età y entrato in invalidità ad età $y - z$ (quindi con antidurata z , assunta intera):

- $\ddot{a}_{[y-z]+z:m-z+1}^{(i)}$ se la rendita è pagabile al max fino alla scadenza m
- $\ddot{a}_{[y-z]+z:s-z-1}^{(i)}$ se la rendita è pagabile per s anni al max

⇒ valori attuariali da impiegare nel calcolo della riserva per invalidi

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Implementazione del modello (4) (probabilità dipendenti dal tempo trascorso nell'episodio corrente di invalidità) mediante modello Markoviano (*modello Olandese*)



Il modello "olandese"

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Definizione degli stati:

stato $i^{(1)}$ = invalido con antidurata di invalidità tra 0 e 1 ($z = 0$)

stato $i^{(2)}$ = invalido con antidurata di invalidità tra 1 and 2 ($z = 1$)

...

stato $i^{(n)}$ = invalido con antidurata di invalidità maggiore di $n - 1$ ($z > n - 1$)

Effetto dell'antidurata dell'invalidità \Rightarrow ragionevole assumere, ad esempio:

$$p_y^{i^{(1)}a} > p_y^{i^{(2)}a} > \dots > p_y^{i^{(n)}a} \geq 0$$

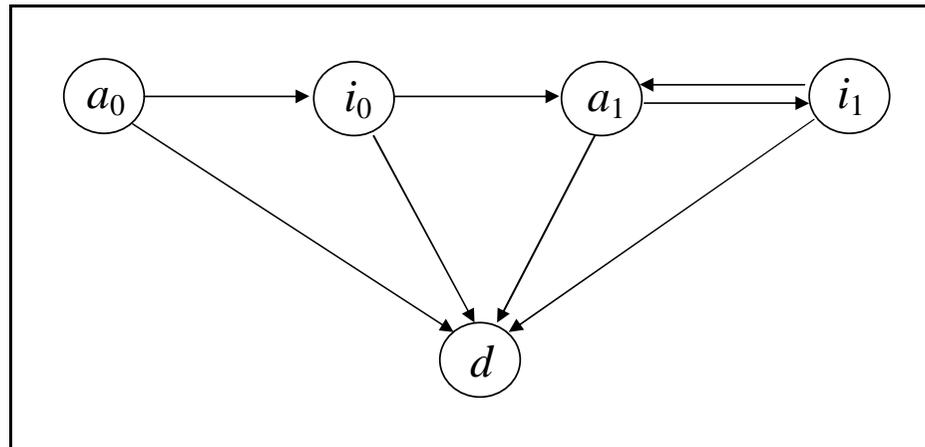
Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

stato ad età y	stato ad età $y + 1$					
	a	$i^{(1)}$	$i^{(2)}$	\dots	$i^{(n)}$	d
a	p_y^{aa}	$p_y^{ai^{(1)}}$	0	\dots	0	q_y^a
$i^{(1)}$	$p_y^{i^{(1)}a}$	0	$p_y^{i^{(1)}i^{(2)}}$	\dots	0	$q_y^{i^{(1)}}$
$i^{(2)}$	$p_y^{i^{(2)}a}$	0	0	\dots	0	$q_y^{i^{(2)}}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$i^{(n)}$	$p_y^{i^{(n)}a}$	0	0	\dots	$p_y^{i^{(n)}i^{(n)}}$	$q_y^{i^{(n)}}$
d	0	0	0	\dots	0	1

Probabilità condizionate di essere negli stati $a, i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(n)}, d$, ad età $y + 1$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Implementazione semplificata del modello (5) (probabilità dipendenti dal numero di precedenti episodi di invalidità) mediante modello Markoviano



Modello con stati attivo e invalido suddivisi in base ad esistenza o meno di precedenti episodi di invalidità

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Definizione degli stati:

stato a_0 = attivo, senza precedenti episodi di invalidità

stato i_0 = invalido, senza precedenti episodi di invalidità

stato a_1 = attivo, con precedenti episodi di invalidità

stato i_1 = invalido, con precedenti episodi di invalidità

Ipotesi sottostanti: per assicurato con precedenti episodi di invalidità

- maggiore probabilità di invalidazioni
- maggiore probabilità di decesso
- minore probabilità di riattivazione

Ad esempio (per qualunque età y):

$$p_y^{i_0 a_1} > p_y^{i_1 a_1}; \quad p_y^{a_1 i_1} > p_y^{a_0 i_0}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità *(cont.)*

stato ad età y	stato ad età $y + 1$				
	a_0	i_0	a_1	i_1	d
a_0	$p_y^{a_0 a_0}$	$p_y^{a_0 i_0}$	0	0	$q_y^{a_0}$
i_0	0	$p_y^{i_0 i_0}$	$p_y^{i_0 a_1}$	0	$q_y^{i_0}$
a_1	0	0	$p_y^{a_1 a_1}$	$p_y^{a_1 i_1}$	$q_y^{a_1}$
i_1	0	0	$p_y^{i_1 a_1}$	$p_y^{i_1 i_1}$	$q_y^{i_1}$
d	0	0	0	0	1

Probabilità condizionate di essere negli stati a_0, i_0, a_1, i_1, d , ad età $y + 1$

METODI DI CALCOLO NELLA PRATICA ATTUARIALE

Implementazione di rigorosi modelli per assicurazioni di invalidità

⇒ richiesti numerosi dati statistici

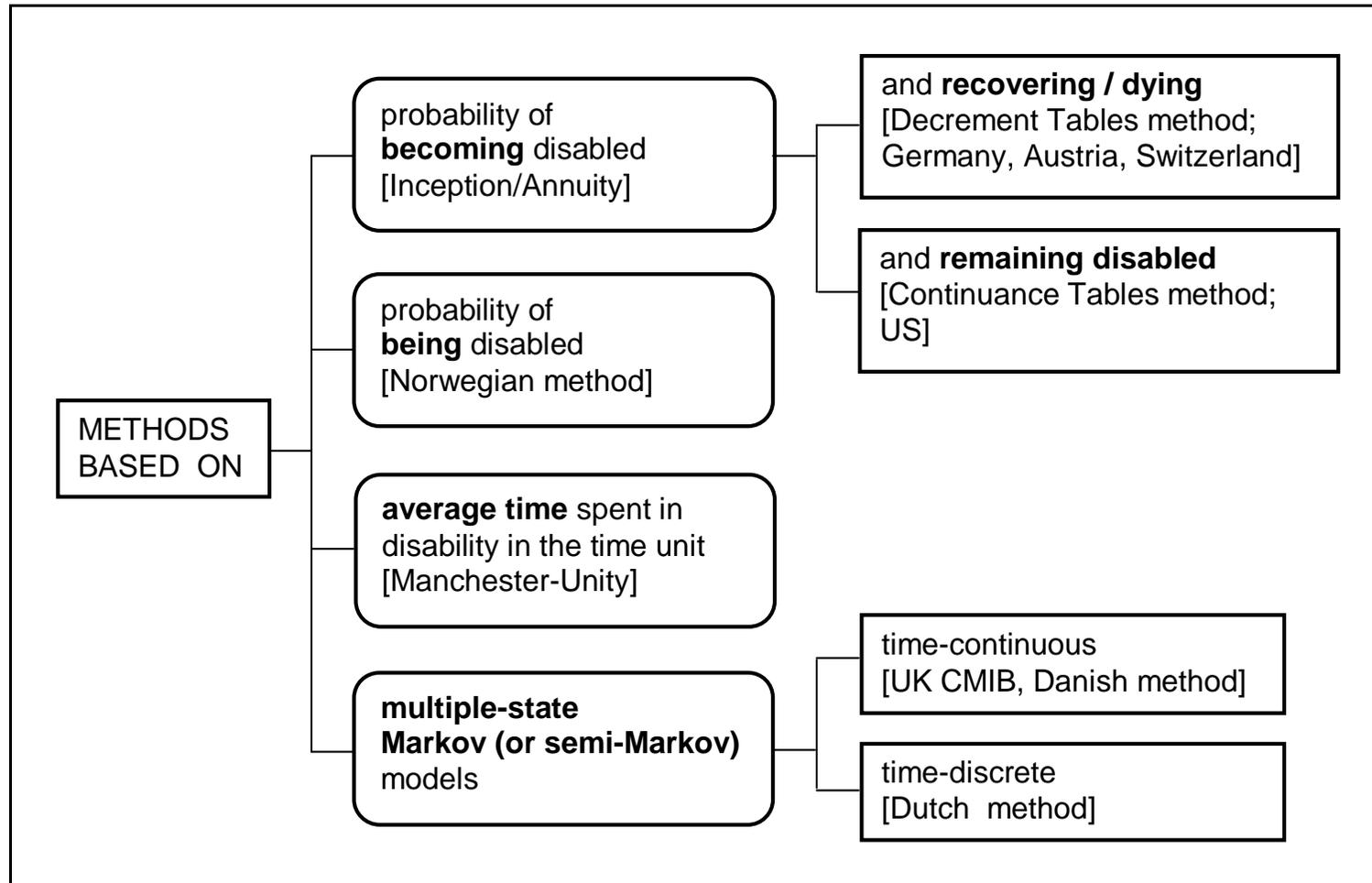
Nella pratica attuariale, dati spesso scarsi (in particolare in relazione a nuovi prodotti assicurativi) ⇒ procedure di calcolo semplificate (ed approx) per la determinazione di premi e riserve

Se dati statistici di un certo tipo e in un dato formato disponibili

⇒ procedure di calcolo approx spesso scelte in base a tipo e formato di dati disponibili

Figura seguente: classificazione di metodi di calcolo, in base al tipo e formato di dati disponibili

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)



Metodi di calcolo per assicurazioni di invalidità nella pratica attuariale

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi basati sulla probabilità di diventare invalido

Inception rate ad età y = frequenza con cui soggetti attivi diventano invalidi nell'anno di età tra y e $y + 1$ (esatte)

Inception rates ricavati da esperienze statistiche

⇒ possibile stima delle probabilità di diventare invalido

Diversi modelli attuariali basati sulla probabilità di diventare invalido, detti *modelli inception-annuity*, sono adottati in vari paesi (US, Germania, Austria, Svizzera, ...)

Metodo adottato in US (*continuance table method*) è basato anche sulle probabilità per una persona invalida di rimanere nello stato di invalidità per un dato tempo, cioè su una “continuance table”

Metodo adottato in Germania, Austria e Svizzera (*metodo delle decrement tables*) basato sulle probabilità di decesso e di riattivazione degli invalidi, cioè sulle probabilità delle due cause di uscita (decremento) dallo stato invalido

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi basati sulla probabilità di essere invalido

Dati statistici di invalidità spesso disponibili come *prevalence rates*

Prevalence rate di invalidità ad età y = numero di soggetti invalidi di età y (cioè tra le età esatte y e $y + 1$) diviso il numero di individui in vita ad età y

Prevalence rates \Rightarrow stima delle probabilità di essere invalido alle varie età

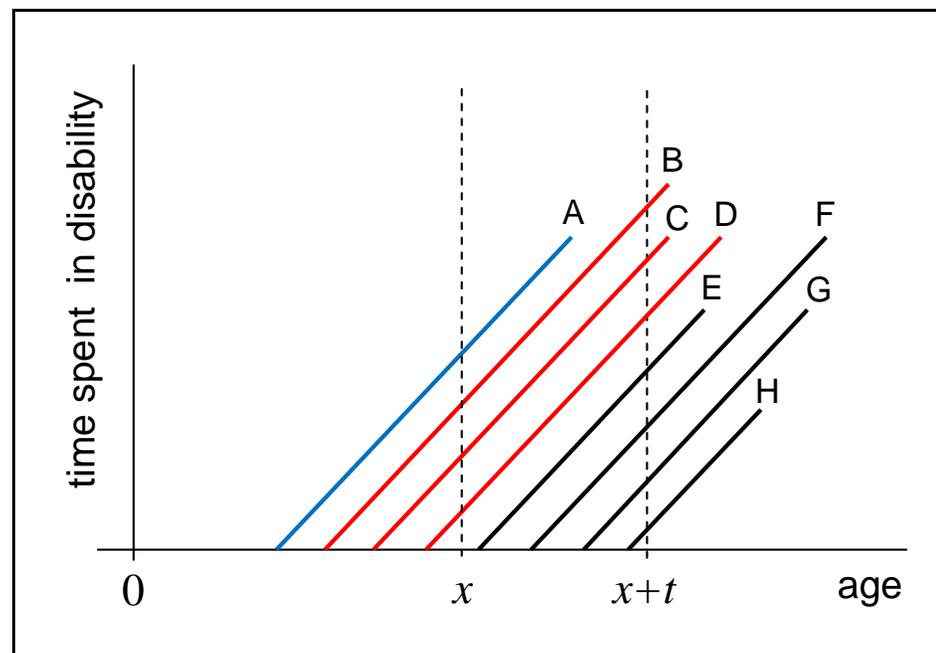
I prevalence rates non considerano la durata di presenza (in contratto assicurativo) \Rightarrow necessarie ipotesi per esprimere l'effetto della antidualità del contratto sulla probabilità di essere invalido (vedi Figura seguente)

Metodo attuariale basato sulle probabilità di essere invalido adottato in Norvegia

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Per soggetti entrati in assicurazione da attivi ad età x , le storie di invalidità A, B, C, D non sono ammissibili

Il prevalence rate ad età $x + t$ tiene conto di tutte le storie da B ad H, mentre B, C e D non sono ammissibili



Storie di invalidità in relazione alla probabilità di essere in invalidità

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi basati sul tempo medio trascorso in invalidità

Disability rate (o *central sickness rate*) ad età y = tempo medio trascorso in invalidità tra le età (esatte) y e $y + 1$ rapportato al tempo vissuto tra le età y e $y + 1$

Osservazione

Analogia con il *coefficiente di morbilità* (vedi Assicurazioni Malattia) per il quale si è assunto tempo vissuto = 1 anno per individuo

Questo indicatore può essere classificato come *persistence rate*

Sickness rates \Rightarrow stime dei tempi attesi trascorsi in invalidità alle varie età

Dati statistici di tipo sickness rates

\Rightarrow metodo “Manchester Unity” (o metodo delle “Friendly Society”), tradizionalmente applicato in UK, fino alla pubblicazione di dati statistici in nuovo formato da parte del Continuous Mortality Investigation (CMI) Bureau in 1991

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi basati sull'implementazione di modelli multistato Markoviani e semi-Markoviani

Modelli Markoviani e semi-Markoviani \Rightarrow impostazione matematicamente rigorosa per lo studio di problemi attuariali delle assicurazioni di persone e, in particolare, assicurazioni invalidità

Modelli multistato possono essere definiti a tempo discreto o a tempo continuo

Costituiscono strumento per interpretare vari metodi di calcolo pratico

Alcuni metodi usati nella pratica attuariale derivano direttamente dai modelli multistato

Esempi di modelli a tempo continuo:

- metodo Danese
- metodo proposto dal CMI Bureau in UK

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Esempi di modelli a tempo discreto:

- modello Olandese \Rightarrow possibilità (in un contesto Markoviano) di considerare l'effetto dell'antidurata di invalidità sulle probabilità di riattivazione e sulla mortalità degli invalidi

Osservazione

Classificazione adottata: basata sul tipo di approccio impiegato nella pratica attuariale nella definizione di formule di calcolo di premi e riserve, e non dalle caratteristiche risultanti nelle formule stesse. Esempio: i metodi inception - annuity possono essere collocati nell'ambito dei modelli Markoviani, sebbene la definizione delle relative formule di calcolo non faccia riferimento alle catene di Markov

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi inception - annuity: Continuance Table (US)

Condizioni contrattuali:

$$\Gamma \left[0, m, \frac{d}{12}, \infty, \xi - x \right]$$

con:

- ξ età fissata (ad es. pensionamento)
- differimento d mesi ($f = \frac{d}{12}$)
- pagamento della rendita su base mensile

Valore attuariale (premio unico puro):

$$\begin{aligned} \Pi &= a_{x:m|\xi, \frac{d}{12}}^{ai} = \\ &\sum_{h=0}^{m-1} v^{h+\frac{1}{2}+\frac{d}{12}} {}_h p_x^{aa} w_{x+h} \frac{d}{12} p_{[x+h+\frac{1}{2}]}^{ii} \ddot{a}_{[x+h+\frac{1}{2}]+\frac{d}{12}:\xi-x-h-\frac{1}{2}-\frac{d}{12}}^{(12)i} \end{aligned}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

dove:

- ▷ $x + h + \frac{1}{2}$ = età all'ingresso in invalidità
- ▷ $x + h + \frac{1}{2} + \frac{d}{12}$ = età alla fine del differimento
- ▷ w_{x+h} = prob. di diventare invalido tra età $x + h$ e $x + h + 1$
(*inception rate*)
- ▷ $\frac{d}{12} p_{[x+h+\frac{1}{2}]}^{ii}$ = probabilità (selezionata) di rimanere invalidi dall'età $x + h + \frac{1}{2}$ alla fine del differimento (ipotesi di distrib. temporale uniforme delle invalidazioni nell'anno)
- ▷ $\ddot{a}_{[x+h+\frac{1}{2}]+\frac{d}{12}:\xi-x-h-\frac{1}{2}-\frac{d}{12}]^{(12)i}}$ = valore attuariale (selezionato) della rendita di invalidità pagata anticipatamente su base mensile

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Semplificazioni adottate nella pratica attuariale

(1) “incorporare” la prob. ${}_{\frac{d}{12}}p_{[x+h+\frac{1}{2}]}^{ii}$ nel fattore w_{x+h}
(opportunamente stimato)

(2) usare comuni probabilità di sopravvivenza ${}_h p_x$ in luogo delle appropriate ${}_h p_x^{aa}$ (di difficile reperibilità)

(3) sostituire w_{x+h} (riferito agli attivi ad età $x+h$) con w'_{x+h} riferito al numero medio di persone attive tra età $x+h$ e $x+h+1$ (di più agevole stima); relazione

$$w_{x+h} = w'_{x+h} \left(1 - \frac{1}{2} q_{x+h}^{aa}\right)$$

e approx

$$w_{x+h} \approx w'_{x+h} \frac{1}{2} p_{x+h}$$

Da (1), (2) e (3) si ottiene:

$${}_h p_x^{aa} w_{x+h} {}_{\frac{d}{12}} p_{[x+h+\frac{1}{2}]}^{ii} \approx {}_h p_x w'_{x+h} \frac{1}{2} p_{x+h} \approx {}_{h+\frac{1}{2}} p_x w'_{x+h}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Formula approx risultante:

$$a_{x:m|\xi, \frac{d}{12}}^{ai} = \sum_{h=0}^{m-1} v^{h+\frac{1}{2}+\frac{d}{12}} {}_{h+\frac{1}{2}}p_x w'_{x+h} \ddot{a}_{[x+h+\frac{1}{2}]+\frac{d}{12}:\xi-x-h-\frac{1}{2}-\frac{d}{12}}^{(12)i}$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi inception - annuity: Decrement Table (Germania)

Condizioni contrattuali:

$$\Gamma[0, m, 0, \infty, m]$$

Pagamento della rendita su base annuale

Valore attuariale (premio unico puro):

$$a_{x:m}^{ai} = \sum_{h=0}^{m-1} v^{h+\frac{1}{2}} {}_h p_x^{aa} \left(1 - \frac{1}{2} q_{x+h}^{aa} \right) w'_{x+h} \frac{\ddot{a}_{[x+h]:m-h}^i + \ddot{a}_{[x+h+1]:m-h-1}^i}{2}$$

con:

- ▷ $\ddot{a}_{[x+h]:m-h}^i$ = valore attuariale (selezionato) di una rendita di invalidità pagabile anticipatamente agli anniversari di contratto, fino all'epoca m al massimo

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

▷ risulta:

$$\ddot{a}_{[x+h]:m-h}^i = \sum_{k=0}^{m-h-1} v^k {}_k p_{[x+h]}^{ii}$$

▷ $q_{x+h}^{aa} w'_{x+h} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$: vedi metodo US

▷ interpolazione lineare per il valore attuariale (selezionato) di una rendita d'invalidità che inizia tra età $x + h$ e $x + h + 1$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi inception - annuity: Decrement Table (Austria)

Condizioni contrattuali:

$$\Gamma[0, m, 0, \infty, r]$$

Pagamento della rendita su base annuale

Valore attuariale (premio unico puro):

$$a_{x:m}^{ai} = \sum_{h=0}^{m-1} v^{h+\frac{1}{2}} {}_h p_x^{aa} w_{x+h} \frac{\ddot{a}_{[x+h]:r-h}^i + \ddot{a}_{[x+h+1]:r-h-1}^i}{2}$$

- ▷ fattore $(1 - \frac{1}{2}q_{x+h}^{aa})$ non appare in quanto sono usate probabilità del tipo w_{x+h} , che lo includono (vedi sopra), anziché w'_{x+h}
- ▷ interpolazione lineare per il valore attuariale (selezionato) di una rendita d'invalidità che inizia tra età $x + h$ e $x + h + 1$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodi inception - annuity: Decrement Table (Svizzera)

Condizioni contrattuali:

$$\Gamma[0, m, 0, \infty, m]$$

Pagamento della rendita su base annuale

In caso di invalidità parziale, rata della rendita proporzionale al grado di invalidità \Rightarrow fattore g_{x+h} ($0 < g_{x+h} \leq 1$) = grado medio di invalidità tra gli assicurati invalidi di età $x + h$

Valore attuariale (premio unico puro):

$$a_{x:m}^{ai} = \sum_{h=0}^{m-1} v^{h+\frac{1}{2}} {}_{h+\frac{1}{2}}p_x w'_{x+h} g_{x+h} \frac{\ddot{a}_{[x+h]:m-h}^i + \ddot{a}_{[x+h+1]:m-h-1}^i}{2}$$

▷ uso di una tavola di mortalità ordinaria: probabilità ${}_{h+\frac{1}{2}}p_x$, anziché

$${}_{h+\frac{1}{2}}p_x^{aa}$$

▷ interpolazione lineare per il valore attuariale (selezionato) di una rendita d'invalidità che inizia tra $x + h$ e $x + h + 1$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodo Norvegese

Formula a tempo discreto basata sulla probabilità di essere invalido ad età $x + h$ (per un attivo di età x):

$$a_{x:m] }^{ai} = \sum_{h=1}^m v^h {}_h p_x^{ai}$$

In ambito continuo, assumendo che la rendita di invalidità sia pagata nel continuo (importo dt nell'intervallo $(t, t + dt)$)

$$\bar{a}_{x:m] }^{ai} = \int_0^m v^t {}_t p_x^{ai} dt$$

Sia

$$j_{(x)+t} = \mathbb{P}[\text{invalido ad età } x + t \mid \text{attivo ad età } x \text{ ed in vita ad età } x + t]$$

Nota: $j_{(x)+t}$ funzione delle variabili x e t

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Risulta

$${}_t p_x^{ai} = ({}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}) j_{(x)+t}$$

e quindi

$$\bar{a}_{x:m}^{ai} = \int_0^m v^t ({}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}) j_{(x)+t} dt \quad (*)$$

Con l'approssimazione

$$({}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}) \approx {}_t p_x$$

si trova la formula del “metodo norvegese”

$$\bar{a}_{x:m}^{ai} = \int_0^m v^t {}_t p_x j_{(x)+t} dt \quad (^\circ)$$

Quantità $j_{(x)+t}$: *prevalence rate*

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Applicabilità immediata all'invalidità parziale

- ▷ ipotesi: pagamenti proporzionali al grado di invalidità
- ▷ $g_{x,t}$ = grado medio di invalidità per un assicurato invalido ad età $x + t$, attivo ad età x ($0 < g_{x,t} \leq 1$)

- ▷ formula esatta per tener conto del grado di invalidità

$$\bar{a}_{x:m|}^{ai} = \int_0^m v^t {}_t p_x^{ai} g_{x,t} dt \quad (**)$$

- ▷ uguagliando le funzioni integrande in (*) e (**) si trova

$$j_{(x)+t} = {}_t p_x^{ai} \frac{g_{x,t}}{{}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}}$$

- ▷ $j_{(x)+t}$ (nella formula (°)) interpretabile come grado atteso di invalidità ad età $x + t$ per un assicurato attivo ad età x ed in vita ad età $x + t$
- ▷ necessità di stime statistiche coerenti con tale significato

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Metodo Manchester/Unity (o “Friendly Society”)

Si consideri la formula (°) (metodo norvegese) e si sostituisca $j_{(x)+t}$ con

$$f_{x+t} = \mathbb{P}[\text{invalido ad età } x + t \mid \text{in vita ad età } x + t]$$

Si ottiene

$$\bar{a}_{x:m}^{ai} = \int_0^m v^t {}_t p_x f_{x+t} dt = \frac{1}{l_x} \int_0^m v^t l_{x+t} f_{x+t} dt$$

con $\frac{l_{x+t}}{l_x} = {}_t p_x$, e l funzione ordinaria di sopravvivenza

La funzione f_{x+t} dipende dalla sola età raggiunta $x + t$

- ▷ trascurato lo stato attivo ad età x
- ▷ ogni età precedente $x + t$ è considerata come possibile età di inizio dell'invalidità, che invece può essere iniziata solo dopo x

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

- ▷ sovrastima delle probabilità di essere invalido se la stima proviene da portafogli “maturi”, quindi con casi di invalidità più numerosi che in portafogli nuovi

Approssimazione

$$\frac{1}{l_x} \int_0^m v^t l_{x+t} f_{x+t} dt = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^m \int_0^1 l_{x+h-1+\tau} f_{x+h-1+\tau} v^{h-1+\tau} d\tau$$
$$\approx \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^m l_{x+h-\frac{1}{2}} v^{h-\frac{1}{2}} \frac{\int_0^1 l_{x+h-1+\tau} f_{x+h-1+\tau} d\tau}{\int_0^1 l_{x+h-1+\tau} d\tau}$$

avendo assunto:

$$l_{x+h-\frac{1}{2}} \simeq \int_0^1 l_{x+h-1+\tau} d\tau$$

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Si definisca la funzione

$$\theta_y = \frac{\int_0^1 \ell_{y+\tau} f_{y+\tau} d\tau}{\int_0^1 \ell_{y+\tau} d\tau}$$

▷ significato:

$$\frac{\text{tempo atteso in invalidità tra età } y \text{ e } y + 1}{\text{tempo atteso vissuto tra età } y \text{ e } y + 1}$$

▷ *persistency rate* (“central sickness rate” nella terminologia UK)

Si trova

$$\bar{a}_{x:m|}^{ai} \approx \frac{1}{\ell_x} \sum_{h=1}^m \ell_{x+h-\frac{1}{2}} v^{h-\frac{1}{2}} \theta_{x+h-1}$$

- ▷ formula “Manchester Unity”: metodo tradizionale britannico
- ▷ impiego giustificato dal formato dei dati statistici disponibili

Modelli attuariali per le rendite di invalidità (cont.)

Applicazione a contratti con limitazioni temporali

▷ Si definisca

$$f_y^{h/k} = \mathbb{P}[\text{invalido ad età } y \text{ con antidurata tra } h \text{ e } h + k \mid \text{in vita ad età } y]$$

e quindi

$$\theta_y^{h/k} = \frac{\text{tempo atteso in invalidità tra età } y \text{ e } y + 1 \text{ con antidurata tra } h \text{ e } h + k}{\text{tempo atteso vissuto tra età } y \text{ e } y + 1}$$

▷ Valore attuariale

$$\bar{a}_{x:m}^{ai(h/k)} \approx \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^m l_{x+h-\frac{1}{2}} v^{h-\frac{1}{2}} \theta_{x+h-1}^{h/k}$$

▷ Formula impiegabile per tener conto di periodi di differimento (tramite h) e di massima durata di pagamento (tramite k)