

TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI DI PERSONE

GESTIONE DI UN PORTAFOGLIO DI RISCHI ELEMENTARI

Ermanno Pitacco



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE



Agenda

1. Introduzione
2. Risk pooling
3. Riassicurazione

1 INTRODUZIONE

Significato di “rischio”

Nel linguaggio matematico, probabilistico, ecc., “rischio” è una variabile aleatoria (v.a.) X

Nel linguaggio assicurativo, “rischio” ha vari significati (formalmente riconducibili al significato matematico)

- livello “contrattuale”
 - ▷ esempi: rischio assicurato, selezione dei rischi, rischio aggravato, capitale sotto rischio, premio di rischio
 - ▷ espressioni quantitative: pagamento aleatorio del capitale assicurato, del capitale sotto rischio, ecc.
- livello “gestionale”
 - ▷ esempi: rischio di mercato (finanziario), rischio di mortalità, rischi operativi
 - ▷ espressioni quantitative: risultati di portafoglio o di impresa (cash flow, utile, capitale proprio, ecc.) su cui incidono fatti finanziari, demografici, ecc., con possibili esiti negativi (rischio di “default” \Rightarrow downside risk)

Ruolo dell'assicuratore

1. “Trasformazione” dei rischi (assicurati) e intermediazione nel processo di mutualità
 - (a) costruzione di un *pool* (portafoglio)
 - (b) passaggio da *rischi puri* a *rischio speculativo*
2. Gestione dell'aleatorietà del risultato di portafoglio
3. Intermediazione finanziaria

Costruzione di un pool

- rischi individuali

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$$

ad es. risarcimenti, pagamenti di capitali assicurati, ...

- payout totale relativo al pool

$$X^{[P]} = X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}$$

- effetti

- ▷ la variabilità totale (ad es. in termini di varianza del payout) aumenta all'aumentare della dimensione n del pool
- ▷ la variabilità relativa (per singolo rischio), causata da scarti accidentali, diminuisce

Da rischi puri a rischio speculativo

- premi individuali

$$\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \dots, \Pi^{(n)}$$

- introito totale

$$\Pi^{[P]} = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \dots + \Pi^{(n)}$$

- risultato totale prodotto dal pool

$$Z^{[P]} = \Pi^{[P]} - X^{[P]}$$

- trasformazione

- ▷ rischio individuale $X^{(j)}$ = “perdita” \Rightarrow rischio puro
- ▷ risultato $Z^{[P]} \underset{<}{\geq} 0 \Rightarrow$ rischio speculativo

Gestione dell'aleatorietà del risultato $Z^{[P]}$

- caricamento di sicurezza
- allocazione di capitale proprio (in base a requisiti di solvibilità)
- riassicurazione: trasferimento di (parti di) rischi a pool di dimensioni maggiori
- hedging “naturale”: contrapposizione di rischi “opposti”;
es. contratti con capitale sotto rischio positivo e contratti con capitale sotto rischio negativo
- eventuale trasferimento all'esterno del processo assicurativo-riassicurativo tradizionale: ART (Alternative Risk Transfers)
 - ▷ trasferimento ai mercati finanziari; esempi: CAT bonds, Mortality bonds, Longevity bonds

Intermediazione finanziaria

- investimento di mezzi (premi, riserve) a fronte degli impegni
- maggiore ammontare investito
 - ⇒ maggiore “diversificazione”
 - ⇒ minore rischio di investimento (di tasso, di credito, ecc.)

2 RISK POOLING

OBIETTIVI DELL'ANALISI

- Quantificare l'aleatorietà del risultato totale $Z^{[P]}$ di un portafoglio assicurativo, imputabile a scarti accidentali (“volatilità”), al fine di determinare:
 - ▷ caricamento di sicurezza
 - ▷ allocazione di capitale proprio
 - ▷ cessioni in riassicurazione
- Riferimento a coperture assicurative monoannuali “elementari” (rischi bernoulliani)
- Esempi (nelle assicurazioni vita)
 - ▷ assicurazioni monoannuali caso morte a premio naturale (es. in assicurazioni “di gruppo”)
 - ▷ “segmento” monoannuale di qualunque assicurazione pluriennale con capitale sotto rischio positivo

RISULTATO ATTESO E RISULTATO EFFETTIVO

Riferimento: portafoglio di n coperture assicurative elementari (in caso di sinistro, possibile danno di ammontare fissato = somma assicurata)

- ▷ tutte le somme assicurate = x
- ▷ portafoglio omogeneo in termini di probabilità di sinistro p

Sia f la frequenza relativa osservata di sinistro

$$f = \frac{k}{n}$$

con k numero osservato di sinistri

Se $f = p \Rightarrow$ equilibrio tecnico realizzato (assumendo un tasso di premio uguale a p):

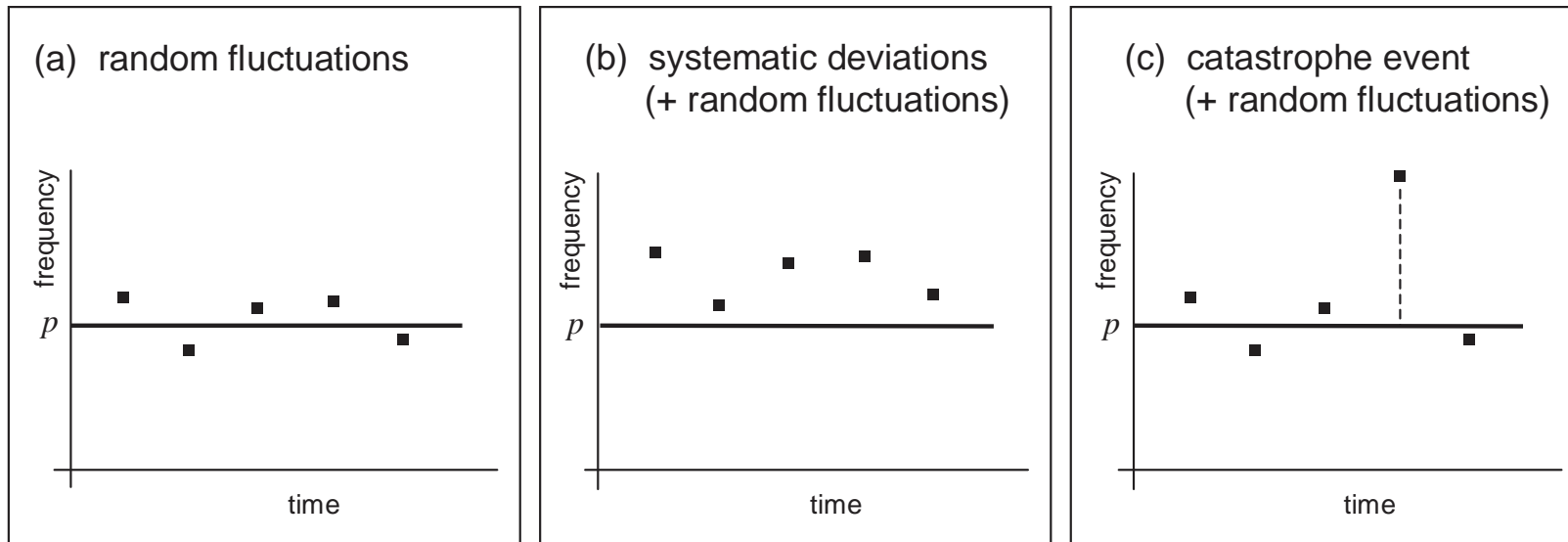
$$\underbrace{\sum_{j=1}^n P^{(j)}}_{\text{introito premi}} = \underbrace{nxp}_{\text{pagamento totale atteso}} = \underbrace{nxf}_{\text{pagamento totale effettivo}}$$

Se $f \neq p \Rightarrow$ equilibrio tecnico non realizzato (perdita se $f > p$)

Possibili cause (v. Figura):

- (a) la frequenza osservata fluttua attorno alla probabilità (cioè alla frequenza attesa): *rischio di scarti accidentali*, o *rischio di processo*
- (b) oltre agli scarti accidentali, deviazioni “sistematiche” dalla frequenza attesa, ad es. perché la valutazione della probabilità p non coglie la specifica natura dei rischi assicurati: *rischio di scarti sistematici*, o *rischio di incertezza* (incertezza nella quantificazione della frequenza attesa)
- (c) effetto di una “catastrofe” (elevatissimo numero di sinistri in un anno): *rischio catastrofale*

Risk pooling (cont.)



Probabilità e frequenza osservata

Tre *componenti* di rischio individuate

Tutte le componenti influiscono sul risultato del portafoglio

L'entità dell'impatto dipende dalla struttura del portafoglio, e dalla sua dimensione n in particolare

Risk pooling (cont.)

- La gravità del rischio di scarti accidentali diminuisce, in termini relativi, al crescere della dimensione del portafoglio: diretta conseguenza della costruzione di un pool (*effetto pooling*)
- La gravità del rischio di scarti sistematici è indipendente, in termini relativi, dalla dimensione del portafoglio: gli scarti sistematici riguardano il pool come *aggregato*; l'impatto totale cresce al crescere della dimensione del portafoglio
- La gravità del rischio catastrofe può essere maggiore a causa, ad es., di una forte concentrazione di rischi assicurati in una data area

MODELLO PROBABILISTICO. VALORI SINTETICI

Riferimento: portafoglio di n coperture assicurative elementari

Payout aleatorio dell'assicuratore per la generica copertura

$$X^{(j)} = \begin{cases} x^{(j)} & \text{in caso di sinistro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $x^{(j)}$ = somma assicurata

Si assuma che:

- ▷ il portafoglio sia omogeneo in termini di probabilità di sinistro, p , per ogni rischio assicurato
- ▷ le v.a. $X^{(j)}$ siano indipendenti

Premio equo (non comprendente il caricamento di sicurezza) dato da

$$P^{(j)} = \mathbb{E}[X^{(j)}] = x^{(j)} p$$

con p = probabilità “realistica”

A livello di portafoglio, sia $X^{[P]}$ il payout totale

$$X^{[P]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)}$$

con valore atteso

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = p \sum_{j=1}^n x^{(j)} = \sum_{j=1}^n P^{(j)}$$

Si indichi con $P^{[P]}$ tale valore atteso

Informazione sulla rischiosità data anzitutto dalla varianza del payout totale

Per il generico rischio assicurato, varianza del payout aleatorio data da

$$\text{Var}[X^{(j)}] = (x^{(j)})^2 p (1 - p)$$

Per il payout totale, grazie all'ipotesi di indipendenza:

$$\text{Var}[X^{[P]}] = \sum_{j=1}^n \text{Var}[X^{(j)}] = p (1 - p) \sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2$$

Relazione tra la varianza del payout totale e la struttura del portafoglio, in termini di somme assicurate:

- ▷ come la distribuzione delle somme assicurate influisce sulla rischiosità
- ▷ come la riassicurazione può ridurre la rischiosità

Siano \bar{x} la somma media assicurata

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x^{(j)}$$

e $\bar{x}^{(2)}$ il momento secondo della distribuzione delle somme assicurate

$$\bar{x}^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2$$

Si indichi con v la varianza della distribuzione delle somme assicurate

$$v = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x^{(j)} - \bar{x})^2$$

che può essere espressa come segue:

$$v = \bar{x}^{(2)} - (\bar{x})^2$$

Quindi

$$\text{Var}[X^{[P]}] = np(1-p)\bar{x}^{(2)} = np(1-p)(v + (\bar{x})^2)$$

⇒ per una data dimensione di portafoglio n ed una data somma assicurata media \bar{x} (e quindi un dato valore $(\bar{x})^2$), la varianza del payout totale è minore quando la varianza delle somme assicurate, v , è minore

⇒ varianza minima quando $v = 0$, cioè tutte i rischi hanno uguale somma assicurata (il payout totale dipende solo dal numero di sinistri nel portafoglio, ma non dipende da quali rischi sono colpiti da sinistro)

Si indichi con $\sigma^{[P]}$ lo scarto quadratico medio (sqm) di $X^{[P]}$

$$\sigma^{[P]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]}$$

Esempio

Tre portafogli, tutti con: $p = 0.005$, $n = 100\,000$, $\bar{x} = 1\,000$

Notare l'effetto della varianza delle somme assicurate sulla varianza del payout totale

Numero rischi	Somme assicurate	\bar{x}	$\bar{x}^{(2)}$	v	$\text{Var}[X^{[P]}]$	$\sigma^{[P]}$
100 000	1 000	1 000	1 000 000	0	497 500 000	22 304
50 000	800	1 000	1 040 000	40 000	517 400 000	22 746
50 000	1 200	1 000	1 040 000	40 000	517 400 000	22 746
70 000	500	1 000	3 625 000	2 625 000	1 803 437 500	42 467
25 000	1 000	1 000	3 625 000	2 625 000	1 803 437 500	42 467
5 000	8 000	1 000	3 625 000	2 625 000	1 803 437 500	42 467

Confronto tra portafogli con uguale dimensione e uguale somma media assicurata

INDICE DI RISCHIO

Possibilità di quantificare la rischiosità in un pool di rischi data dal *coefficiente di variazione* del payout totale $X^{[P]}$

Chiamato anche *indice di rischio* del portafoglio

Lo si indichi con ρ (sottintendendo il riferimento al payout totale $X^{[P]}$)

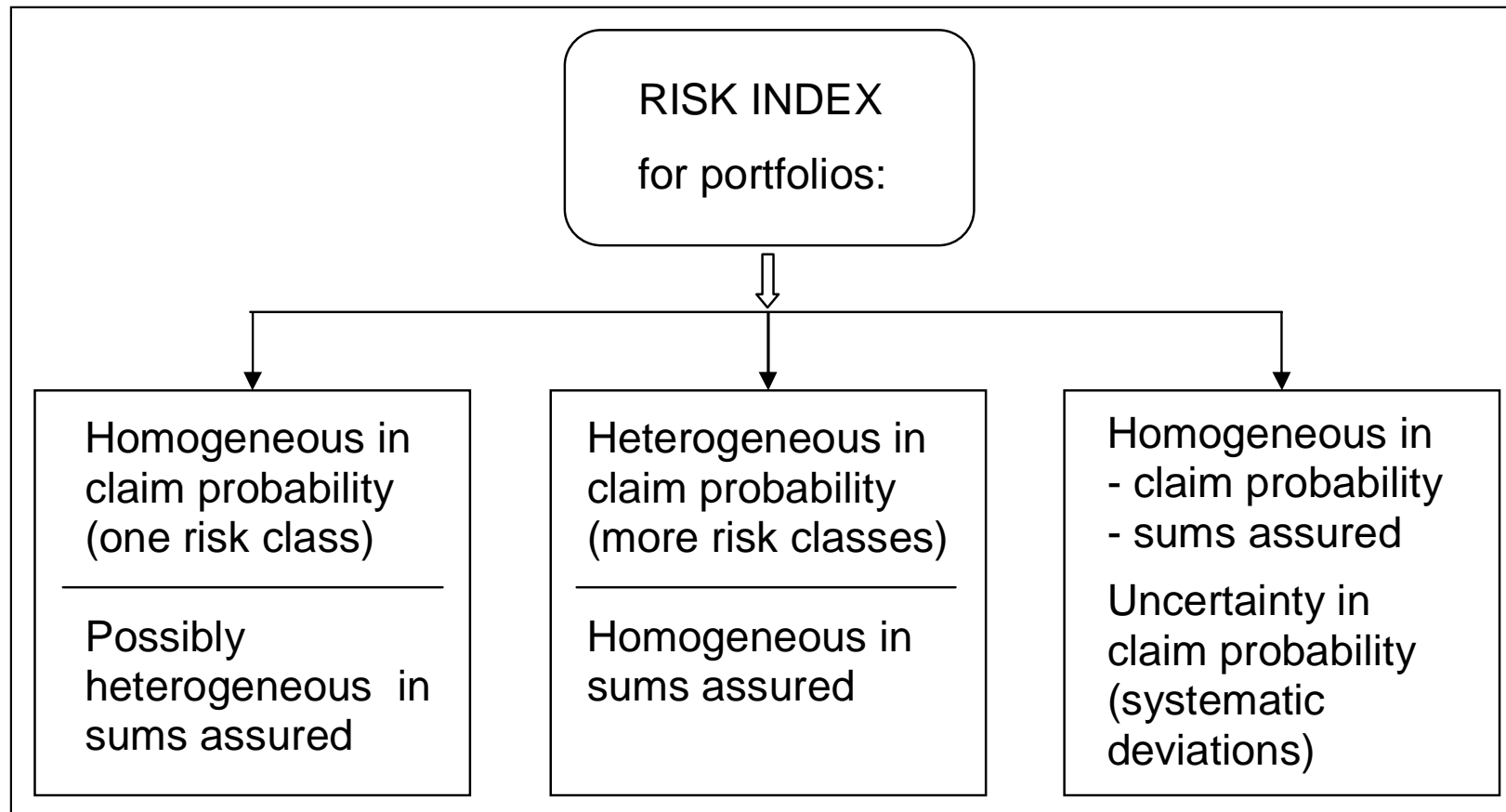
$$\rho = \text{CV}[X^{[P]}] = \frac{\sigma^{[P]}}{P^{[P]}}$$

dove $\sigma^{[P]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]}$ e $P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}]$

Analizzeremo l'indice di rischio in diverse strutture di portafoglio

Vedi schema seguente

Risk pooling (cont.)



Indice di rischio in diverse strutture di portafoglio

Portafogli con una classe di rischio

Legame tra indice di rischio e struttura del portafoglio, omogeneo in termini di probabilità p , ma con somme assicurate in generale diverse:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$$

Dalle precedenti equazioni ($\mathbb{E}[X^{[P]}]$ e $\text{Var}[X^{[P]}]$):

$$\rho = \sqrt{\frac{1-p}{p}} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2}}{\sum_{j=1}^n x^{(j)}} = \sqrt{\frac{1-p}{p}} \frac{\sqrt{n \bar{x}^{(2)}}}{n \bar{x}} = \sqrt{\frac{1-p}{np}} \frac{\sqrt{\bar{x}^{(2)}}}{\bar{x}} \quad (*)$$

Per una data dimensione di portafoglio n ed una data somma assicurata media \bar{x} , l'indice di rischio ρ è minore quando $\bar{x}^{(2)}$ è minore, e quindi la varianza v della distribuzione delle somme assicurate è minore

Se $x^{(j)} = x$ per $j = 1, 2, \dots, n$, si ha $v = 0$; allora:

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^2$$

e quindi:

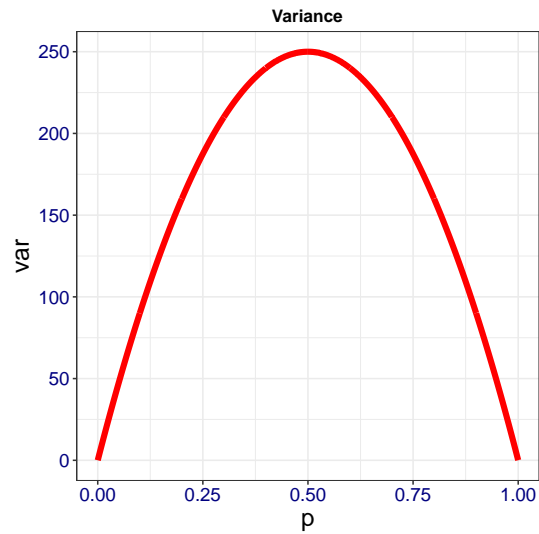
$$\rho = \sqrt{\frac{1-p}{np}}$$

Esempio 1

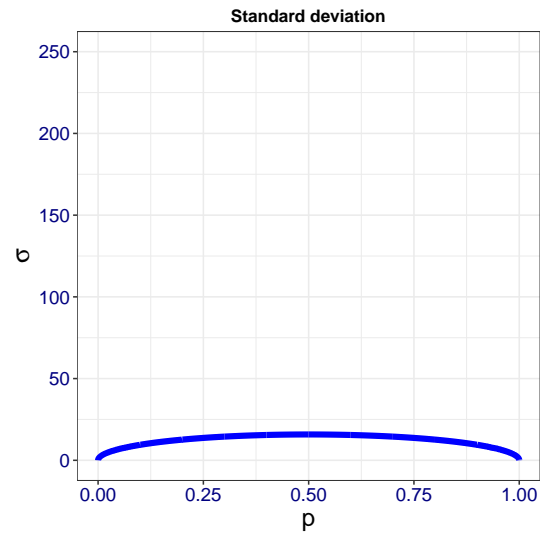
Misure di variabilità assolute (varianza e scarto quadratico medio) e relativa (indice di rischio) in funzione di p ;

$$x = 1, n = 1000$$

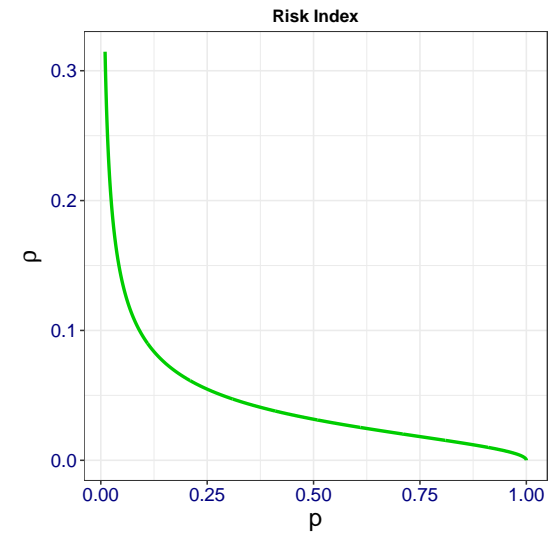
Risk pooling (cont.)



(a)



(b)



(c)

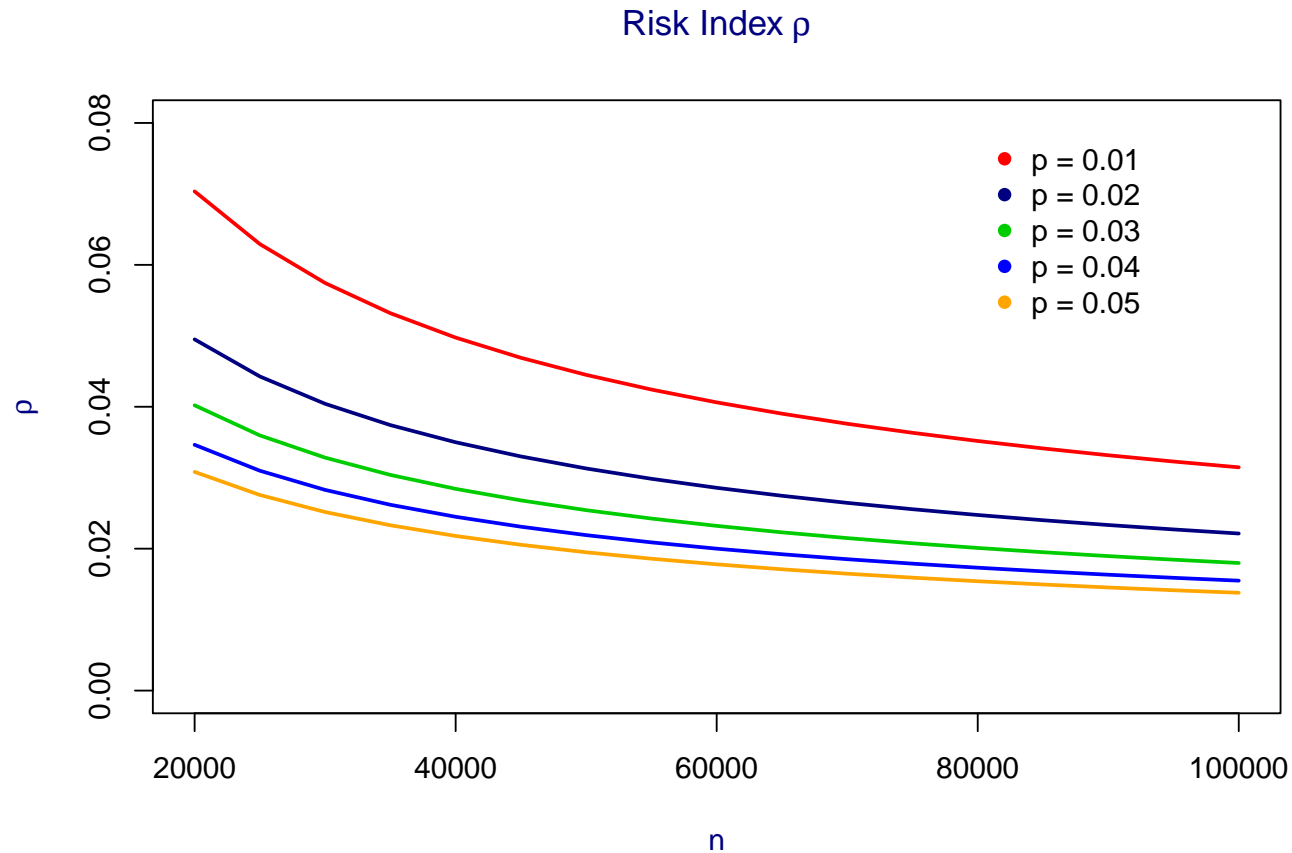
(a) $\text{Var}[X^{[P]}] = 1\,000 p (1 - p)$

(b) $\sigma^{[P]} = \sqrt{1\,000 p (1 - p)}$

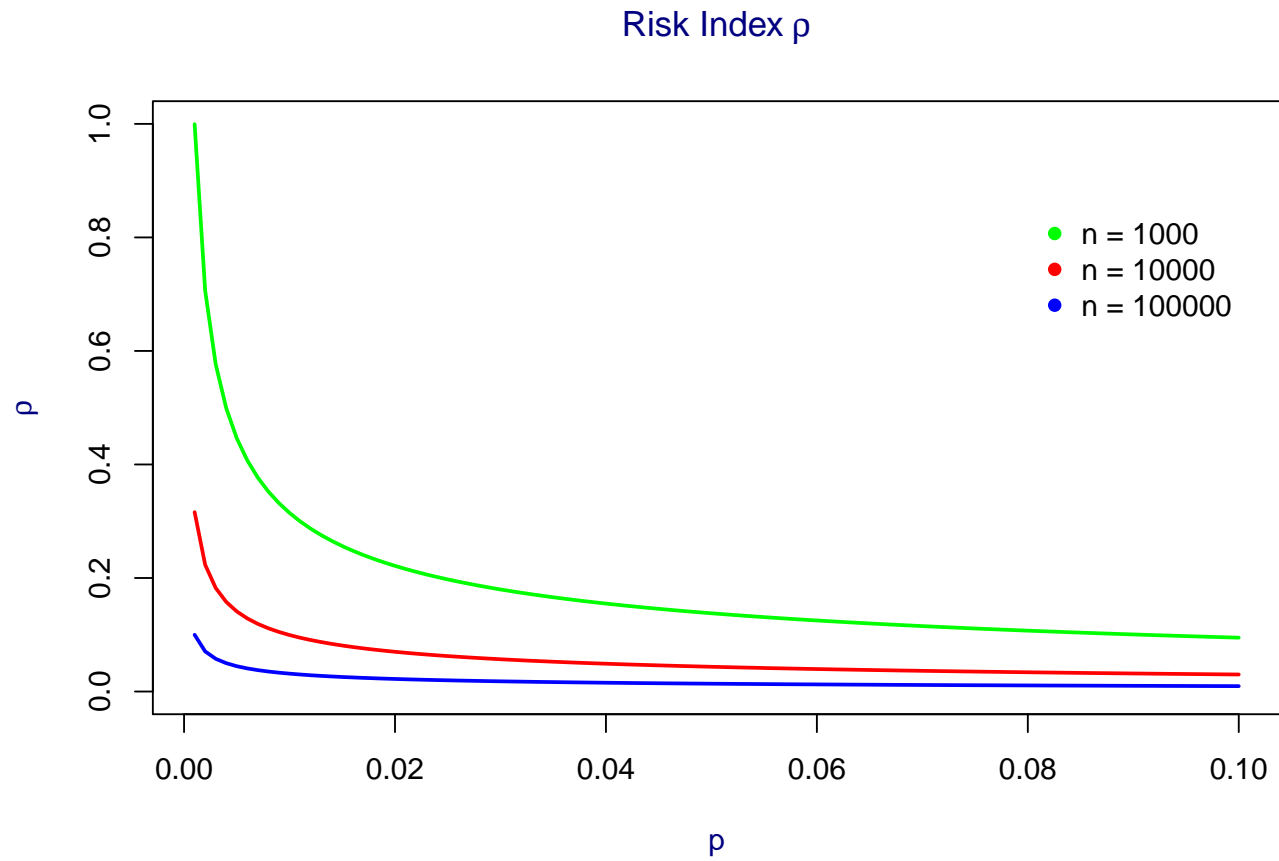
(c) $\rho = \sqrt{\frac{1 - p}{1\,000 p}}$

Esempio 2

Figure seguenti: ρ in funzione della dimensione n e della probabilità p , in portafogli con $x^{(j)} = x$ per $j = 1, 2, \dots, n$



Risk pooling (cont.)



Esempio 3

Le tab. seguenti si riferiscono a tre portafogli, tutti con $\bar{x} = 1\,000$ e probabilità di sinistro $p = 0.005$

I tre portafogli hanno differente dimensione, o differente struttura in termini di somme assicurate

- ▷ Confronto tra risultati del portafoglio A e del portafoglio B
⇒ entità dell'effetto pooling
- ▷ Confronto tra risultati del portafoglio A e del portafoglio C
⇒ effetto dell'eterogeneità delle somme assicurate

Risk pooling (cont.)

Numero rischi	Somma assicurata
100 000	1 000

Valori sintetici:

$$\bar{x} = 1\,000$$
$$v = 0$$
$$P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}] = 500\,000$$
$$\sigma^{[P]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]} = 22\,304$$
$$\rho = \frac{\sigma^{[P]}}{P^{[P]}} = 0.0446$$

Portafoglio A

Risk pooling (cont.)

Numero rischi	Somma assicurata
10 000	1 000

Valori sintetici:

$$\bar{x} = 1\,000$$
$$v = 0$$
$$P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}] = 50\,000$$
$$\sigma^{[P]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]} = 7\,053$$
$$\rho = \frac{\sigma^{[P]}}{P^{[P]}} = 0.1411$$

Portafoglio B

Risk pooling (cont.)

Numero rischi	Somma assicurata
70 000	500
25 000	1 000
5 000	8 000
Valori sintetici:	$\bar{x} = 1000$ $v = 2\,625\,000$ $P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}] = 500\,000$ $\sigma^{[P]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]} = 42\,467$ $\rho = \frac{\sigma^{[P]}}{P^{[P]}} = 0.0849$

Portafoglio C

Range di valori dell'indice di rischio ρ , per data dimensione di portafoglio n , probabilità di sinistro p , e somma media assicurata \bar{x}

Consideriamo le seguenti strutture di portafoglio:

1. $x^{(j)} = \bar{x}$, per $j = 1, 2, \dots, n$; si ha:

$$\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2}}{\sum_{j=1}^n x^{(j)}} = \frac{\sqrt{n \bar{x}^2}}{n \bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. $x^{(1)} = n \bar{x}$; $x^{(j)} = 0$, per $j = 2, \dots, n$; si ha:

$$\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2}}{\sum_{j=1}^n x^{(j)}} = \frac{\sqrt{(n \bar{x})^2}}{n \bar{x}} = 1$$

Si può provare che i risultati sub 1 e 2 costituiscono limitazioni inferiore

e superiore per $\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2}}{\sum_{j=1}^n x^{(j)}}$

Quindi, dalla Eq. (*):

$$\sqrt{\frac{1-p}{np}} \leq \rho \leq \sqrt{\frac{1-p}{p}}$$

Si noti che:

- la struttura di portafoglio 2 non ha significato pratico
- interpretazione della limitazione superiore: se in un portafoglio una somma assicurata è molto grande rispetto a tutte le altre, il vantaggio dato dalla dimensione del portafoglio svanisce, e la rischiosità è approx uguale a quella di un portafoglio costituito da un unico rischio assicurato

Esempio 4

Si considerino i seguenti portafogli, tutti con dimensione n e con $\bar{x} = 1\,000$

PTF 1 (minima varianza)

$$n \text{ somme assicurate} = 1\,000$$

PTF 2

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 800$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 900$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 1\,000$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 1\,100$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 1\,200$$

PTF 3 (massima varianza)

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 400$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 700$$

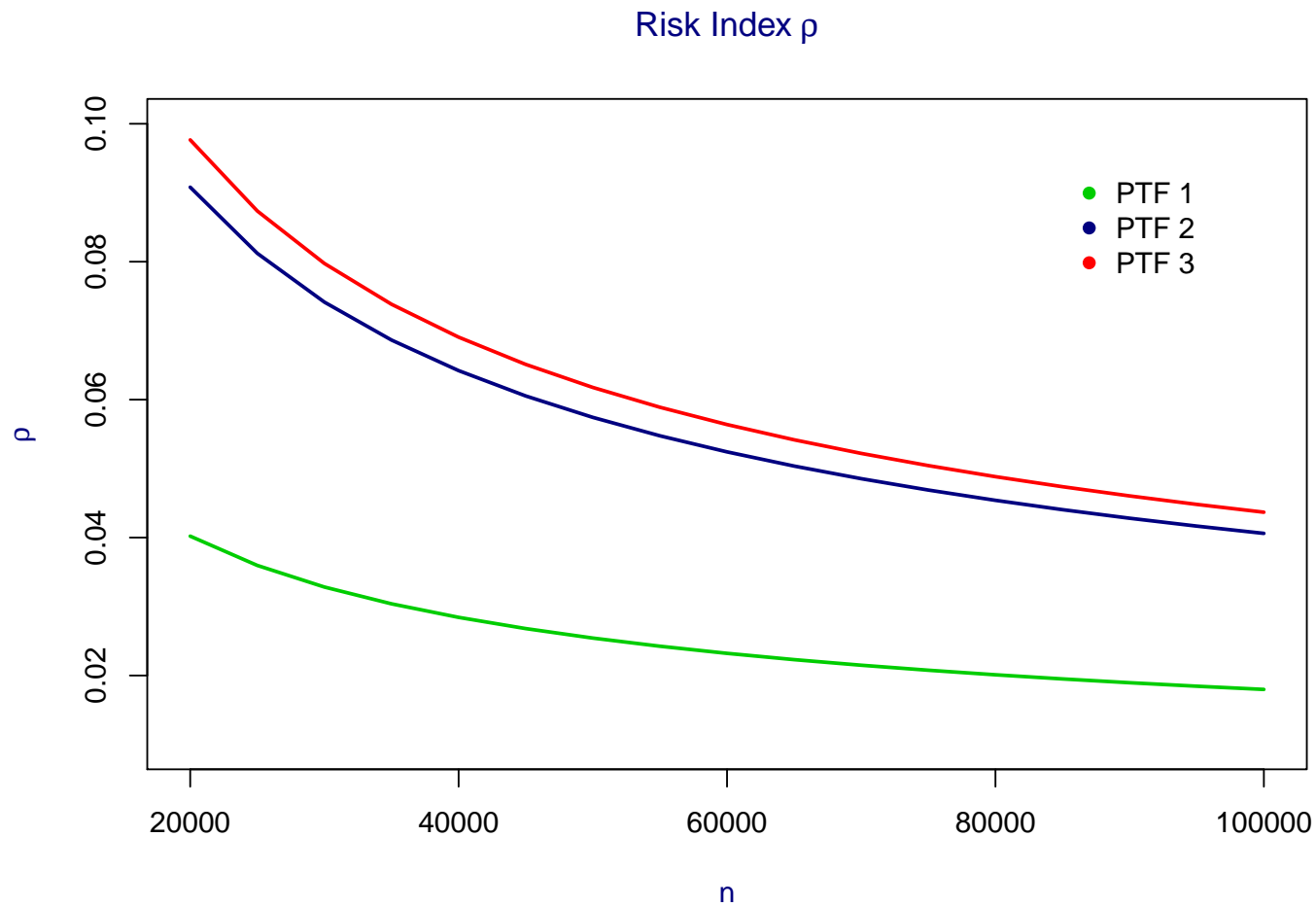
$$n/5 \text{ somme assicurate} = 1\,000$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 1\,300$$

$$n/5 \text{ somme assicurate} = 1\,600$$

Vedi Figura seguente

Risk pooling (cont.)



Indice di rischio per varie strutture di portafoglio in termini di somme assicurate

Portafogli con più classi di rischio

Si consideri un portafoglio con dimensione n , suddiviso in s classi di rischio, omogeneo in termini di somme assicurate, con $x = 1$

Siano, per $k = 1, 2, \dots, s$:

n_k = dimensione della classe di rischio k

p_k = probabilità di sinistro per tutti i rischi in classe k

e:

$$n = \sum_{k=1}^s n_k; \quad p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^s n_k p_k$$

Si assuma come benchmark il portafoglio con una classe di rischio (n, p)

Per il portafoglio benchmark:

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = n p; \quad \text{Var}[X^{[P]}] = n p (1 - p); \quad \rho = \sqrt{\frac{1 - p}{n p}}$$

Per il portafoglio suddiviso in s classi di rischio:

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = \sum_{k=1}^s n_k p_k = n p$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X^{[P]}] &= \sum_{k=1}^s n_k p_k (1 - p_k) = n p - \sum_{k=1}^s n_k p_k^2 \\ &= n p - \sum_{k=1}^s n_k (p_k - p)^2 + p^2 \sum_{k=1}^s n_k - 2 p \sum_{k=1}^s n_k p_k \\ &= n p - \sum_{k=1}^s n_k (p_k - p)^2 - p^2 n \\ &= n p (1 - p) - \sum_{k=1}^s n_k (p_k - p)^2 < n p (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]}}{\mathbb{E}[X^{[P]}]} = \sqrt{\frac{np(1-p) - \sum_{k=1}^s n_k (p_k - p)^2}{n^2 p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1-p}{np} - \frac{\sum_{k=1}^s n_k (p_k - p)^2}{n^2 p^2}} < \sqrt{\frac{1-p}{np}}\end{aligned}$$

Quindi eterogeneità in relazione alla probabilità di sinistro migliora l'effetto pooling

Esempio 5

Si considerino i seguenti portafogli, tutti con dimensione n , e probabilità di sinistro media $p = 0.003$

Caso 1: una classe di rischio

cl. di rischio: dim. n , prob. di sin. $p = 0.003$

Caso 2: due classi di rischio

cl. di rischio 1: dim. $n_1 = \frac{1}{2} n$, prob. di sin. $p_1 = 0.001$

cl. di rischio 2: dim. $n_2 = \frac{1}{2} n$, prob. di sin. $p_2 = 0.059$

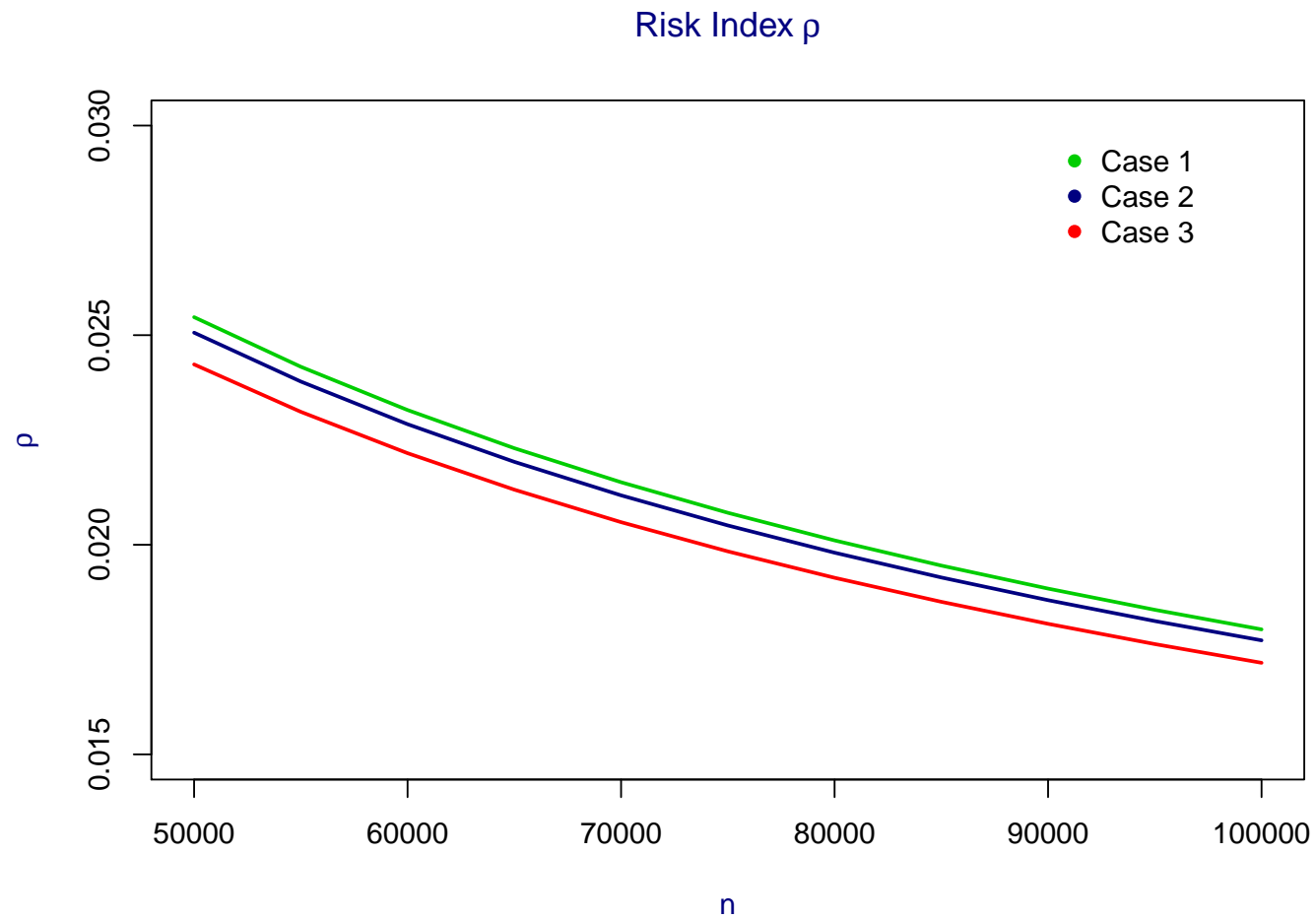
Caso 3: due classi di rischio

cl. di rischio 1: dim. $n_1 = \frac{3}{4} n$, prob. di sin. $p_1 = 0.001$

cl. di rischio 2: dim. $n_2 = \frac{1}{4} n$, prob. di sin. $p_2 = 0.117$

Vedi figura seguente

Risk pooling (cont.)



Indice di rischio per varie strutture di portafoglio in termini di classi di rischio

Osservazione

L'effetto pooling opera anche in portafogli eterogenei

In particolare:

- eterogeneità in termini di somme assicurate
⇒ minore effetto pooling
- eterogeneità in termini di probabilità di sinistro (più classi di rischio)
⇒ maggiore effetto pooling

***“Rischio di incertezza”*: scarti accidentali e scarti sistematici**

Riferimento: portafoglio di n assicurazioni elementari

- indipendenza stocastica tra i rischi assicurati
- probabilità di sinistro uguale per tutti i rischi assicurati ($= p$?)
- somma assicurata x per tutti i rischi assicurati
- X il pagamento aleatorio per un generico rischio

Se p non rappresenta una valutazione “corretta” della probabilità di sinistro \Rightarrow possibili scarti sistematici

Espressione dell’incertezza sulla valutazione di probabilità

- ▷ v.a. \tilde{p} , con distribuzione di probabilità
- ▷ p generica determinazione possibile di \tilde{p}

Ipotesi:

- indipendenza stocastica tra gli n rischi subordinata ad ogni possibile determinazione p di \tilde{p}

Distribuzione di probabilità di \tilde{p} : per es. distribuzione Beta (v. Figura), con parametri α, β :

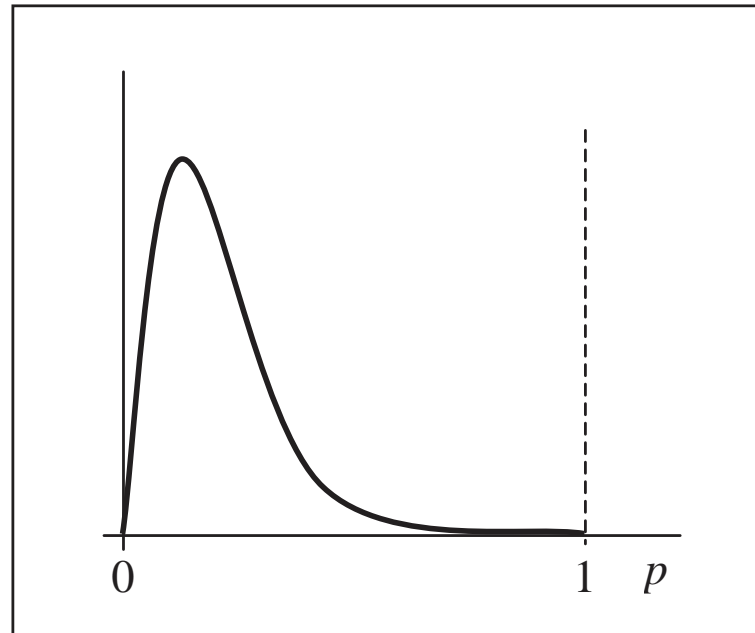
$$\tilde{p} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$$

Risulta allora:

$$\mathbb{E}[\tilde{p}] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Var}[\tilde{p}] = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Risk pooling (cont.)



Densità di una distribuzione di probabilità Beta

Valore atteso di X , subordinato ad una generica determinazione p di \tilde{p} :

$$\mathbb{E}[X|p] = x p$$

Valore atteso non subordinato \Rightarrow v.a. (funzione di \tilde{p})

$$\mathbb{E}[X|\tilde{p}] = x \tilde{p}$$

con valore atteso (secondo la distribuzione Beta) dato da

$$\mathbb{E}_{\text{Beta}}[\mathbb{E}[X|\tilde{p}]] = \mathbb{E}_{\text{Beta}}[x \tilde{p}] = x \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Varianza della v.a. $\mathbb{E}[X|\tilde{p}]$:

$$\text{Var}_{\text{Beta}}[\mathbb{E}[X|\tilde{p}]] = \text{Var}_{\text{Beta}}[x \tilde{p}] = x^2 \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Varianza di X , subordinata alla generica determinazione p di \tilde{p} :

$$\text{Var}[X|p] = x^2 p (1 - p)$$

Varianza non subordinata \Rightarrow v.a. (funzione di \tilde{p})

$$\text{Var}[X|\tilde{p}] = x^2 \tilde{p} (1 - \tilde{p})$$

con valore atteso (secondo la distribuzione Beta) dato da

$$\mathbb{E}_{\text{Beta}}[\text{Var}[X|\tilde{p}]] = x^2 \mathbb{E}_{\text{Beta}}[\tilde{p} (1 - \tilde{p})]$$

Si può provare che:

$$\mathbb{E}_{\text{Beta}}[\tilde{p} (1 - \tilde{p})] = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

sicché

$$\mathbb{E}_{\text{Beta}}[\text{Var}[X|\tilde{p}]] = x^2 \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

A livello di portafoglio \Rightarrow riferimento al payout totale $X^{[P]}$

In caso di incertezza sulla probabilità di sinistro, valori sintetici subordinati alla generica determinazione p della v.a. \tilde{p} :

▷ valore atteso $\mathbb{E}[X^{[P]}|p]$

▷ varianza $\text{Var}[X^{[P]}|p]$

Inoltre:

$$\mathbb{E}[X^{[P]}|\tilde{p}] = n \mathbb{E}[X|\tilde{p}]$$

e

$$\text{Var}[X^{[P]}|\tilde{p}] = n \text{Var}[X|\tilde{p}]$$

Risulta, per il valore atteso di $X^{[P]}$ non subordinato:

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = \mathbb{E}_{\text{Beta}}[\mathbb{E}[X^{[P]}|\tilde{p}]] = \mathbb{E}_{\text{Beta}}[n \mathbb{E}[X|\tilde{p}]] = n x \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

In relazione alla varianza di $X^{[P]}$:

- l'indipendenza tra i sinistri deve essere intesa come subordinata ad ogni dato valore p
- con riferimento a \tilde{p} , la varianza non subordinata di $X^{[P]}$ non può essere espressa come somma delle varianze individuali non subordinate

Si può provare che risulta:

$$\begin{aligned}\text{Var}[X^{[P]}] &= \text{Var}_{\text{Beta}}[\mathbb{E}[X^{[P]}|\tilde{p}]] + \mathbb{E}_{\text{Beta}}[\text{Var}[X^{[P]}|\tilde{p}]] \\ &= \underbrace{\text{Var}_{\text{Beta}}[n \mathbb{E}[X|\tilde{p}]]}_{\text{scarti sistematici}} + \underbrace{\mathbb{E}_{\text{Beta}}[n \text{Var}[X|\tilde{p}]]}_{\text{scarti accidentali}}\end{aligned}$$

e quindi:

$$\text{Var}[X^{[P]}] = n^2 x^2 \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} + n x^2 \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

Indice di rischio (non subordinato) $\rho = \mathbb{C}\mathbb{V}[X^{[P]}]$:

$$\rho = \frac{\sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]}}{\mathbb{E}[X^{[P]}]} = \sqrt{\underbrace{\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + 1)}}_{\text{scarti sistematici}} + \frac{1}{n} \underbrace{\frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha(\alpha + \beta + 1)}}_{\text{scarti accidentali}}}$$

Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + 1)}} > 0 \quad (*)$$

mentre, in caso di non incertezza sulla probabilità p di sinistro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1-p}{np}} = 0 \quad (**)$$

Interpretazione dei risultati (*) e (**)

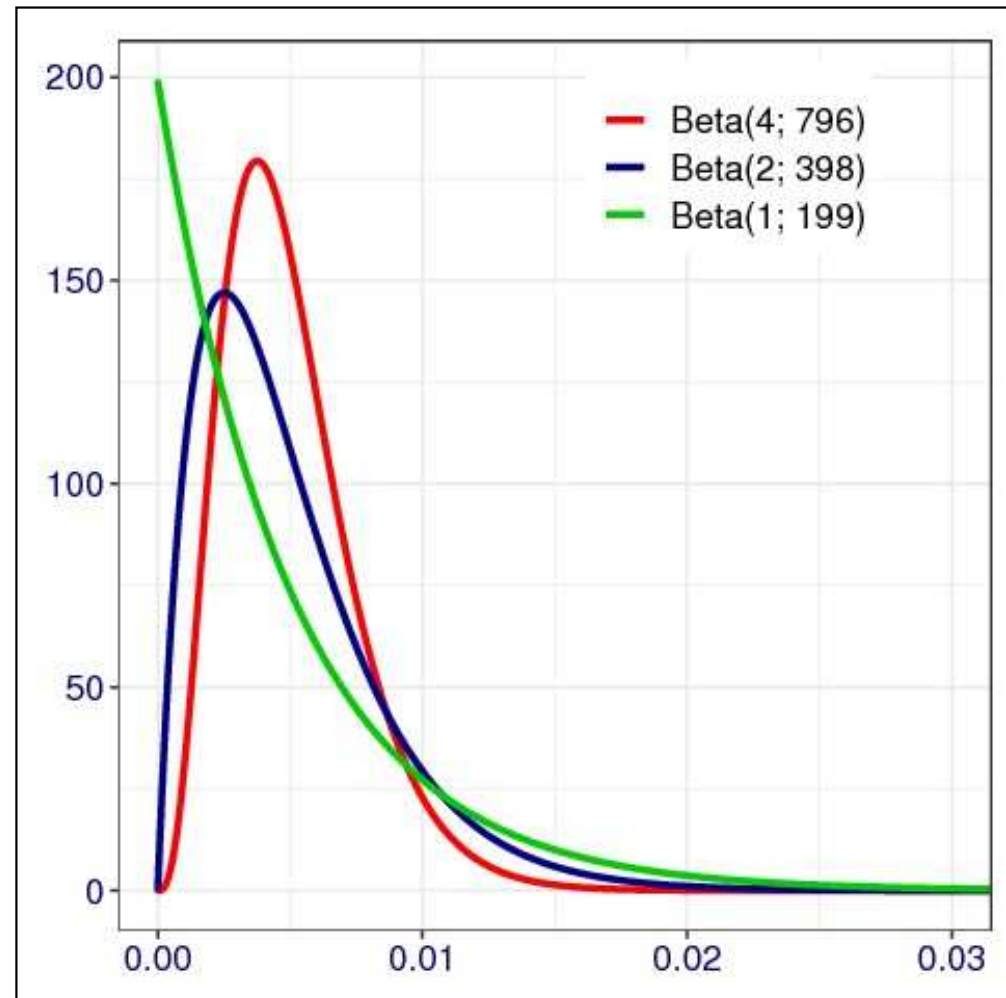
- Il rischio di processo (cioè il rischio di scarti accidentali) è un rischio *diversificabile*, e la diversificazione è attuata aumentando la dimensione di portafoglio n (vedi (**));
- il rischio di incertezza (cioè il rischio di scarti sistematici) è un rischio *non diversificabile*, in quanto la sua grandezza (relativa) è indipendente dalla dimensione di portafoglio n (vedi (*))

Esempio 6

Si assuma per \tilde{p} la distribuzione Beta con i parametri riportati nella tabella seguente

Maggiore varianza \Rightarrow maggiore incertezza sulla probabilità di sinistro \Rightarrow più rischio non diversificabile in caso di maggiore incertezza

Risk pooling (cont.)



Funzioni di densità della distribuzione beta

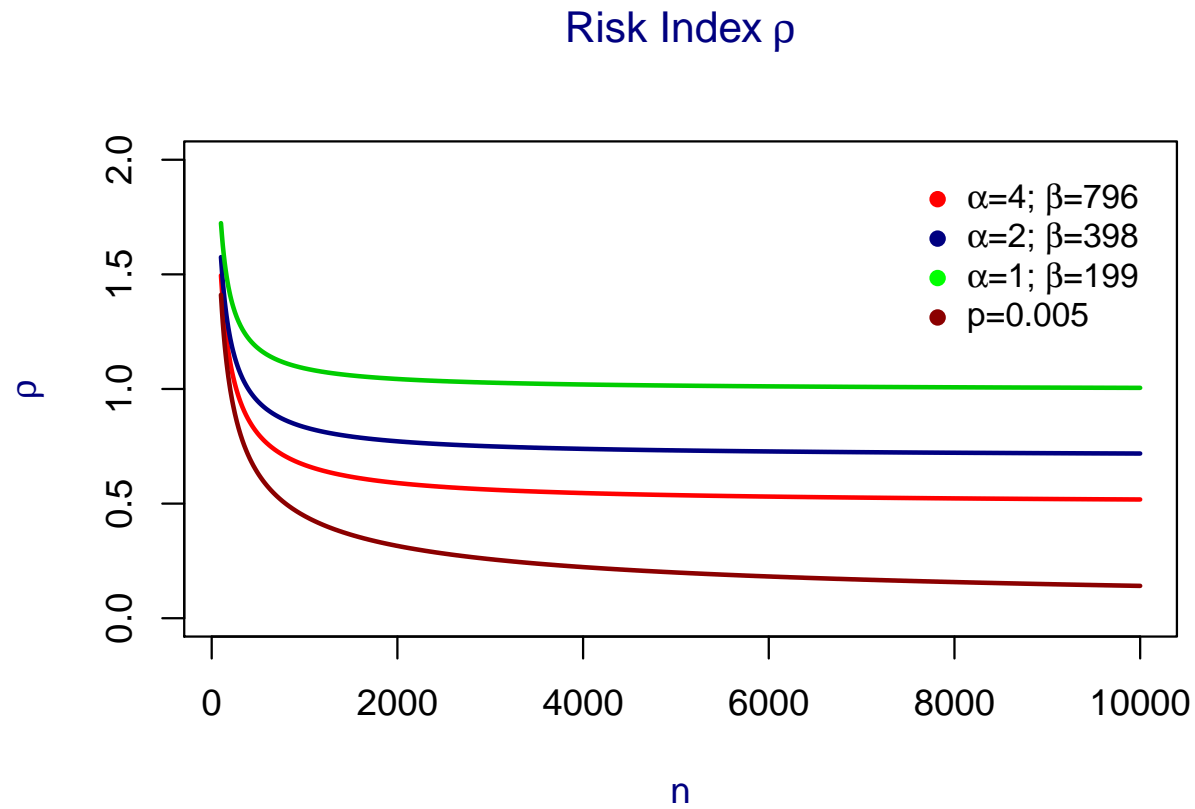
Risk pooling (cont.)

n	$p = 0.005$	$\alpha = 4, \beta = 796$	$\alpha = 2, \beta = 398$	$\alpha = 1, \beta = 199$
		$\mathbb{E}[\tilde{p}] = 0.005$ $\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{p}] = 6.2110 \times 10^{-6}$	$\mathbb{E}[\tilde{p}] = 0.005$ $\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{p}] = 1.2406 \times 10^{-5}$	$\mathbb{E}[\tilde{p}] = 0.005$ $\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{p}] = 2.4751 \times 10^{-5}$
10	4.461	4.486	4.511	4.560
100	1.411	1.495	1.575	1.723
1 000	0.446	0.669	0.834	1.090
10 000	0.141	0.518	0.718	1.005
...
∞	0.000	0.498	0.704	0.995

Indice di rischio per vari livelli di incertezza

Vedi figura seguente

Risk pooling (cont.)



Indice di rischio per vari livelli di incertezza

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEL PAYOUT TOTALE

Distribuzione di probabilità di $X^{[P]}$ \Rightarrow più informazioni sulla rischiosità del portafoglio

Riferimento: portafoglio costituito da n rischi, con uguale probabilità di sinistro p e somma assicurata x

Payout totale aleatorio:

$$X^{[P]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)} = K x$$

con K = numero aleatorio di sinistri nel portafoglio

Indipendenza tra le $X^{(j)}$ \Rightarrow K ha distribuzione binomiale $\text{Bin}(n, p)$:

$$\mathbb{P}[X^{[P]} = k x] = \mathbb{P}[K = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Varie approssimazioni disponibili

Approssimazione della distribuzione di probabilità di K mediante distribuzione di Poisson (per n grande e p piccola):

$$\mathbb{P}[X^{[P]} = k x] = \mathbb{P}[K = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}; \quad k = 0, 1, \dots$$

con

$$\lambda = n p \quad (= \text{numero atteso di sinistri nel portafoglio})$$

Approssimazione della distribuzione di probabilità di $X^{[P]}$ mediante distribuzione normale $\mathcal{N}(P^{[P]}, \sigma^{[P]})$ con

$$P^{[P]} = \mathbb{E}[X^{[P]}] = n x p$$

$$\sigma^{[P]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[P]}]} = x \sqrt{n p (1 - p)}$$

Quindi

$$\frac{X^{[P]} - P^{[P]}}{\sigma^{[P]}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Per esempio:

$$\mathbb{P} \left[z_1 < \frac{X^{[P]} - P^{[P]}}{\sigma^{[P]}} \leq z_2 \right] = \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(z_2) - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(z_1)$$

con $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(z) =$ funzione di ripartizione della normale standard

$$\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Approssimazione normale impiegabile in casi più generali, ad es. per portafogli di rischi con varie somme assicurate e / o varie probabilità di sinistro

Esempio

Somma assicurata $x^{(j)} = x = 1$ per $j = 1, 2, \dots, n$

Prob. di sinistro $p^{(j)} = p = 0.005$ per $j = 1, 2, \dots, n$

Numero rischi: $n = 100$; $n = 500$; $n = 5\,000$

Distribuzione binomiale (esatta) ed approx Poisson (per $n = 100$)

Distribuzione binomiale (esatta) ed approx normale (per $n = 500$ e $n = 5\,000$)

Osservazioni

- ▷ nei portafogli con $n = 500$ e $n = 5\,000$ l'approx normale tende a sottostimare la coda destra della distribuzione
- ▷ Poisson fornisce una buona approx alla distribuzione esatta, anche per $n = 100$
- ▷ Poisson tende a sovrastimare la coda destra (\Rightarrow quantificazione prudentziale)

Risk pooling (cont.)

$p = 0.005; n = 100; x = 1; \mathbb{E}[X^{[P]}] = 0.5$

$\mathbb{P}[X^{[P]} = k]$

k	Binomiale	Poisson
0	0.605770436	0.60653066
1	0.304407255	0.30326533
2	0.075719392	0.075816332
3	0.012429649	0.012636055
4	0.001514668	0.001579507
5	0.000146139	0.000157951
6	1.16275E-05	1.31626E-05
7	7.84624E-07	9.40183E-07
8	4.58355E-08	5.87614E-08
9	2.35447E-09	3.26452E-09
10	1.07667E-10	1.63226E-10
...

Binomiale (esatta) e approx di Poisson

Risk pooling (cont.)

$$p = 0.005; \quad n = 100; \quad x = 1; \quad \mathbb{E}[X^{[P]}] = 0.5$$

$$\mathbb{P}[X^{[P]} > k]$$

k	Binomiale	Poisson
3	0.001673268	0.001752
4	0.000158599	0.000172
5	1.24604E-05	1.42E-05
6	8.32926E-07	1.00E-06
7	4.83022E-08	6.22E-08
...

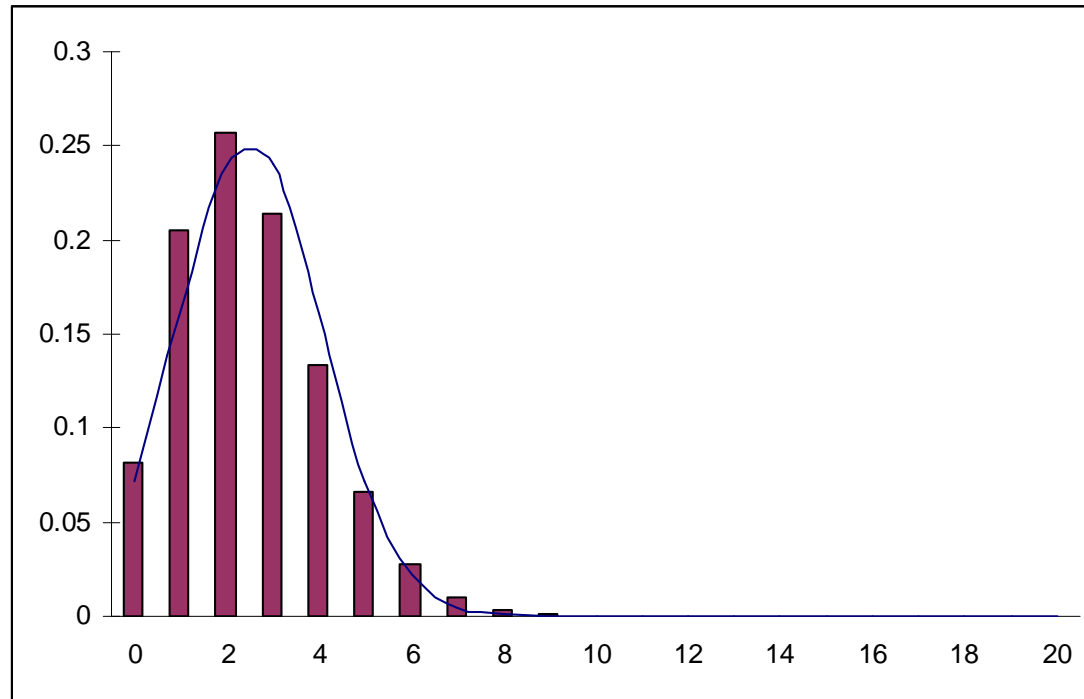
Coda destra della Binomiale (esatta) e della approx di Poisson

Risk pooling (cont.)

$p = 0.005; n = 500; x = 1; \mathbb{E}[X^{[P]}] = 2.5$			$p = 0.005; n = 5\,000; x = 1; \mathbb{E}[X^{[P]}] = 25$		
$\mathbb{P}[X^{[P]} > k]$			$\mathbb{P}[X^{[P]} > k]$		
k	Binomiale	Normale	k	Binomiale	Normale
5	0.04160282	0.056471062	30	0.136121887	0.158048811
6	0.013944069	0.013238288	35	0.022173757	0.022480517
7	0.004135437	0.002164124	40	0.001983179	0.001316908
8	0.001097966	0.000244022	45	0.000101743	3.03545E-05
9	0.000263551	1.88389E-05	50	3.13201E-06	2.68571E-07
10	5.76731E-05	9.90663E-07	55	6.02879E-08	8.9912E-10
...

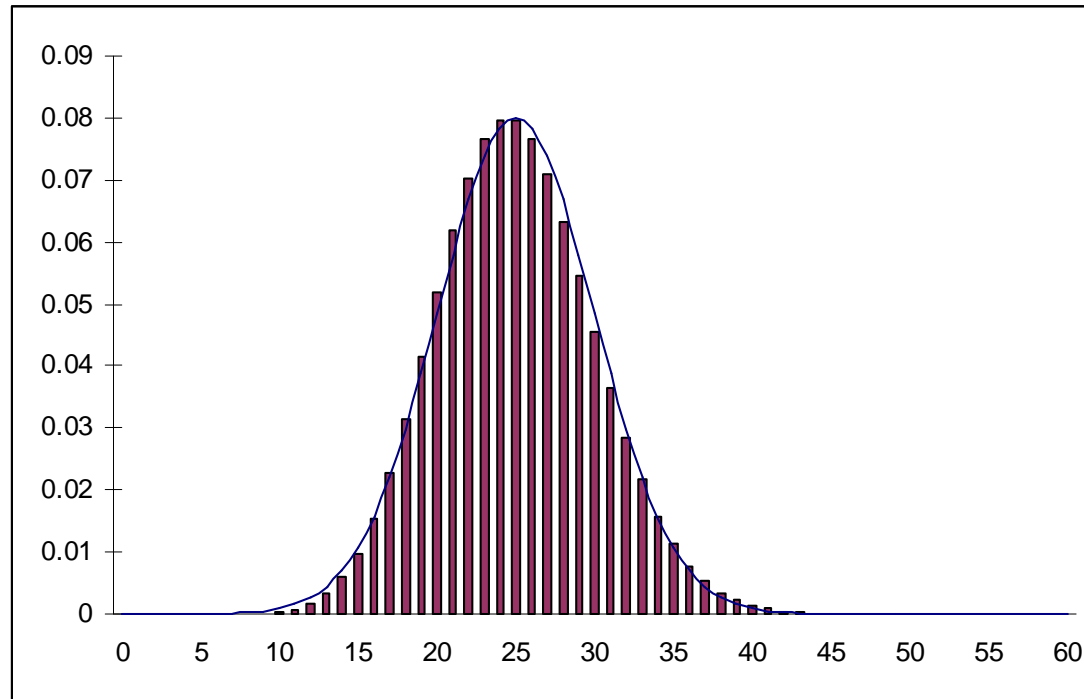
Coda destra della Binomiale (esatta) e della approx Normale

Risk pooling (cont.)



*Distribuzione di probabilità del payout totale ($n = 500$)
Binomiale (esatta) e approx Normale*

Risk pooling (cont.)



*Distribuzione di probabilità del payout totale ($n = 5\,000$)
Binomiale (esatta) e approx Normale*

CARICAMENTO DI SICUREZZA

Riferimento: portafoglio di n coperture assicurative elementari, con somma assicurata $x^{(j)}$ e probabilità di sinistro $p^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Premio $\Pi^{(j)}$ comprendente il caricamento (esplicito) di sicurezza, $m^{(j)}$:

$$\Pi^{(j)} = P^{(j)} + m^{(j)}$$

con $P^{(j)} = x^{(j)} p^{(j)}$

Sia $\Pi^{[P]}$ l'introito premi totale

$$\Pi^{[P]} = \sum_{j=1}^n \Pi^{(j)}$$

che può essere espresso dalla

$$\Pi^{[P]} = P^{[P]} + m^{[P]}$$

(significato ovvio di $m^{[P]}$)

Risultato di portafoglio $Z^{[P]}$ definito come segue:

$$Z^{[P]} = \Pi^{[P]} - X^{[P]}$$

con

$$\mathbb{E}[Z^{[P]}] = m^{[P]}$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[Z^{[P]}] = \mathbb{V}\text{ar}[\Pi^{[P]} - X^{[P]}] = \mathbb{V}\text{ar}[X^{[P]}]$$

Primo obiettivo: determinare i caricamenti di sicurezza $m^{(j)}$,
 $j = 1, 2, \dots, n$, coerentemente con la rischiosità del portafoglio

Si consideri l'evento

$$Z^{[P]} < 0$$

cioè

$$X^{[P]} > P^{[P]} + m^{[P]}$$

(v. Figure)

La probabilità di tale evento, cioè la *probabilità di perdita*, deve essere tenuta ragionevolmente piccola, mediante il caricamento (totale) di sicurezza $m^{[P]}$

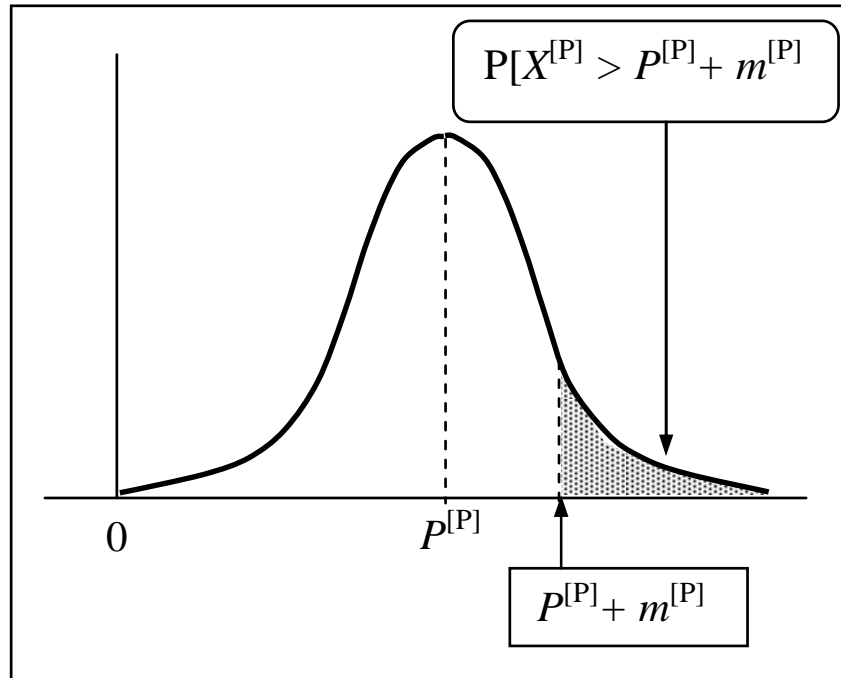
Sia:

$$\pi(m^{[P]}) = \mathbb{P} \left[X^{[P]} > P^{[P]} + m^{[P]} \right]$$

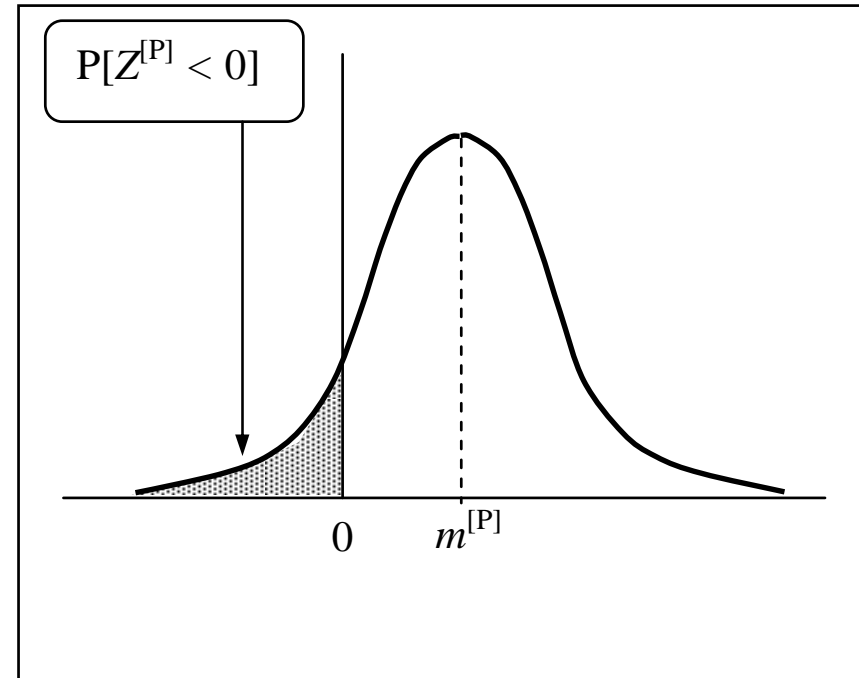
In questa impostazione del problema, $m^{[P]} \Rightarrow$ unico parametro il cui valore può essere scelto per limitare la probabilità di perdita

Effetto di variazione di tale parametro: shift della distribuzione di probabilità (v. Figure)

Risk pooling (cont.)

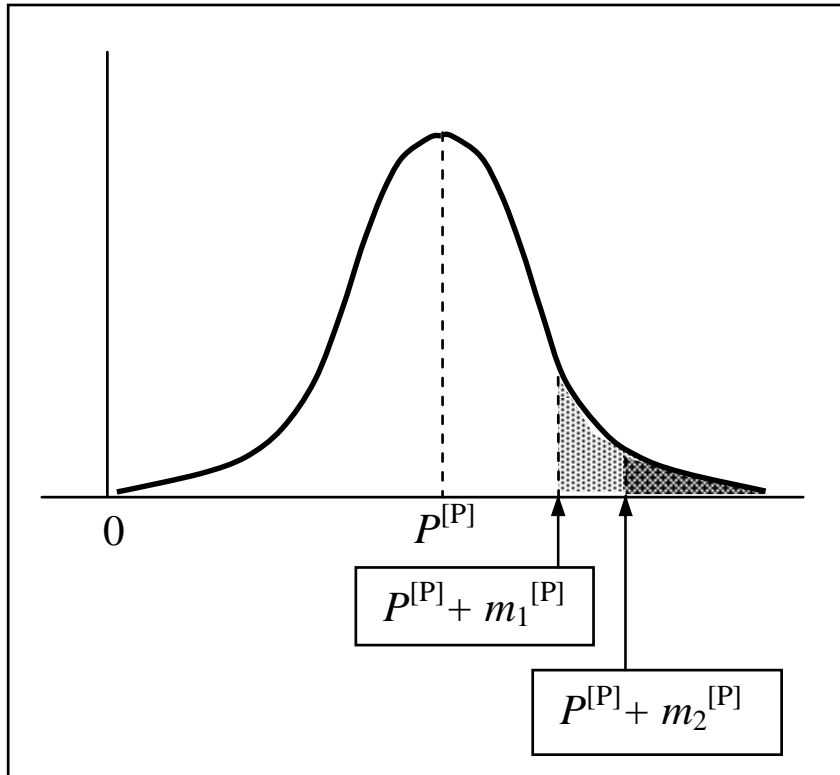


*Distribuzione di probabilità del payout
aleatorio $X^{[P]}$*

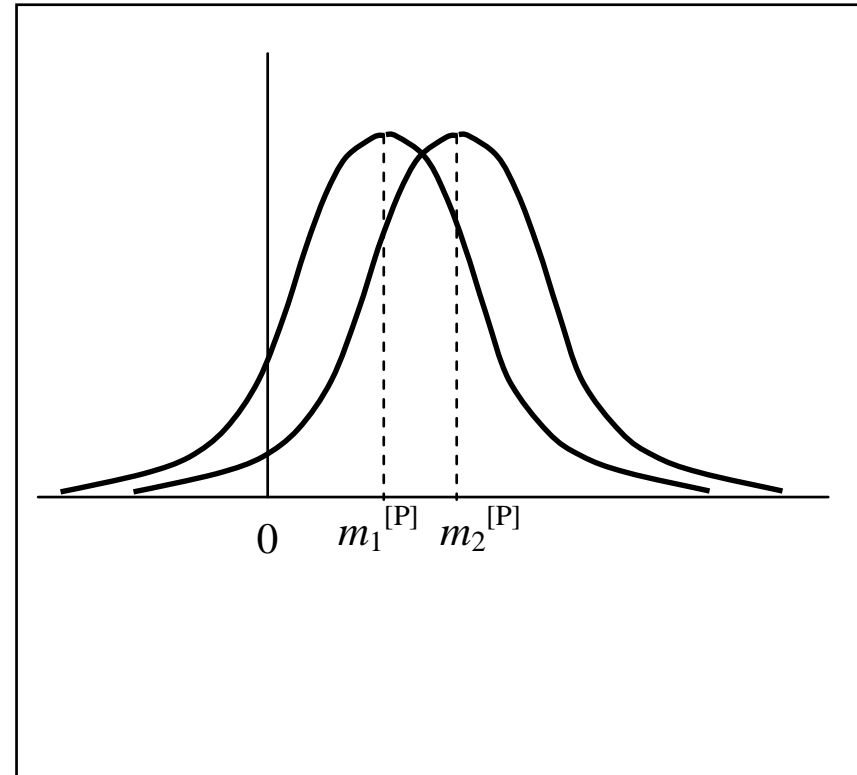


*Distribuzione di probabilità del risultato
aleatorio $Z^{[P]}$*

Risk pooling (cont.)



*Distribuzione di probabilità di $X^{[P]}$:
probabilità di superare due diversi livelli
di caricamento di sicurezza*



*Distribuzione di probabilità di $Z^{[P]}$:
caricamento di sicurezza come
parametro di shift
del risultato aleatorio*

Risulta:

$$\pi(m^{[P]}) = \mathbb{P}\left[\frac{X^{[P]} - P^{[P]}}{\sigma^{[P]}} > \frac{m^{[P]}}{\sigma^{[P]}}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{m^{[P]}}{\sigma^{[P]}}\right)$$

dove Φ denota la funzione di ripartizione della v.a. $\frac{X^{[P]} - P^{[P]}}{\sigma^{[P]}}$, con valore atteso 0 e sqm 1

Sia ε la probabilità di perdita accettata

Trovare $m^{[P]}$ tale che

$$\pi(m^{[P]}) = \varepsilon$$

cioè

$$1 - \Phi\left(\frac{m^{[P]}}{\sigma^{[P]}}\right) = \varepsilon$$

e quindi

$$m^{[P]} = \sigma^{[P]} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$$

Il caricamento di sicurezza richiesto per unità di valore atteso, cioè il *tasso di caricamento di sicurezza* richiesto, è

$$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}} = \frac{\sigma^{[P]}}{P^{[P]}} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$$

cioè

$$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}} = \rho \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$$

⇒ per una data probabilità ε accettata, minore è l'indice di rischio ρ , minore è il tasso di caricamento richiesto

Esempio

Le seguenti tabelle si riferiscono ai portafogli A, B e C. Probabilità valutate con l'approssimazione normale

Conclusioni strettamente collegate ai risultati dell'Esempio precedente

Notare gli elevati valori del tasso di caricamento nel portafoglio B quando si richiede una probabilità di perdita molto piccola

Risk pooling (cont.)

$m^{[P]}$	$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}}$	$\frac{m^{[P]}}{\sigma^{[P]}}$	$\pi(m^{[P]})$
64 200	0.1284	2.880	0.002
57 550	0.1151	2.580	0.005

Caricamento di sicurezza - Portafoglio A

$m^{[P]}$	$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}}$	$\frac{m^{[P]}}{\sigma^{[P]}}$	$\pi(m^{[P]})$
20 312	0.4063	2.880	0.002
18 195	0.3639	2.580	0.005
6 420	0.1284	0.910	0.181

Caricamento di sicurezza - Portafoglio B

Risk pooling (cont.)

$m^{[P]}$	$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}}$	$\frac{m^{[P]}}{\sigma^{[P]}}$	$\pi(m^{[P]})$
122 300	0.2446	2.880	0.002
109 550	0.2191	2.580	0.005
64 200	0.1284	1.512	0.065

Caricamento di sicurezza - Portafoglio C

ALLOCAZIONE DI CAPITALE

Si assuma che, a fronte del payout totale $X^{[P]}$, l'assicuratore assegni al portafoglio anche un "fondo"

- ▷ non dato dai premi appena incassati
- ▷ costituito da *capitale proprio* (derivante da utili di precedenti esercizi, o da emissione di azioni)

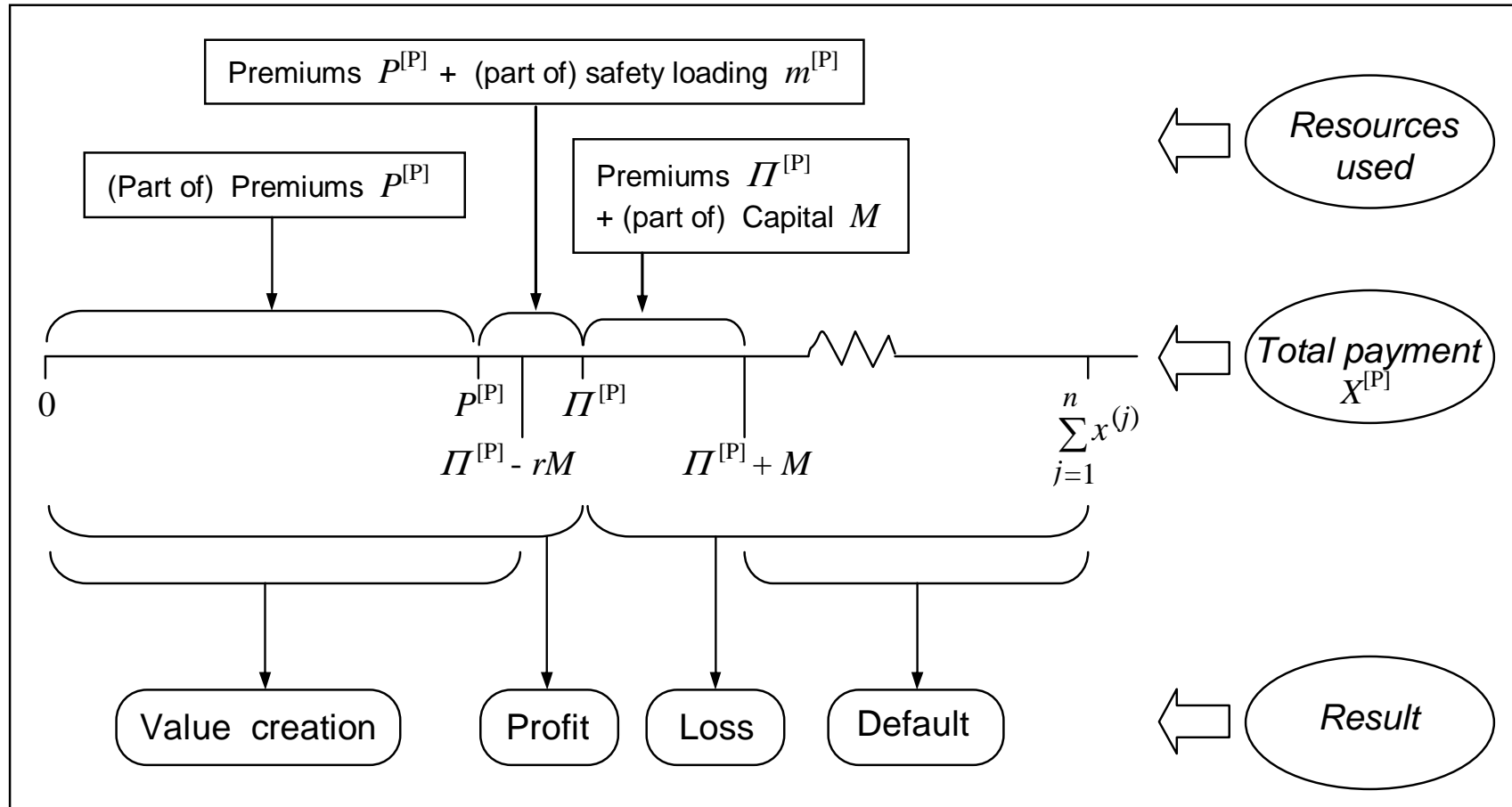
Operazione usualmente indicata come *allocazione di capitale*

Scopo: proteggere l'impresa assicuratrice da possibili risultati negativi prodotti dal portafoglio

Sia M l'ammontare di capitale assegnato al portafoglio

Vedi Figura: uso delle risorse disponibili, e risultati corrispondenti alle determinazioni possibili del payout totale

Risk pooling (cont.)



Payout totale; risorse, risultati

L'evento

$$X^{[P]} > P^{[P]} + m^{[P]} + M$$

indica la situazione di *default*, o *rovina* (del portafoglio)

Sia il caricamento di sicurezza $m^{[P]}$ sia il capitale M possono essere impiegati per limitare la *probabilità di default*, data da

$$\pi(m^{[P]} + M) = \mathbb{P}[X^{[P]} > P^{[P]} + m^{[P]} + M] = \mathbb{P}[Z^{[P]} < -M]$$

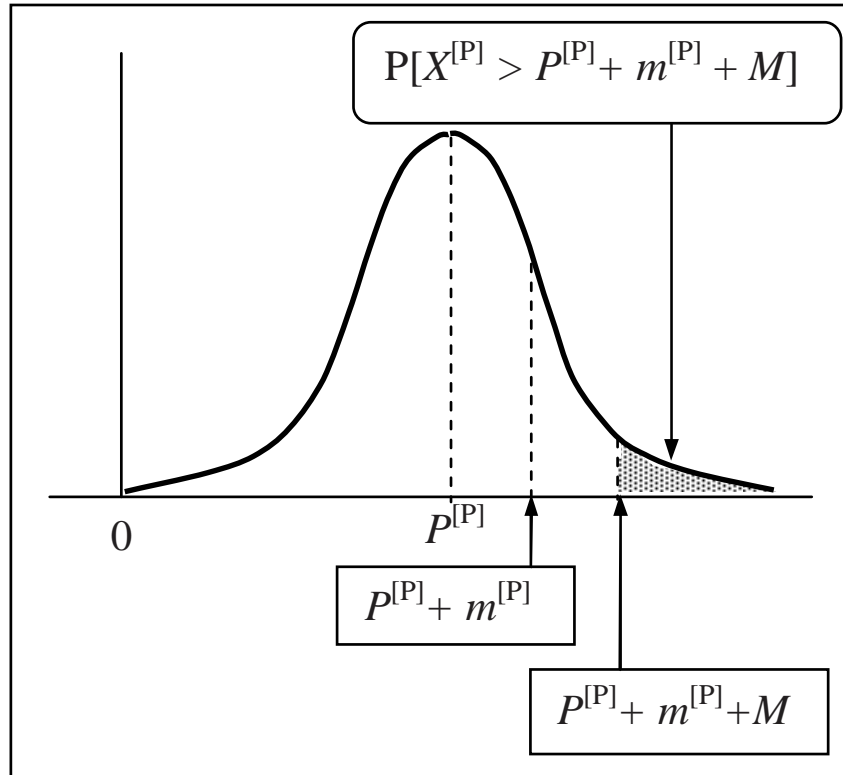
Se $m^{[P]}$ è stato fissato, si consideri il seguente problema: determinare l'importo M tale che

$$\pi(m^{[P]} + M) = \alpha$$

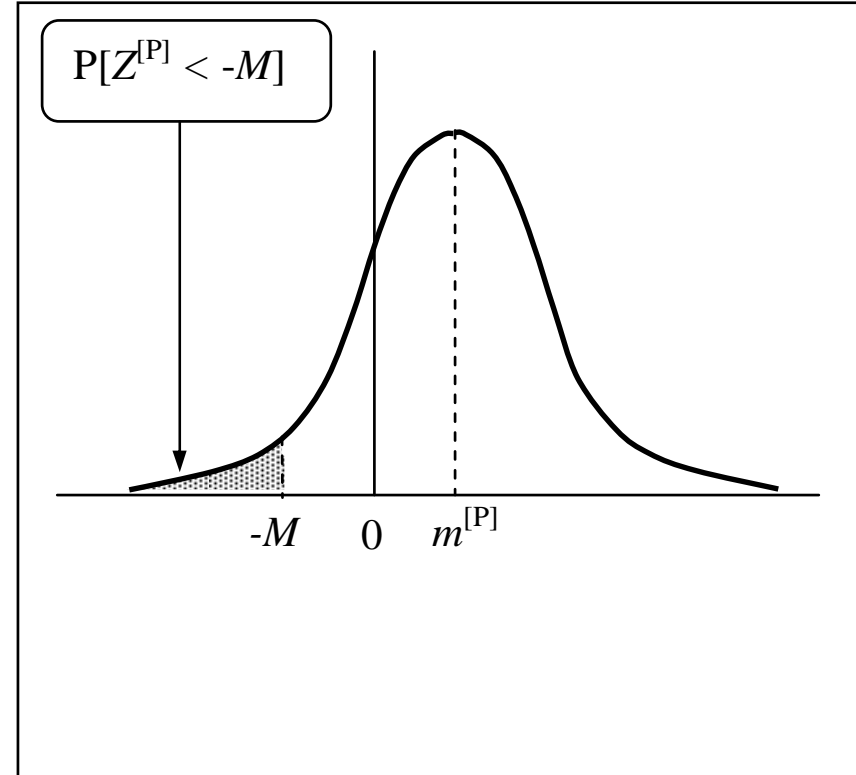
dove α è una probabilità assegnata (piccola) (v. Figura)

Ovviamente $M = -VaR_\alpha$ (VaR della distribuzione di prob. di $Z^{[P]}$)

Risk pooling (cont.)



*Distribuzione di probabilità
del payout aleatorio $X^{[P]}$*



*Distribuzione di probabilità
del risultato aleatorio $Z^{[P]}$*

Risulta

$$\pi(m^{[P]} + M) = \mathbb{P}\left[\frac{X^{[P]} - P^{[P]}}{\sigma^{[P]}} > \frac{m^{[P]} + M}{\sigma^{[P]}}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{m^{[P]} + M}{\sigma^{[P]}}\right)$$

dove Φ denota la funzione di ripartizione della v.a. $\frac{X^{[P]} - P^{[P]}}{\sigma^{[P]}}$, con valore atteso 0 e sqm 1

L'obiettivo può essere espresso come segue:

$$1 - \Phi\left(\frac{m^{[P]} + M}{\sigma^{[P]}}\right) = \alpha$$

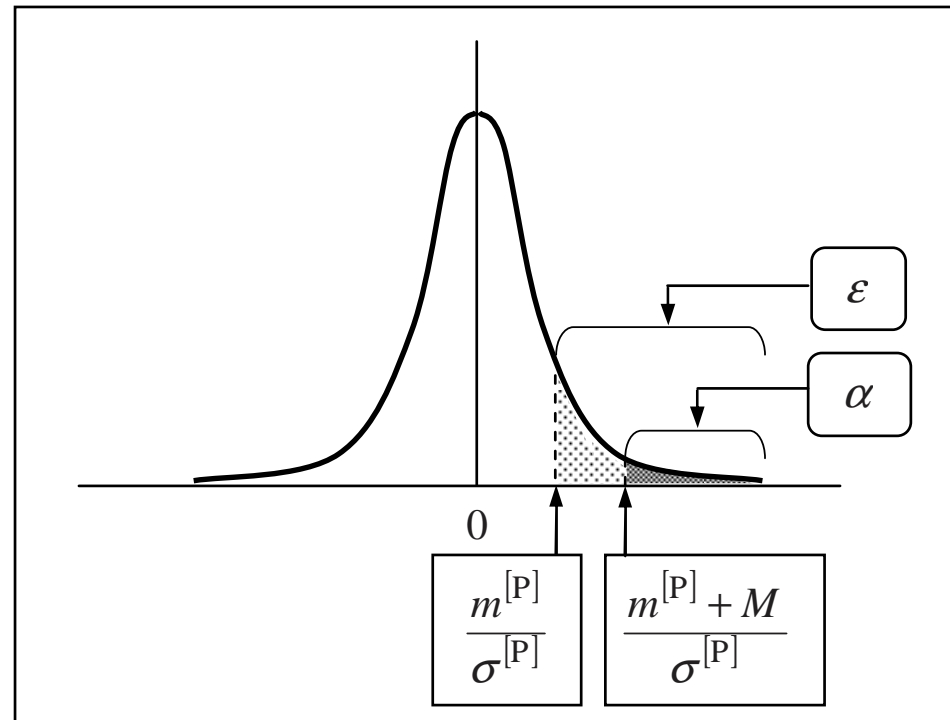
e quindi

$$\frac{m^{[P]} + M}{\sigma^{[P]}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (*)$$

(v. Figura)

Osservazione

Con $M = 0$ si ritrova la relazione che fornisce il (solo) caricamento di sicurezza $m^{[P]}$



Distribuzione di probabilità standardizzata del payout aleatorio

Per una data probabilità α e un dato sqm $\sigma^{[P]}$ (univocamente determinato dalla struttura del portafoglio), l'equazione (*) può essere risolta rispetto all'ammontare totale $M + m^{[P]}$; se il caricamento di sicurezza non è stato ancora fissato, entrambe le quantità M e $m^{[P]}$ possono essere considerate *variabili di controllo*

Il rapporto

$$s = \frac{m^{[P]} + M}{\sigma^{[P]}}$$

è talvolta chiamato *indice di stabilità relativa*

Maggiore è s , minore è la probabilità di default

Per aumentare s , si può:

- (1) aumentare il caricamento di sicurezza $m^{[P]}$
- (2) aumentare il capitale allocato M
- (3) ridurre $\sigma^{[P]}$, mediante riassicurazione

Si noti che

- ▷ l'azione (1) incide sui premi, ed è quindi limitata da vincoli di mercato
- ▷ l'azione (2) ha vincoli a livello di impresa, in quanto il capitale è una risorsa limitata, e può compromettere la creazione di valore (v. seguito)
- ▷ l'azione (3) (riassicurazione) implica costi che incidono sulle risorse disponibili per il portafoglio, in particolare riducendo il profitto atteso $m^{[P]}$; siccome l'azione incide su numeratore e denominatore dell'indice, il risultato non è univocamente determinato in generale

Esempio

Le seguenti tabelle si riferiscono ai portafogli A, B e C

Notare il ruolo dell'allocazione di capitale, in particolare quando sarebbero necessari caricamenti di sicurezza molto elevati, a causa della dimensione o della struttura del portafoglio, per ottenere una piccola probabilità di default

Risk pooling (cont.)

M	$m^{[P]}$	$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}}$	$\frac{M}{\Pi^{[P]}}$	s	$\pi(m^{[P]} + M)$
10 000	50 000	0.100	0.018	2.6901	0.0036
15 000	50 000	0.100	0.027	2.9143	0.0018
20 000	50 000	0.100	0.036	3.1385	0.0009

Allocazione di capitale e caricamento di sicurezza - Portafoglio A

M	$m^{[P]}$	$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}}$	$\frac{M}{\Pi^{[P]}}$	s	$\pi(m^{[P]} + M)$
10 000	5 000	0.100	0.182	2.1268	0.0167
13 200	5 000	0.100	0.240	2.5805	0.0050
10 000	8 200	0.164	0.172	2.5805	0.0050

Allocazione di capitale e caricamento di sicurezza - Portafoglio B

Risk pooling (cont.)

M	$m^{[P]}$	$\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}}$	$\frac{M}{\Pi^{[P]}}$	s	$\pi(m^{[P]} + M)$
10 000	50 000	0.100	0.018	1.4129	0.0788
60 000	50 000	0.100	0.109	2.5902	0.0048
35 000	75 000	0.150	0.061	2.5902	0.0048

Allocazione di capitale e caricamento di sicurezza - Portafoglio C

Nota: dato $M + m^{[P]}$, al variare dei due addendi

- ▷ la prob. di default rimane costante
- ▷ la prob. di perdita decresce al crescere di $m^{[P]}$ (e quindi di $\Pi^{[P]}$)

(vedi anche figure precedenti)

SOLVIBILITÀ

Evento $Z^{[P]} < -M \Rightarrow$ default (del portafoglio)

Evento $M + Z^{[P]} \geq 0 \Rightarrow$ assicuratore in grado di far fronte al payout totale mediante i premi e, eventualmente, (parte del) capitale allocato: situazione di *solvibilità*

Requisito di solvibilità può essere espresso come segue:

$$\mathbb{P}[M + Z^{[P]} \geq 0] = 1 - \alpha \quad (*)$$

dove α è la probabilità di default accettata

Per dati valori di $m^{[P]}$ e $\sigma^{[P]}$, soluzione della (*) \Rightarrow *capitale richiesto a fini di solvibilità* M

Osservazione

Solvibilità intesa necessariamente in senso probabilistico

In senso deterministico (certezza) sarebbe richiesto M (assurdo!) tale che:

$$M + P^{[P]} + m^{[P]} = \sum_{j=1}^n x^{(j)}$$

CREAZIONE DI VALORE

Si consideri la scelta tra le azioni (1) e (2)

Notare che

- ▷ allocare capitale implica un costo per gli azionisti
- ▷ aumentare il caricamento di sicurezza comporta un più alto costo per gli assicurati

Sia r il tasso (annuo) che quantifica il costo del capitale proprio \Rightarrow il costo dell'allocazione M è rM

Definizione usuale di profitto (o perdita) basata sul solo confronto tra ricavi e costi effettivi. Quindi:

$$\Pi^{[P]} < X^{[P]} \quad \Leftrightarrow \quad \text{perdita}$$

$$\Pi^{[P]} > X^{[P]} \quad \Leftrightarrow \quad \text{profitto}$$

Valutazione del risultato di portafoglio considerando anche il costo dell'allocazione di capitale $\Rightarrow \Pi^{[P]}$ confrontato con $X^{[P]} + r M$

Concetto di *creazione di valore*. Allora:

$$\begin{aligned}\Pi^{[P]} < X^{[P]} &\Leftrightarrow Z^{[P]} < 0 &\Rightarrow & \text{perdita (e distruzione di valore)} \\ X^{[P]} \leq \Pi^{[P]} < X^{[P]} + r M &\Leftrightarrow 0 \leq Z^{[P]} < r M &\Rightarrow & \text{profitto (e distruzione di valore)} \\ \Pi^{[P]} = X^{[P]} + r M &\Leftrightarrow Z^{[P]} = r M &\Rightarrow & \text{profitto (e valore inalterato)} \\ \Pi^{[P]} > X^{[P]} + r M &\Leftrightarrow Z^{[P]} > r M &\Rightarrow & \text{profitto e creazione di valore}\end{aligned}$$

Per confrontare *strategie* (mix di azioni (1) e (2)), riferimento a valori attesi. Essendo

$$\mathbb{E}[X^{[P]}] = P^{[P]}, \quad \Pi^{[P]} = P^{[P]} + m^{[P]}$$

si ha

$$\begin{aligned}m^{[P]} < r M &\Rightarrow & \text{distruzione di valore} \\ m^{[P]} = r M &\Rightarrow & \text{valore inalterato} \\ m^{[P]} > r M &\Rightarrow & \text{creazione di valore}\end{aligned}$$

Esempio

Riferimento al portafoglio B; si assuma $\alpha = 0.005$ come probabilità accettata di default \Rightarrow è richiesto un importo totale $M + m^{[P]} = 18\,200$

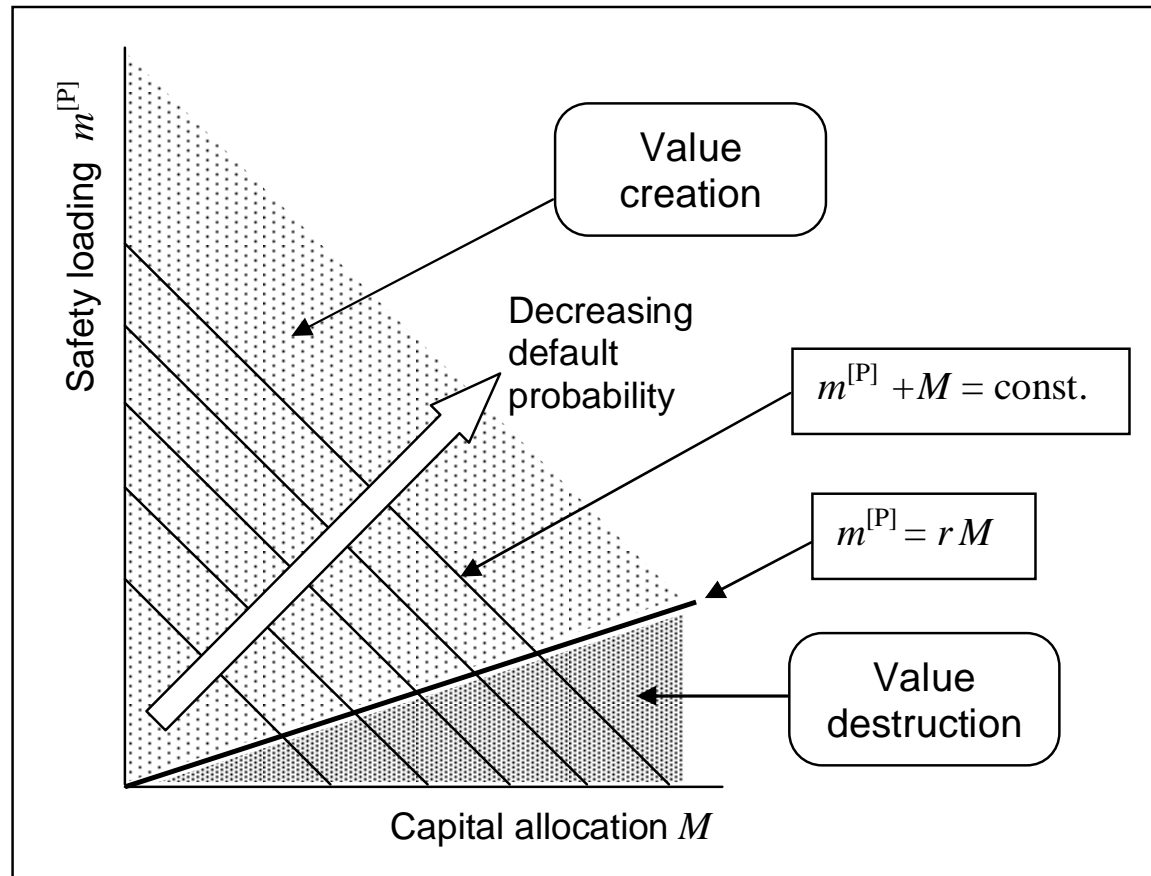
Si assuma $r = 0.08$

Tabella: alcune situazioni di creazione (Valore > 0) e distruzione di valore (Valore < 0)

M	$m^{[P]}$	$r M$	Valore $m^{[P]} - r M$
10 000	8 200	800	7 400
15 000	3 200	1 200	2 000
16 852	1 348	1 348	0
18 000	200	1 440	-1 240

Creazione / distruzione di valore - Portafoglio B

Risk pooling (cont.)



Allocazione di capitale; creazione / distruzione di valore

Osservazione

Maggiore tasso $r \Rightarrow$ minore regione di creazione di valore

Sia creazione di valore che solvibilità sono due obiettivi importanti per ogni impresa assicuratrice

Per ogni dato portafoglio (e un dato ammontare di caricamento di sicurezza), i due obiettivi richiedono azioni opposte: un capitale maggiore

- ▷ aumenta il livello di solvibilità
- ▷ diminuisce la creazione di valore

Esempio

Riferimento al portafoglio B; si assuma 5% come tasso di caricamento di sicurezza $\Rightarrow m^{[P]} = 2\,500$

Costo opportunità del capitale $r = 0.08$

Tabella: creazione di valore e probabilità di default π in funzione della allocazione di capitale

Risk pooling (cont.)

M	$r M$	Valore $m^{[P]} - r M$	Prob. di default $\pi(m^{[P]} + M)$
10 000	800	1 700	0.063
15 700	1 256	1 244	0.005
20 000	1 600	900	0.001
35 000	2 800	-300	≈ 0

Creazione di valore e probabilità di default - Portafoglio B

3 RIASSICURAZIONE

Riassicurazione: tradizionale trasferimento di rischi da un assicuratore (cedente) ad un altro assicuratore (riassicuratore)

Principale scopo (tecnico): protezione contro il default di un portafoglio (e dell'assicuratore)

Azione: ridurre la rischiosità del portafoglio, in termini di varianza del payout totale e quindi di $\sigma^{[P]}$

Problema: interazione tra riduzione di $\sigma^{[P]}$ e costo della riassicurazione, in pratica riduzione di $m^{[P]}$ e conseguente effetto sull'indice:

$$s = \frac{m^{[P]} + M}{\sigma^{[P]}}$$

Idea base sottostante ogni *forma riassicurativa*: ripartire il payout totale, $X^{[P]}$:

$$X^{[P]} = X^{[ret]} + X^{[ced]}$$

dove:

- l'ammontare aleatorio $X^{[ced]}$ è la parte *ceduta* del payout totale \Rightarrow pagato dal riassicuratore alla cedente
- l'ammontare $X^{[ret]}$ è la parte *conservata* (o *ritenuta*) del payout totale \Rightarrow payout netto della cedente

Osservazione

La cedente rimane responsabile per i pagamenti agli assicurati \Rightarrow sopporta il rischio di default del riassicuratore

Premio di riassicurazione: prezzo pagato dalla cedente al riassicuratore, come compenso per il suo (eventuale) intervento

Due approcci alla definizione della ripartizione del payout

(1) Assegnare una funzione, Γ , che opera a livello di portafoglio:

$$X^{[\text{ret}]} = \Gamma(X^{[P]})$$

Il payout ritenuto può dipendere anche da altre quantità, ad es. il numero totale di sinistri, K , nel portafoglio, cioè

$$X^{[\text{ret}]} = \Gamma(X^{[P]}, K)$$

⇒ definizione della ripartizione a livello di portafoglio

⇒ forme di *riassicurazione globale*

(2) Essendo

$$X^{[P]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)}$$

si ripartisce ogni $X^{(j)}$ definendo una funzione γ

$$X^{(j)[ret]} = \gamma(X^{(j)})$$

Allora

$$X^{[ret]} = \sum_{j=1}^n X^{(j)[ret]}$$

⇒ definizione della ripartizione a livello di singolo rischio assicurato

⇒ forme di *riassicurazione individuale*

Iniziamo descrivendo un'implementazione dell'approccio 1

RIASSICURAZIONE STOP-LOSS

Fornisce una protezione “diretta” contro il default di portafoglio, in quanto direttamente riferita al payout totale

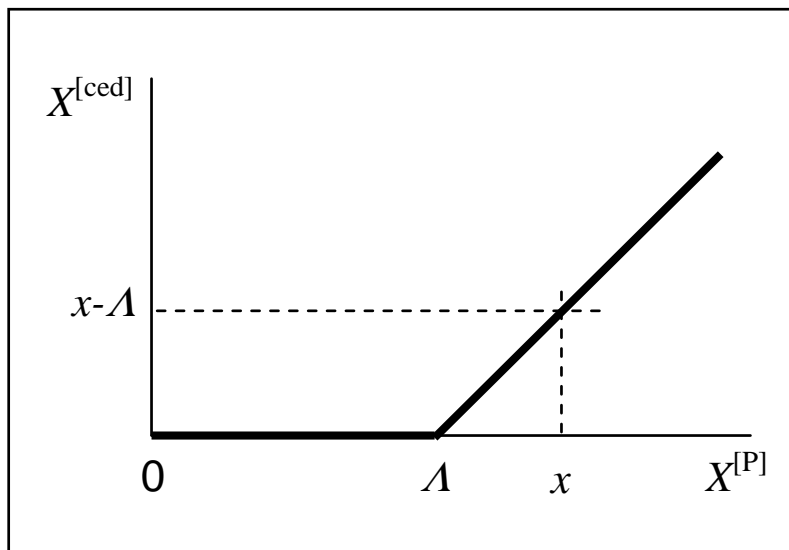
Il riassicuratore incassa il premio di riassicurazione $\Pi^{[reins]}$, e paga la parte di $X^{[P]}$ che supera un importo stabilito Λ , detto *ritenzione stop-loss*, o *priorità*

La priorità è usualmente espressa in termini dell'introito premi totale $\Pi^{[P]}$ (e solitamente $\Lambda > \Pi^{[P]}$, per esempio $\Lambda = 1.5 \Pi^{[P]}$)

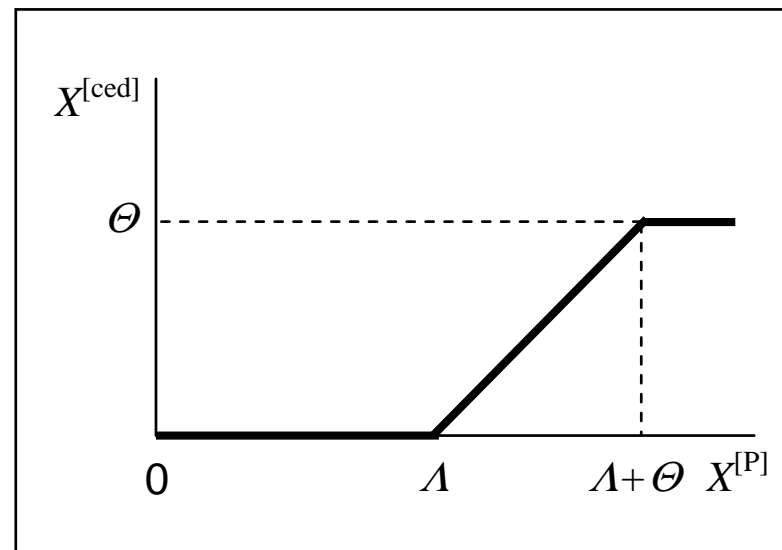
Ripartizione (v. Figura (a)):

$$X^{[ret]} = \begin{cases} X^{[P]} & \text{se } X^{[P]} \leq \Lambda \\ \Lambda & \text{se } X^{[P]} > \Lambda \end{cases}$$
$$X^{[ced]} = \begin{cases} 0 & \text{se } X^{[P]} \leq \Lambda \\ X^{[P]} - \Lambda & \text{se } X^{[P]} > \Lambda \end{cases}$$

Riassicurazione (cont.)



(a)



(b)

Intervento del riassicuratore

Può essere fissato un *limite superiore* Θ all'intervento del riassicuratore. Allora

$$X^{[\text{ret}]} = \begin{cases} X^{[\text{P}]} & \text{se } X^{[\text{P}]} \leq \Lambda \\ \Lambda & \text{se } \Lambda < X^{[\text{P}]} < \Lambda + \Theta \\ X^{[\text{P}]} - \Theta & \text{se } X^{[\text{P}]} \geq \Lambda + \Theta \end{cases}$$

$$X^{[\text{ced}]} = \begin{cases} 0 & \text{se } X^{[\text{P}]} \leq \Lambda \\ X^{[\text{P}]} - \Lambda & \text{se } \Lambda < X^{[\text{P}]} < \Lambda + \Theta \\ \Theta & \text{se } X^{[\text{P}]} \geq \Lambda + \Theta \end{cases}$$

(v. Figura (b))

Perdita della cedente in assenza di riassicurazione:

$$L = X^{[P]} - \Pi^{[P]}$$

Ovviamente

$$L = -Z^{[P]}$$

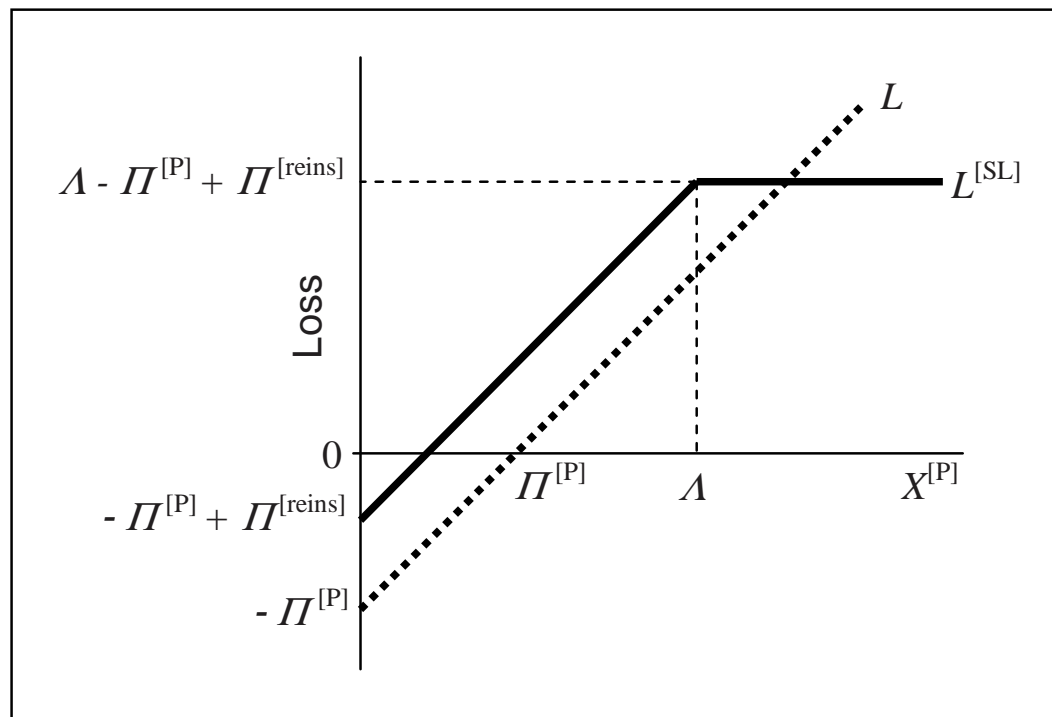
In presenza di riassicurazione stop-loss (senza limite superiore), perdita data da:

$$L^{[SL]} = \underbrace{X^{[P]} - \Pi^{[P]}}_L + \Pi^{[reins]} - X^{[ced]} = \begin{cases} L + \Pi^{[reins]} & \text{se } X^{[P]} \leq \Lambda \\ \Lambda - \Pi^{[P]} + \Pi^{[reins]} & \text{se } X^{[P]} > \Lambda \end{cases}$$

(v. Figura)

La riassicurazione Stop-loss fa diretto riferimento alla perdita di portafoglio \Rightarrow in teoria soluzione ottima per la protezione del portafoglio

Riassicurazione (cont.)



Perdita della cedente

In pratica

- ▷ implica un'esposizione potenzialmente pericolosa per il riassicuratore, sulla coda della distribuzione di probabilità di $X^{[P]}$
- ▷ caricamento di sicurezza molto elevato incluso nel premio di riassicurazione $\Pi^{[reins]}$
- ▷ prevalentemente usata come componente di un *programma riassicurativo*, dopo l'implementazione di altre forme riassicurative a protezione del portafoglio

DAL PORTAFOGLIO AI SINGOLI RISCHI

Consideriamo coperture riassicurative definite a “livello di singolo rischio”

Una *politica di riassicurazione* è definita dalla

$$\underline{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$$

dove $a^{(j)}$ ($0 < a^{(j)} \leq 1$) è la quota conservata del rischio j , cioè la *aliquota di ritenzione*

Si ha:

$$X^{(j)[\text{ret}]} = a^{(j)} X^{(j)} = \begin{cases} a^{(j)} x^{(j)} & \text{in caso di sinistro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^{(j)[\text{ret}}] &= a^{(j)} \mathbb{E}[X^{(j)}] = a^{(j)} P^{(j)} \\ \text{Var}[X^{(j)[\text{ret}}] &= (a^{(j)})^2 \text{Var}[X^{(j)}] \leq \text{Var}[X^{(j)}] \end{aligned}$$

Premio di riassicurazione: aliquote di premi e, quindi, di caricamenti di sicurezza cedute al riassicuratore

Per $j = 1, 2, \dots, n$, siano

$\Pi^{(j)[ret]}$ = parte di premio conservata

$m^{(j)[ret]}$ = parte di caricamento di sicurezza conservata

Ovviamente

$$m^{(j)[ret]} = \Pi^{(j)[ret]} - a^{(j)} P^{(j)}$$

Se

$$\Pi^{(j)[ret]} = a^{(j)} \Pi^{(j)}$$

segue che

$$m^{(j)[ret]} = a^{(j)} \Pi^{(j)} - a^{(j)} P^{(j)} = a^{(j)} m^{(j)}$$

La parte di caricamento di sicurezza ceduta può essere diversa da $(1 - a^{(j)}) m^{(j)}$; in particolare:

- può essere minore
 - ▷ se il riassicuratore riconosce un compenso alla cedente per il lavoro sul mercato assicurativo (*commissione di riassicurazione*)
 - ▷ se il riassicuratore accetta un tasso di caricamento di sicurezza minore, grazie a una maggiore dimensione di portafoglio e quindi un maggiore effetto pooling
- può essere minore o maggiore perché il riassicuratore usa una base tecnica diversa da quella impiegata dalla cedente, e quindi applica un diverso premio equo

Esempio

Per il contratto 1 nel portafoglio

- somma assicurata $x^{(1)} = 1\,000$
- probabilità di sinistro (valutata dalla cedente) $p^{(1)} = 0.01$
- premio equo $P^{(1)} = 10$
- caricamento di sicurezza 10% del premio equo:
 $m^{(1)} = 1$; $II^{(1)} = 11$
- aliquota di ritenzione $a^{(1)} = 0.70$

1. Il riassicuratore concorda sulla base tecnica ($p^{(1)} = 0.01$ e caricamento di sicurezza 10%), e vuole ottenere una quota proporzionale del caricamento di sicurezza. Quindi per la cedente si ha

$$m^{(1)[ret]} = 0.7$$

$\Pi^{(1)[ret]} = 7.7 \Rightarrow$ proporzionale a $\Pi^{(1)}$ secondo l'aliquota di ritenzione

2. Il riassicuratore concorda sulla base tecnica, ma lascia alla cedente una quota di caricamento di sicurezza maggiore del 70%, ad es. 80%. Si ha

$$\Pi^{(1)[ret]} = 0.70 P^{(1)} + 0.80 m^{(1)} = 7.8$$

3. Il riassicuratore non concorda sulla base tecnica:
- ▷ accetta un caricamento di sicurezza del 10% del premio equo
 - ▷ valuta la probabilità di sinistro $\tilde{p}^{(1)} = 0.012$

Quindi

$$\text{premio equo (totale)} \quad \tilde{P}^{(1)} = 12$$

$$\text{premio con caric. di sicurezza (totale)} \quad \tilde{\Pi}^{(1)} = 13.2$$

Se il riassicuratore vuole ottenere una quota proporzionale del premio totale $\tilde{\Pi}^{(1)}$, cioè $0.30 \times 13.2 = 3.96$, la cedente conserva

$$\Pi^{(1)[\text{ret}]} = \Pi^{(1)} - 0.30 \tilde{\Pi}^{(1)} = 11 - 3.96 = 7.04$$

$$m^{(1)[\text{ret}]} = \Pi^{(1)[\text{ret}]} - 0.70 P^{(1)} = 7.04 - 7 = 0.04$$

Effetto della riassicurazione sulla rischiosità del portafoglio:
quantificazione in termini della distribuzione di probabilità del payout
totale, $X^{[\text{ret}]}$, e relativi valori sintetici, in particolare l'indice di stabilità
relativa

Risulta

$$\mathbb{E}[X^{[\text{ret}]}] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n X^{(j)[\text{ret}]} \right] = \sum_{j=1}^n a^{(j)} P^{(j)}$$

e (assumendo indipendenza tra i rischi assicurati)

$$\text{Var}[X^{[\text{ret}]}] = \sum_{j=1}^n \text{Var}[X^{(j)[\text{ret}]}] = \sum_{j=1}^n (a^{(j)})^2 \text{Var}[X^{(j)}]$$

Sia $\sigma^{[\text{ret}]}$ lo sqm del payout totale

$$\sigma^{[\text{ret}]} = \sqrt{\text{Var}[X^{[\text{ret}]}]}$$

Sia $m^{[\text{ret}]}$ il caricamento di sicurezza conservato:

$$m^{[\text{ret}]} = \sum_{j=1}^n m^{(j)[\text{ret}]}$$

Risulta:

$$s^{[\text{ret}]} = \frac{m^{[\text{ret}]} + M}{\sigma^{[\text{ret}]}}$$

e per la probabilità di default:

$$\pi(m^{[\text{ret}]} + M) = \mathbb{P}[X^{[\text{ret}]} > P^{[\text{ret}]} + m^{[\text{ret}]} + M] = 1 - \Phi(s^{[\text{ret}]})$$

Notare: le quote di rischi cedute incidono sia sul profitto atteso che sullo sqm, in particolare:

$$m^{[\text{ret}]} < m \quad \text{e} \quad \sigma^{[\text{ret}]} < \sigma$$

Per quantificare l'effetto, occorre riferirsi a specifiche politiche riassicurative \underline{a} , e regole per la ripartizione del caricamento di sicurezza

RIASSICURAZIONE QUOTA-SHARE

La riassicurazione Quota-share è definita da:

$$\underline{a} = (a, a, \dots, a); \quad 0 < a < 1$$

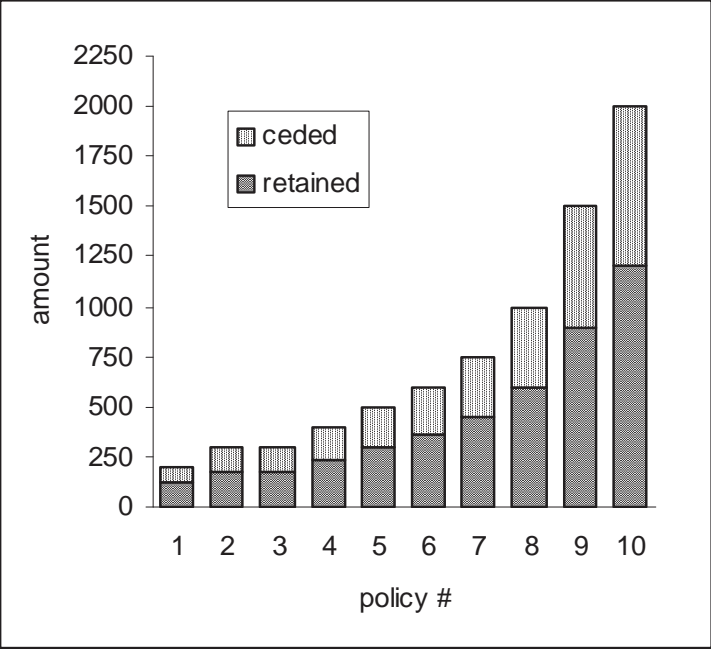
⇒ la stessa aliquota di ritenzione è applicata a tutti i rischi individuali

Effetto sulle somme assicurate: v. Figura (a) ⇒ riduzione proporzionale

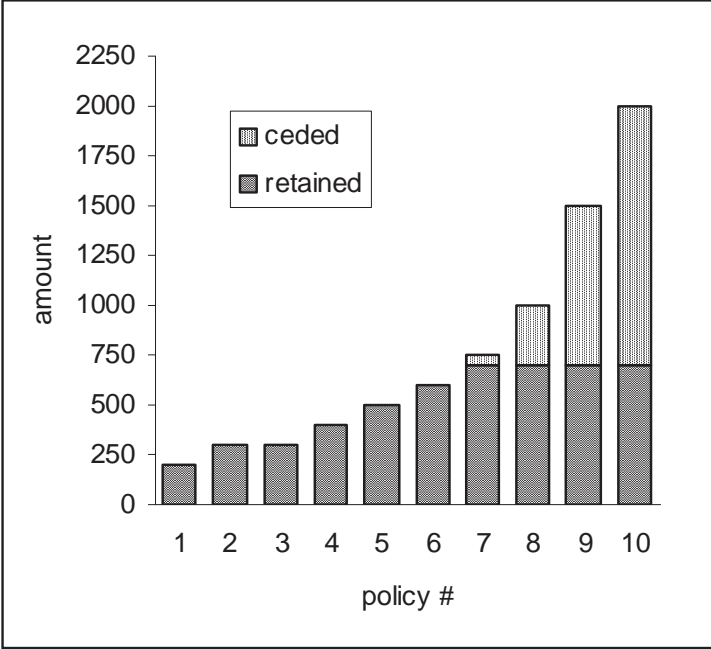
Profitto atteso conservato e sqm del payout:

$$\begin{aligned} m^{[\text{ret}]} &< m, \quad \text{per esempio } m^{[\text{ret}]} = a m \\ \sigma^{[\text{ret}]} &= a \sigma \end{aligned}$$

Riassicurazione (cont.)



Riassicurazione Quota-share



Riassicurazione Surplus

RIASSICURAZIONE SURPLUS

Sia $x^{[\text{ret}]}$ la conservazione in termini di somme assicurate, cioè la *retention line*

Per il generico rischio, con somma assicurata $x^{(j)}$, la ripartizione è definita come segue:

l'importo $\min\{x^{(j)}, x^{[\text{ret}]}\}$ è conservato

l'importo $\max\{0, x^{(j)} - x^{[\text{ret}]}\}$, cioè il *surplus*, è ceduto

La politica riassicurativa \underline{a} è quindi:

$$a^{(j)} = \frac{\min\{x^{(j)}, x^{[\text{ret}]}\}}{x^{(j)}} = \min \left\{ 1, \frac{x^{[\text{ret}]}}{x^{(j)}} \right\}; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Effetto sulle somme assicurate: v. Figura (b) \Rightarrow “livellamento”

Maggiore efficacia della riassicurazione surplus, grazie all'effetto di livellamento

- ▷ somma assicurata molto elevata \Rightarrow effetto pooling tende ad azzerarsi
- ▷ riassicurazione surplus mitiga questo inconveniente

ESEMPI

Consideriamo i seguenti aspetti delle politiche riassicurative:

1. effetti della riassicurazione quota-share e surplus, in termini di profitto atteso conservato, sqm del payout di portafoglio, e probabilità di default risultante $\pi(m^{[\text{ret}]} + M)$
2. varie combinazioni di riassicurazione surplus e allocazione di capitale, in termini di profitto atteso conservato e sqm del payout di portafoglio, per un dato livello di probabilità di default

Esempio 1

Riferimento: portafoglio C. Si assuma:

tasso di caricamento di sicurezza $\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}} = 0.10$

capitale allocato $M = 10\,000$

quota di premi (e quindi di profitto atteso) conservata uguale alla quota di somma assicurata conservata

Si osservi che:

- lo stesso ammontare di profitto atteso conservato, $m^{[ret]} = 45\,000$, è ottenuto con $a = 0.90$ e $x^{[ret]} = 6\,000$
- nella quota-share lo sqm è maggiore ($\sigma^{[ret]} = 38\,220$ contro $\sigma^{[ret]} = 33\,271$)
- nella quota-share la probabilità di default è maggiore ($\pi(m^{[ret]} + M) = 0.075$ contro $\pi(m^{[ret]} + M) = 0.049$)
- situazioni analoghe per $a = 0.75$ e $x^{[ret]} = 3\,000$

Si noti inoltre che:

- la stessa probabilità di default, $\pi(m^{[\text{ret}]} + M) = 0.004$, è ottenuta nella quota-share con $a = 0.1573$, e nella surplus con $x^{[\text{ret}]} = 1\,500$
- la surplus lascia un profitto atteso molto maggiore ($m^{[\text{ret}]} = 33\,750$ contro $m^{[\text{ret}]} = 7\,865$)

Riassicurazione (cont.)

a	$m^{[ret]}$	$\sigma^{[ret]}$	$s^{[ret]}$	$\pi(m^{[ret]} + M)$
1.000	50 000	42 467	1.413	0.079
0.900	45 000	38 220	1.439	0.075
0.750	37 500	31 850	1.491	0.068
0.157	7 865	6 680	2.674	0.004

Riassicurazione Quota-share - Portafoglio C

$x^{[ret]}$	$m^{[ret]}$	$\sigma^{[ret]}$	$s^{[ret]}$	$\pi(m^{[ret]} + M)$
$\geq 8\ 000$	50 000	42 467	1.413	0.079
6 000	45 000	33 271	1.653	0.049
5 000	42 500	28 867	1.819	0.034
3 000	37 500	20 864	2.277	0.011
1 500	33 750	16 353	2.675	0.004

Riassicurazione Surplus - Portafoglio C

Esempio 2

Riferimento: portafoglio B (10 000 rischi, tutti con somma assicurata $x = 1\,000$, e probabilità di sinistro $p = 0.005$)

Analisi di combinazioni di retention line $x^{[\text{ret}]}$ e capitale allocato M , che comportano uguale probabilità di default $\pi(m^{[\text{ret}]} + M) = 0.005$ e quindi uguale valore $s^{[\text{ret}]} = 2.5805$:

$$\frac{m^{[\text{ret}]} + M}{\sigma^{[\text{ret}]}} = 2.5805$$

Si assuma il tasso di caricamento di sicurezza $\frac{m^{[P]}}{P^{[P]}} = 0.10$, che implica $m^{[P]} = 5\,000$. Quindi:

$$m^{[\text{ret}]} = \begin{cases} m^{[P]} \frac{x^{[\text{ret}]}}{x} = 5 x^{[\text{ret}]} & \text{per } x^{[\text{ret}]} < 1\,000 \\ m^{[P]} = 5\,000 & \text{per } x^{[\text{ret}]} \geq 1\,000 \end{cases}$$

Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned}\sigma^{[\text{ret}]} &= \sqrt{10\,000 (\min\{x^{[\text{ret}]}, 1\,000\})^2 p (1 - p)} \\ &= 100 \min\{x^{[\text{ret}]}, 1\,000\} \sqrt{p (1 - p)} = 7.053 \min\{x^{[\text{ret}]}, 1\,000\}\end{aligned}$$

e quindi risulta:

$$M = 13.2 \min\{x^{[\text{ret}]}, 1\,000\}$$

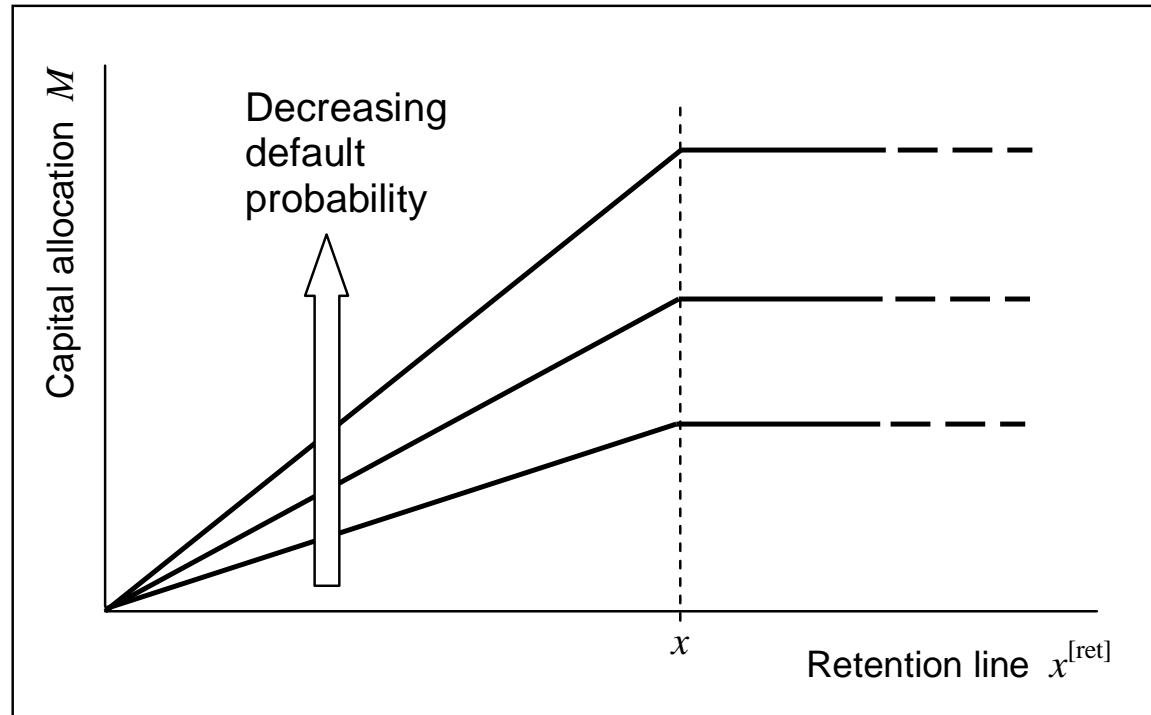
La formula può essere generalizzata (seppure con riferimento alla particolare struttura di portafoglio con somme assicurate x) come segue:

$$M = \kappa \min\{x^{[\text{ret}]}, x\}$$

dove κ dipende, in particolare, dalla probabilità di default fissata

Figura: relazione tra M e $x^{[\text{ret}]}$ in corrispondenza a varie probabilità fissate

Riassicurazione (cont.)



Allocazione di capitale e riassicurazione Surplus

Riassicurazione (cont.)

M	$x^{[\text{ret}]}$	$m^{[\text{ret}]}$	$\sigma^{[\text{ret}]}$
13 200	$\geq 1\,000$	5 000	7 053
6 600	500	2 500	3 527
2 640	200	1 000	1 411
1 320	100	500	705

Allocazione di capitale e riassicurazione Surplus - Portafoglio B

POLITICA OTTIMA DI RIASSICURAZIONE

Si consideri il seguente problema: trovare la politica riassicurativa

$$\underline{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$$

che comporta la minima probabilità di default, nell'ambito dell'insieme di politiche riassicurative che implicano lo stesso ammontare di profitto atteso conservato $m^{[\text{ret}]}$

⇒ problema di *ottimizzazione vincolata*

I risultati sotto riportati valgono in situazioni più generali (non limitate alla copertura assicurativa “elementare”)

Impostazione: B. de Finetti (1940)

Sia $\hat{m}^{(j)}$ il caricamento di sicurezza del rischio j ceduto in caso di ritenzione nulla, cioè se $a^{(j)} = 0$; può essere $\hat{m}^{(j)} \geq m^{(j)}$ (v. sopra)

Per qualsiasi $a^{(j)}$, il caricamento ceduto sia $(1 - a^{(j)}) \hat{m}^{(j)}$

Il caricamento conservato, funzione di $a^{(j)}$, è dato da:

$$m^{(j)[\text{ret}]}(a^{(j)}) = m^{(j)} - (1 - a^{(j)}) \hat{m}^{(j)}$$

Il caricamento totale conservato, funzione della politica riassicurativa \underline{a} , è dato da:

$$m^{[\text{ret}]}(\underline{a}) = m^{[\text{P}]} - \sum_{j=1}^n (1 - a^{(j)}) \hat{m}^{(j)}$$

Sqm del payout di portafoglio:

$$\sigma^{[\text{ret}]}(\underline{a}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a^{(j)})^2 (\sigma^{(j)})^2} \quad \text{con} \quad (\sigma^{(j)})^2 = \text{Var}[X^{(j)}]$$

Indice di stabilità relativa:

$$s^{[\text{ret}]}(\underline{a}) = \frac{m^{[\text{ret}]}(\underline{a}) + M}{\sigma^{[\text{ret}]}(\underline{a})}$$

Probabilità di default, ora indicata con:

$$\pi^{[\text{ret}]}(\underline{a}) = 1 - \Phi(s^{[\text{ret}]}(\underline{a}))$$

Sulla linea di livello

$$m^{[\text{ret}]}(\underline{a}) + M = \text{costante}$$

si ha

$$\min_{\{\underline{a}\}} \sigma^{[\text{ret}]}(\underline{a}) \Rightarrow \max_{\{\underline{a}\}} s^{[\text{ret}]}(\underline{a}) \Rightarrow \min_{\{\underline{a}\}} \pi^{[\text{ret}]}(\underline{a})$$

Si fissi la perdita totale \hat{m} di profitto atteso in seguito a riassicurazione

Problema di ottimo vincolato:

$$\min_{\underline{a}} \sum_{j=1}^n (a^{(j)})^2 (\sigma^{(j)})^2$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (1 - a^{(j)}) \hat{m}^{(j)} = \hat{m} \\ 0 \leq a^{(j)} \leq 1; \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Si dimostra che la soluzione ottima è data dalle

$$a^{(j)} = \min \left\{ B \frac{\hat{m}^{(j)}}{(\sigma^{(j)})^2}, 1 \right\}; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

con

$$B = \frac{\sum_{j=1}^{j_B} \hat{m}^{(j)} - \hat{m}}{\sum_{j=1}^{j_B} \frac{\hat{m}^{(j)}}{(\sigma^{(j)})^2}}$$

dove j_B è il massimo degli indici j per cui è $B \frac{\hat{m}^{(j)}}{(\sigma^{(j)})^2} \leq 1$, avendo numerato i rischi per $\frac{\hat{m}^{(j)}}{(\sigma^{(j)})^2}$ non decrescenti

Interpretazione della soluzione (*)

- B è tanto maggiore quanto minore è \hat{m} : minore perdita di profitto atteso \Rightarrow maggiore conservazione in generale
- $a^{(j)}$ è tanto maggiore quanto maggiore è $\hat{m}^{(j)}$: maggiore perdita di profitto atteso sul rischio $j \Rightarrow$ maggiore conservazione del rischio j
- $a^{(j)}$ è tanto maggiore quanto minore è $(\sigma^{(j)})^2$: minore rischiosità \Rightarrow maggiore conservazione del rischio j

Ottimalità della riassicurazione Surplus

Riferimento: portafoglio di coperture assicurative elementari, per rischi con probabilità di sinistro $p^{(j)} = p$, per $j = 1, 2, \dots, n$

Quindi

$$(\sigma^{(j)})^2 = (x^{(j)})^2 p (1 - p)$$

Si assuma $\hat{m}^{(j)}$ proporzionale alla somma assicurata $x^{(j)}$:

$$\hat{m}^{(j)} = \alpha x^{(j)}; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (^\circ)$$

La relazione $(^\circ)$ vale, in particolare, se

1. $m^{(j)} = \beta P^{(j)} = \beta p x^{(j)}$,

e

2. $\hat{m}^{(j)} = m^{(j)}$

Dalla (*) si ha:

$$a^{(j)} = \min \left\{ B \frac{\alpha}{x^{(j)} p (1-p)}, 1 \right\}$$

e in termini monetari:

$$a^{(j)} x^{(j)} = \min \left\{ B \frac{\alpha}{p (1-p)}, x^{(j)} \right\}$$

La quantità $B \frac{\alpha}{p (1-p)}$ è indipendente da j , quindi posto

$$x^{[\text{ret}]} = B \frac{\alpha}{p (1-p)}$$

si trova:

$$a^{(j)} x^{(j)} = \min \left\{ x^{[\text{ret}]}, x^{(j)} \right\}$$

Interpretazione dell'ottimalità

- ▷ per un fissato livello $x^{[\text{ret}]}$, la probabilità di rovina risulta minimizzata, in corrispondenza all'ammontare di perdita di profitto atteso \hat{m} implicitamente determinato dal livello $x^{[\text{ret}]}$
- ▷ ovviamente l'ammontare \hat{m} e quindi l'entità complessiva di cessione non necessariamente sono "adatti" alla situazione patrimoniale della cedente

FORME RIASSICURATIVE

Classificazioni

1. “a livello di singolo rischio” / “a livello di portafoglio”

a livello di singolo rischio: parametri riassicurativi riferiti al singolo rischio (es.: aliquota a nella quota-share, retained line $x^{[ret]}$ nella surplus)

a livello di portafoglio: parametri riassicurativi riferiti al payout totale (es.: priorità Λ e limite superiore Θ nella stop-loss)

2. “proporzionale” / “non-proporzionale”

proporzionale: benefici e premi sono suddivisi tra cedente e riassicuratore secondo le quote risultanti dal contratto riassicurativo \Rightarrow la ripartizione dei benefici è determinata quando è definito il rapporto riassicurativo; esempi: quota-share e surplus

non-proporzionale: la regola per la ripartizione (del totale) dei benefici è stabilita quando è definito il rapporto riassicurativo, ma l'effettiva ripartizione dipende dagli importi dei benefici, e/o dal numero di benefici da pagare nel portafoglio, e/o dal payout totale; esempi: stop-loss, catastrofale e excess-of-loss (XL)

Riassicurazione (cont.)

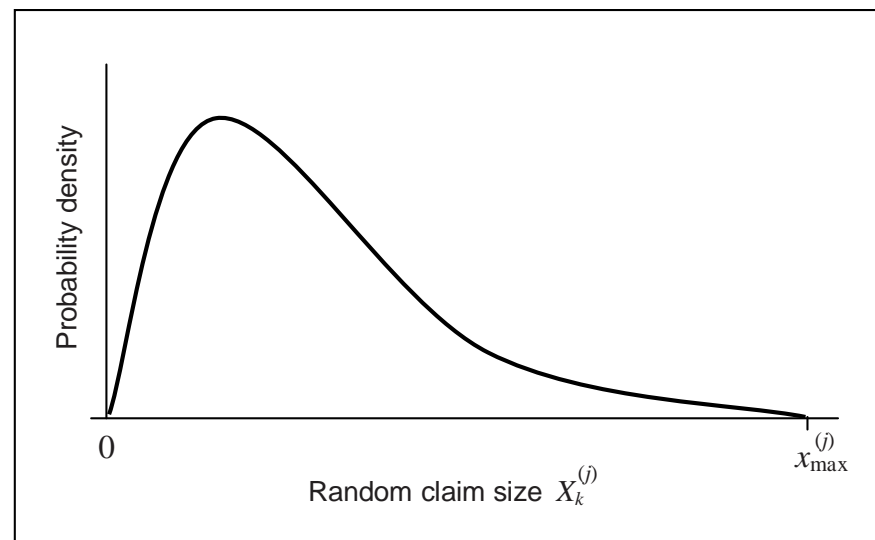
		PROPORTIONAL	NON PROPORTIONAL
Level	POLICY	Quota-share Surplus	Excess-of-loss (XL)
	PORTFOLIO		Stop-loss Catastrophe

Forme riassicurative

SINISTRI CON DANNO ALEATORIO. RIASSICURAZIONE XL

Riferimento a rischi assicurati più generali di quello relativo alla copertura assicurativa elementare

Si consideri il generico rischio j nel portafoglio. Per il danno aleatorio causato dal k -esimo sinistro, $X_k^{(j)}$, si assuma una distribuzione di probabilità continua con determinazione possibile massima $x_{\max}^{(j)}$



Riassicurazione Quota-share:

$$X_k^{(j)[ret]} = a X_k^{(j)}$$

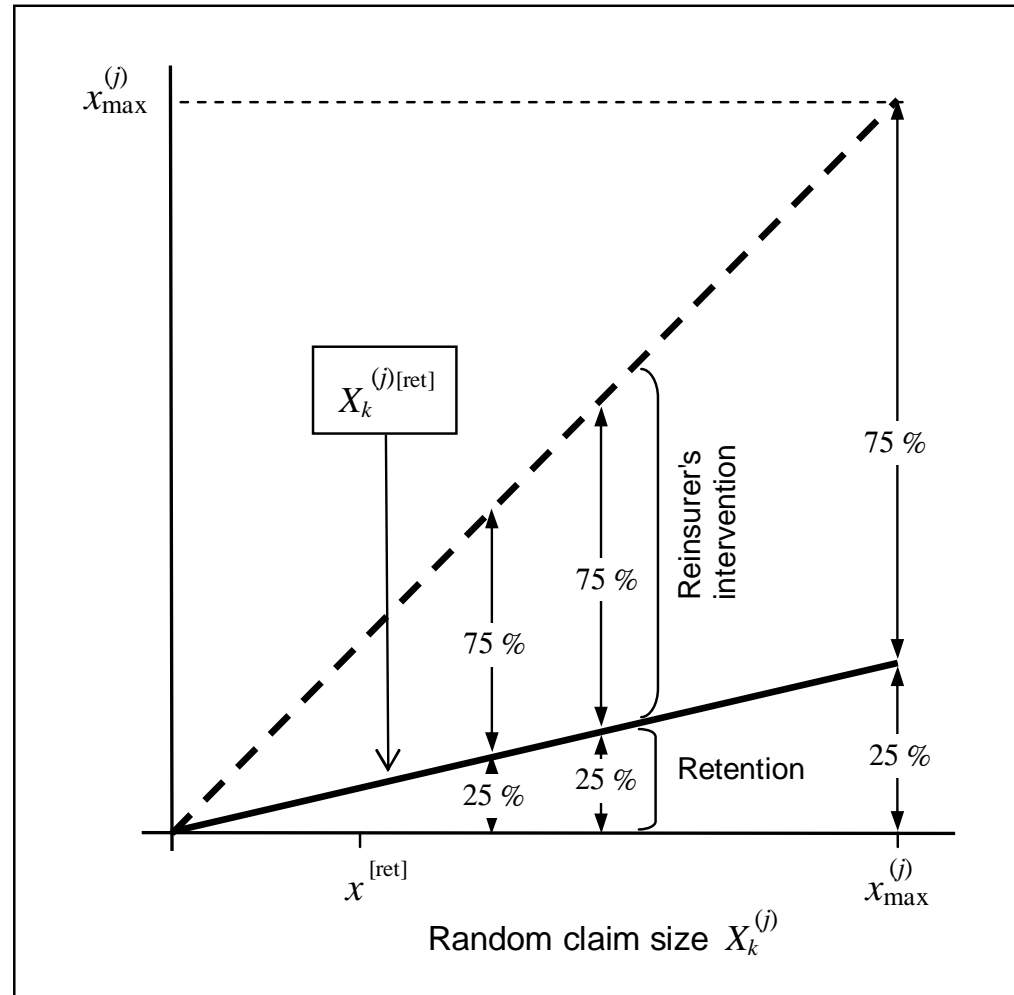
Riassicurazione Surplus (assumendo $x^{[ret]} < x_{\max}^{(j)}$):

$$X_k^{(j)[ret]} = \frac{x^{[ret]}}{x_{\max}^{(j)}} X_k^{(j)}$$

Notare:

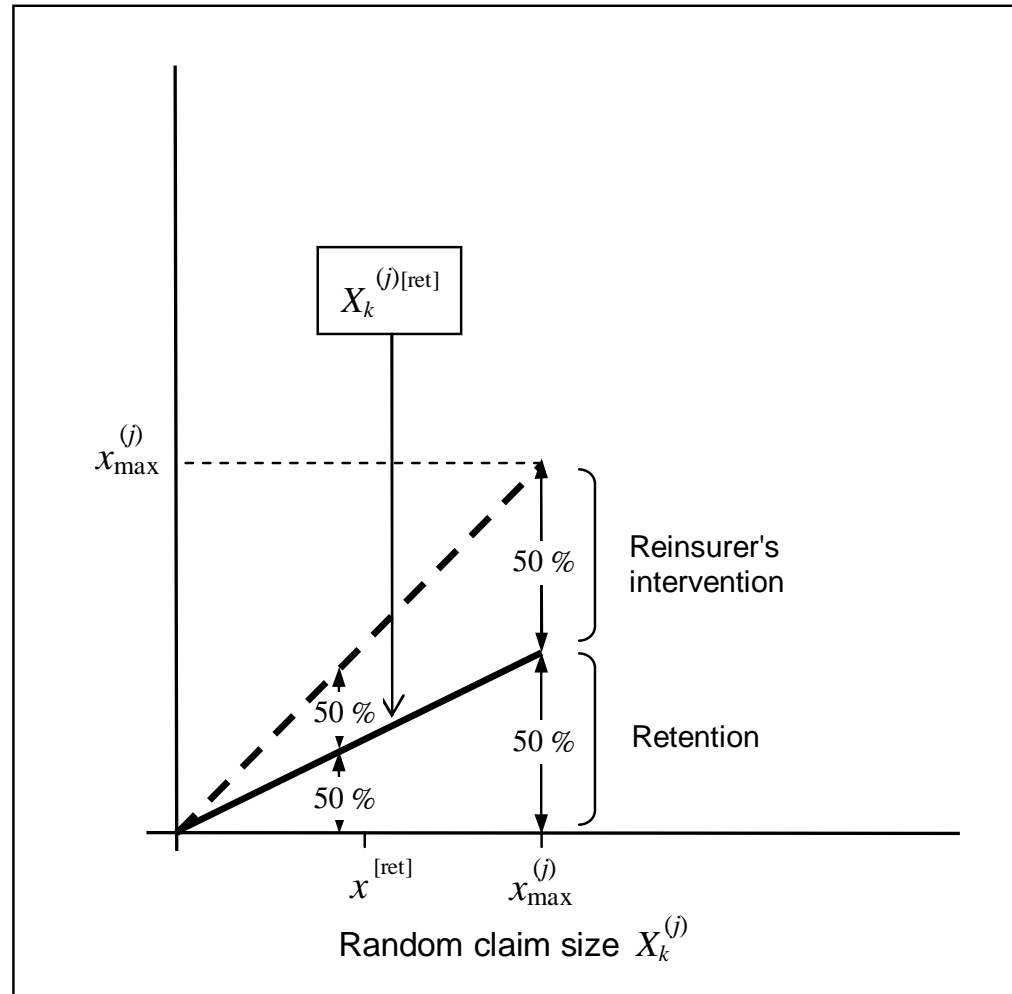
- quota-share \Rightarrow aliquota di ritenzione a per tutti i rischi
- surplus reinsurance \Rightarrow aliquota di ritenzione $\frac{x^{[ret]}}{x_{\max}^{(j)}}$, dipendente da $x_{\max}^{(j)}$ specifico di ogni rischio (v. Figure seguenti)
- entrambe le forme riassicurative \Rightarrow riassic. proporzionale, in quanto, qualunque sia $X_k^{(j)}$, la quota ceduta (a o $\frac{x^{[ret]}}{x_{\max}^{(j)}}$) è nota al momento di definizione del contratto riassicurativo

Riassicurazione (cont.)



Payout della cedente nella riassicurazione surplus; $x_{\max}^{(j)} = 4 x^{[ret]}$

Riassicurazione (cont.)



Payout della cedente nella riassicurazione surplus; $x_{max}^{(j)} = 2 x^{[ret]}$

Ritenzione nella riassicurazione *Excess-of-Loss* (XL) definita come segue:

$$X_k^{(j)[ret]} = \min\{X_k^{(j)}, \Lambda\}$$

il riassicuratore paga

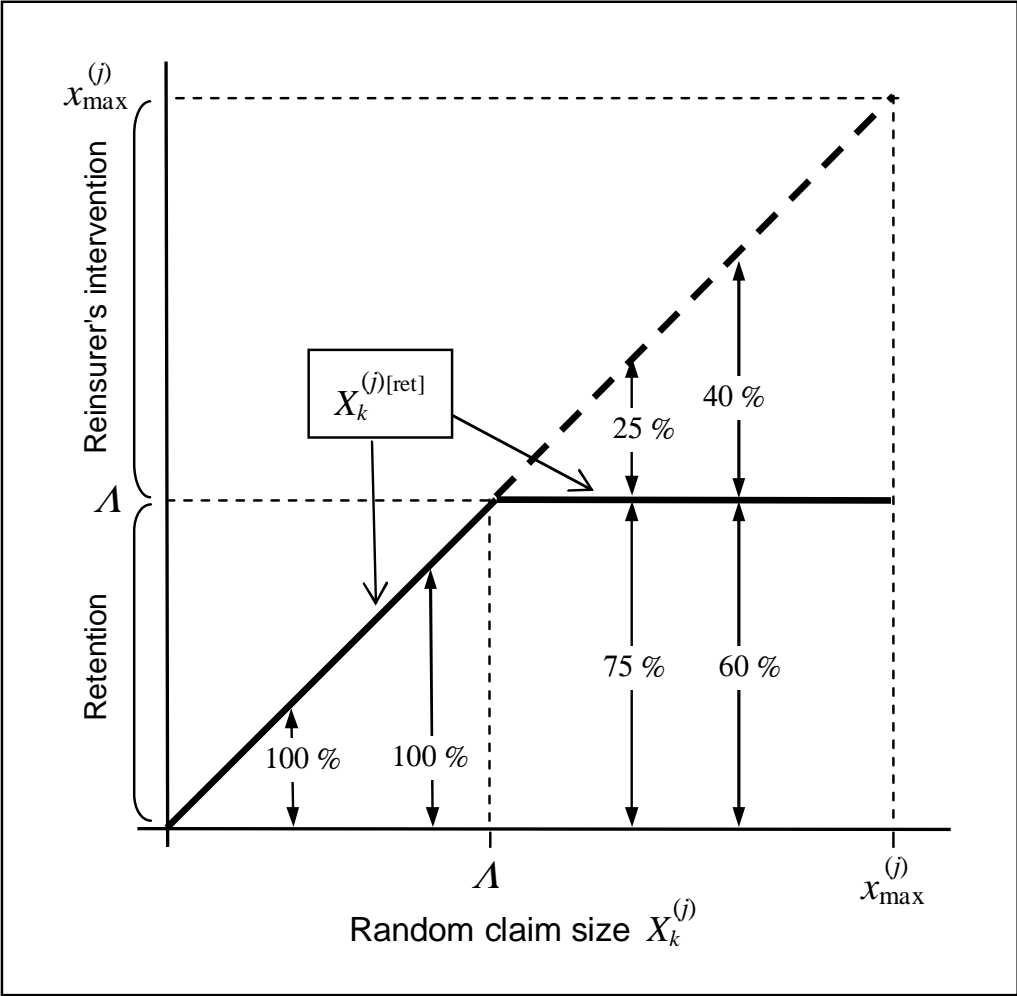
$$X_k^{(j)[ced]} = \max\{X_k^{(j)} - \Lambda, 0\}$$

con Λ franchigia ($0 \leq \Lambda \leq x_{\max}^{(j)}$)

Notare che, in questa XL:

- non è fissato un *upper-limit* \Rightarrow il riassicuratore paga l'intero importo sopra franchigia
- all'aumentare dell'importo del danno
 - ▷ la quota conservata $\frac{X_k^{(j)[ret]}}{X_k^{(j)}} = \min\left\{1, \frac{\Lambda}{X_k^{(j)}}\right\}$ decresce
 - ▷ l'intervento del riassicuratore cresce (anche in termini relativi), e non è noto a priori \Rightarrow riassicurazione non proporzionale

Riassicurazione (cont.)



Payout della cedente nella riassicurazione XL

Si assuma:

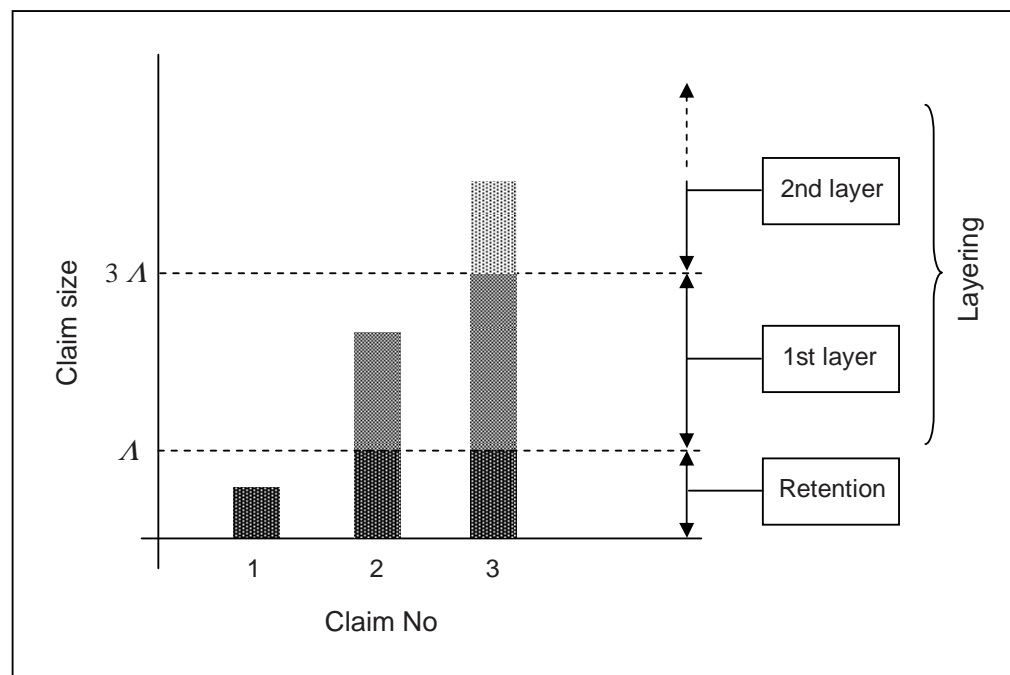
- franchigia Λ
- upper limit $h \Lambda$ (con h intero, $h \geq 2$)

Possibili situazioni, in relazione al danno aleatorio $X_k^{(j)}$:

1. $X_k^{(j)} \leq \Lambda \Rightarrow$ la cedente conserva integralmente il sinistro
2. $\Lambda < X_k^{(j)} \leq h \Lambda \Rightarrow$ la riassic. XL copre completamente il danno sopra franchigia
3. $X_k^{(j)} > h \Lambda \Rightarrow$ la cedente deve ancora cedere $X_k^{(j)} - h \Lambda$, mediante una seconda XL (o eventualmente più XL), con altro riassicuratore (o con lo stesso primo riassicuratore, eventualmente con base tecnica diversa da quella impiegata nella prima XL)

Cessione in riassicurazione suddivisa in due o più *layers*:

- ▷ il primo layer copre l'intervallo $(\Lambda, h\Lambda)$
- ▷ una o più XL ulteriori possono coprire l'intervallo $(h\Lambda, X_k^{(j)})$



Layers nella riassicurazione XL ($h = 3$)

RIASSICURAZIONE CATASTROFALE (CAT XL)

Riassicurazione non-proporzionale, a livello di portafoglio

Scopo: proteggere il portafoglio (e l'impresa assicuratrice) contro il rischio che un singolo evento ("catastrofe") causi un numero elevatissimo di sinistri nel portafoglio

Per esempio:

- in un generico portafoglio, un elevato numero di sinistri può essere causato da eventi quali terremoto, uragano, ecc.
- in un'assicurazione "collettiva", molti assicurati possono essere colpiti da infortunio a causa di un evento nel posto di lavoro (incendio, esplosione, crollo, ecc.)

Catastrofe: usualmente definita in termini di un dato numero minimo di sinistri, c , entro un intervallo di durata massima assegnata, per es. 48 ore

Riferimento al portafoglio (o alla “collettiva”). In termini formali

- ▷ numero aleatorio di sinistri K
- ▷ conseguente pagamento $X^{[P]}$ (prima dell'intervento del riassicuratore)

Il riassicuratore interviene solo se $K \geq c$

Varie definizioni della Cat XL. Consideriamo le due seguenti

[1] Cat XL definita in base al *numero di sinistri*

Sia λ la franchigia in termini di numero di sinistri. La cedente conserva l'importo $X^{[ret1]}$:

$$X^{[ret1]} = \min \left\{ X^{[P]}, \frac{\lambda}{K} X^{[P]} \right\}$$

il riassicuratore interviene con l'importo

$$X^{[ced1]} = \max \left\{ 0, \frac{K - \lambda}{K} X^{[P]} \right\}$$

Esempio 1

Sia $c = 5$, $\lambda = 8$

$$K = \underbrace{1, 2, 3, 4}_{\text{non cat}}, \underbrace{5, 6, 7, 8}_{\text{non intervento del riassic.}}, \underbrace{9, 10, 11, \dots}_{\text{intervento del riassic.}}$$

Si considerino le seguenti situazioni:

- (a) $K = 10$ e $X^{[P]} = 1\,000$; allora, $X^{[\text{ret}1]} = \frac{8}{10} 1\,000 = 800$, e quindi $X^{[\text{ced}1]} = \frac{2}{10} 1\,000 = 200$
- (b) $K = 10$ e $X^{[P]} = 5\,000$; allora, $X^{[\text{ret}1]} = \frac{8}{10} 5\,000 = 4\,000$, e quindi $X^{[\text{ced}1]} = \frac{2}{10} 5\,000 = 1\,000$

Notare: se $X^{[P]}$ è grande allora $X^{[\text{ret}1]}$ è grande \Rightarrow una riassicurazione Surplus preliminare può essere appropriata

[2] Cat XL definita in termini di *pagamento totale*, cioè dell'importo $X^{[P]}$

Sia Λ la franchigia (in termini monetari). Allora:

$$X^{[\text{ret}2]} = \min\{X^{[P]}, \Lambda\}$$

$$X^{[\text{ced}2]} = \max\{X^{[P]} - \Lambda, 0\}$$

Esempio 2

Sia $c = 5$, $\Lambda = 1\,200$

$$K = \overbrace{1, 2, 3, 4}^{\text{non cat}}, \quad \underbrace{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots}$$

possibile intervento del riassic., dipendente da $X^{[P]}$

Si considerino le seguenti situazioni:

- (a) $K = 10$ e $X^{[P]} = 1\,000$; allora, $X^{[\text{ret}2]} = 1\,000$, e quindi $X^{[\text{ced}2]} = 0$
- (b) $K = 10$ e $X^{[P]} = 5\,000$; allora, $X^{[\text{ret}2]} = 1\,200$, e quindi $X^{[\text{ced}2]} = 3\,800$

Osservazione

Riferimento: portafoglio di n coperture assic. elementari (o assic. collettiva);
si assuma $x^{(j)} = x$, per $j = 1, 2, \dots, n$

Allora:

$$X^{[P]} = K x$$

$$X^{[\text{ret1}]} = \min \left\{ K x, \frac{\lambda}{K} K x \right\} = x \min\{K, \lambda\}$$

$$X^{[\text{ret2}]} = \min\{K x, \Lambda\}$$

Sia $\lambda = \frac{\Lambda}{x}$; pertanto

$$X^{[\text{ret2}]} = \min\{K x, \lambda x\} = x \min\{K, \lambda\}$$

Quindi, per ogni dato K :

$$X^{[\text{ret1}]} = X^{[\text{ret2}]} \quad (*)$$

Se vi sono varie somme assicurate $x^{(j)}$, il risultato (*) può essere ottenuto mediante riassicurazione surplus tale che

$$x = \min_j x^{(j)}$$

SCOPI DELLA RIASSICURAZIONE

1. *Riduzione della rischiosità del portafoglio*: forme riassicurative tendono a ridurre l'impatto di scarti accidentali ed eventi catastrofici (maggiore effetto pooling e migliore diversificazione dei rischi). Dal punto di vista della cedente, più riassicurazione implica:

- ▷ minore allocazione di capitale
- ▷ maggiore capacità di assumere rischi, in particolare con somme assicurate molto elevate

Osservazione

Rischi affetti da scarti sistematici riguardano il pool come aggregato, e quindi non diversificabili aumentando la dimensione del pool

⇒ potrebbero essere rifiutati dai riassicuratori, ma accettati se i riassicuratori possono trasferirli al mercato dei capitali (vedi ART)

2. *Consulenza tecnica* fornita dal riassicuratore

- ▷ per nuovi prodotti: basi statistiche, caratteristiche del mercato, ecc.
- ▷ per portafogli in-force: aggiornamento delle basi statistiche (più agevole in presenza di riassicurazione quota-share
⇒ controllo dei sinistri sull'intero volume di affari)

3. *“Finanziamento”*: ripartizione di spese di contratto e di portafoglio tra cedente e riassicuratore

NETWORK ASSICURATIVI-RIASSICURATIVI

Vedi Figura seguente

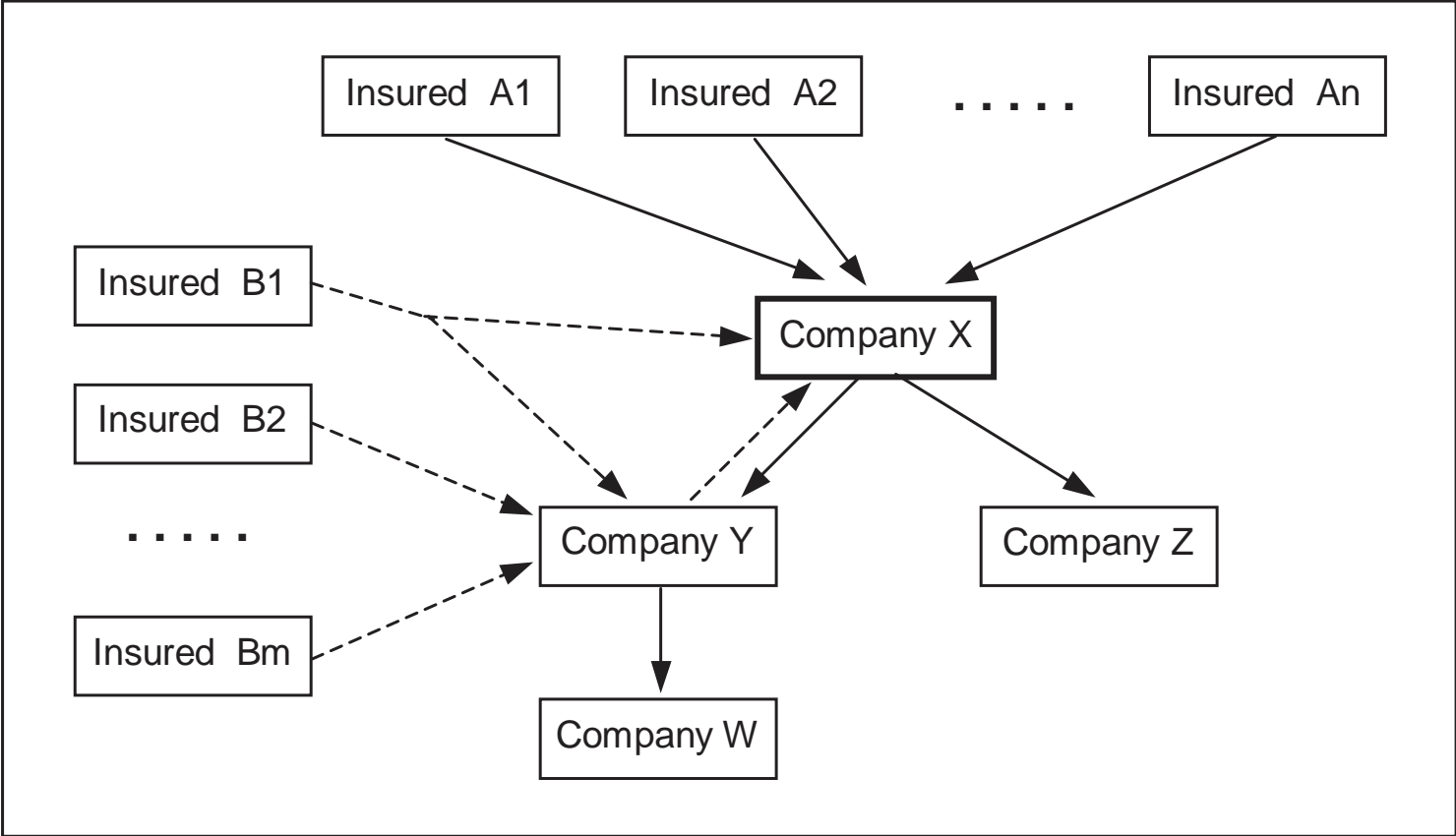
Percorsi segnati da *frecce continue*

- X accetta rischi direttamente dai clienti A_1, A_2, \dots, A_n (quindi X lavora sul mercato assicurativo): *assicurazione diretta* (o *lavoro diretto*)
- X cede rischi a Y e Z: *cessione in riassicurazione* (o *riassicurazione passiva*)
- le imprese Y e Z forniscono *riassicurazione* a X (*riassicurazione attiva*)
- Y cede a W parte dei rischi ceduti da X: *retrocessione*

Percorsi segnati da *frecce tratteggiate*

- Y accetta rischi direttamente dai clienti B_1, B_2, \dots, B_m (*assicurazione diretta*)
- Y opera sia sul mercato assicurativo che su quello riassicurativo, in quanto assume rischi ceduti da X
- relazione bilaterale tra X e Y, in quanto Y cede rischi a X
- X e Y condividono un rischio ceduto dal cliente B_1 : *coassicurazione*

Riassicurazione (cont.)



Assicurazione, coassicurazione e riassicurazione

La riassicurazione (cioè il rapporto tra assicuratore e riassicuratore) può essere stabilita su varie basi:

1. facoltativa / facoltativa (brevemente, *facoltativa*)
2. obbligatoria / obbligatoria (brevemente, *obbligatoria*)
3. facoltativa / obbligatoria (brevemente, *facob*)

1. Un assicuratore può cedere un rischio a un riassicuratore, e il riassicuratore può accettare o meno il rischio

2, 3. È richiesto un contratto di riassicurazione (*trattato*), stipulato tra cedente e riassicuratore

2. l'assicuratore è obbligato a cedere parti dei rischi nel portafoglio (come stabilito nel trattato), ed il riassicuratore è obbligato ad accettare

3. l'assicuratore può decidere di cedere parti di rischi, e in tal caso il riassicuratore è obbligato ad accettare (impiegata tipicamente per singoli rischi con esposizioni elevatissime)

TRATTATI RIASSICURATIVI. PROGRAMMI RIASSICURATIVI

Un *trattato riassicurativo* riguarda tutti gli aspetti di un rapporto di riassicurazione, in particolare:

- l'intervallo temporale in cui opera la copertura riassicurativa
- la forma riassicurativa (stop-loss, quota-share, XL, ecc.)
- le *limitazioni* della copertura riassicurativa (priorità, upper limit, franchigia, retention line, ecc.)
- basi tecniche per il calcolo del premio riassicurativo, e condizioni di pagamento del premio

Limitazioni

- ▷ *limitazioni orizzontali* si riferiscono al pagamento totale del riassicuratore nell'intervallo di copertura; ad es. upper limit nella stop-loss
- ▷ *limitazioni verticali* si riferiscono al pagamento del riassicuratore relativo a ciascun singolo rischio o sinistro; ad es. layers nella XL

Un *programma riassicurativo* (organizzato da un assicuratore cedente) combina vari trattati riassicurativi, eventualmente integrati da riassicurazione facoltativa se necessario

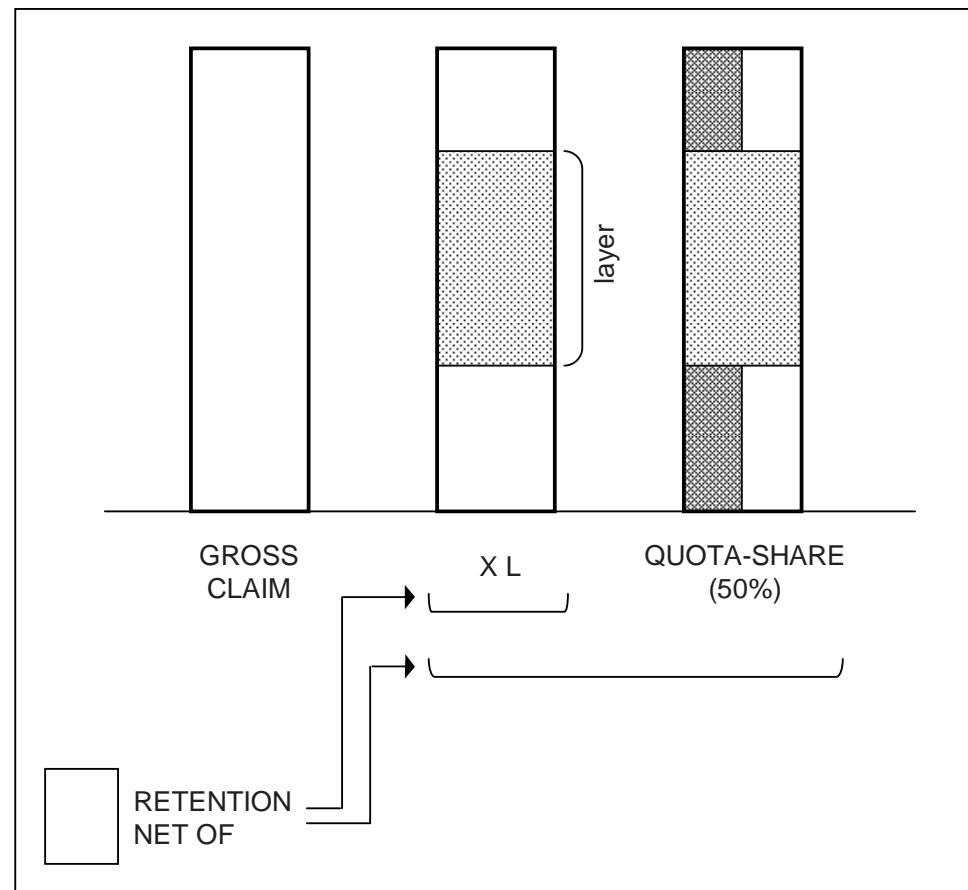
Più comuni in assicurazione non-vita, a causa dell'aleatorietà dei danni e, quindi, la maggiore rischiosità

Usualmente organizzati su base *class-by-class*, cioè programmi diversi riguardano, per es., assicurazione incendi, responsabilità civile, ecc.

Possono includere trattati riassicurativi speciali stipulati per coprire rischi che, pur appartenendo a classi diverse, sono collocati in specifiche aree geografiche, per es. con forte esposizione al rischio di uragani, o terremoti, ecc.

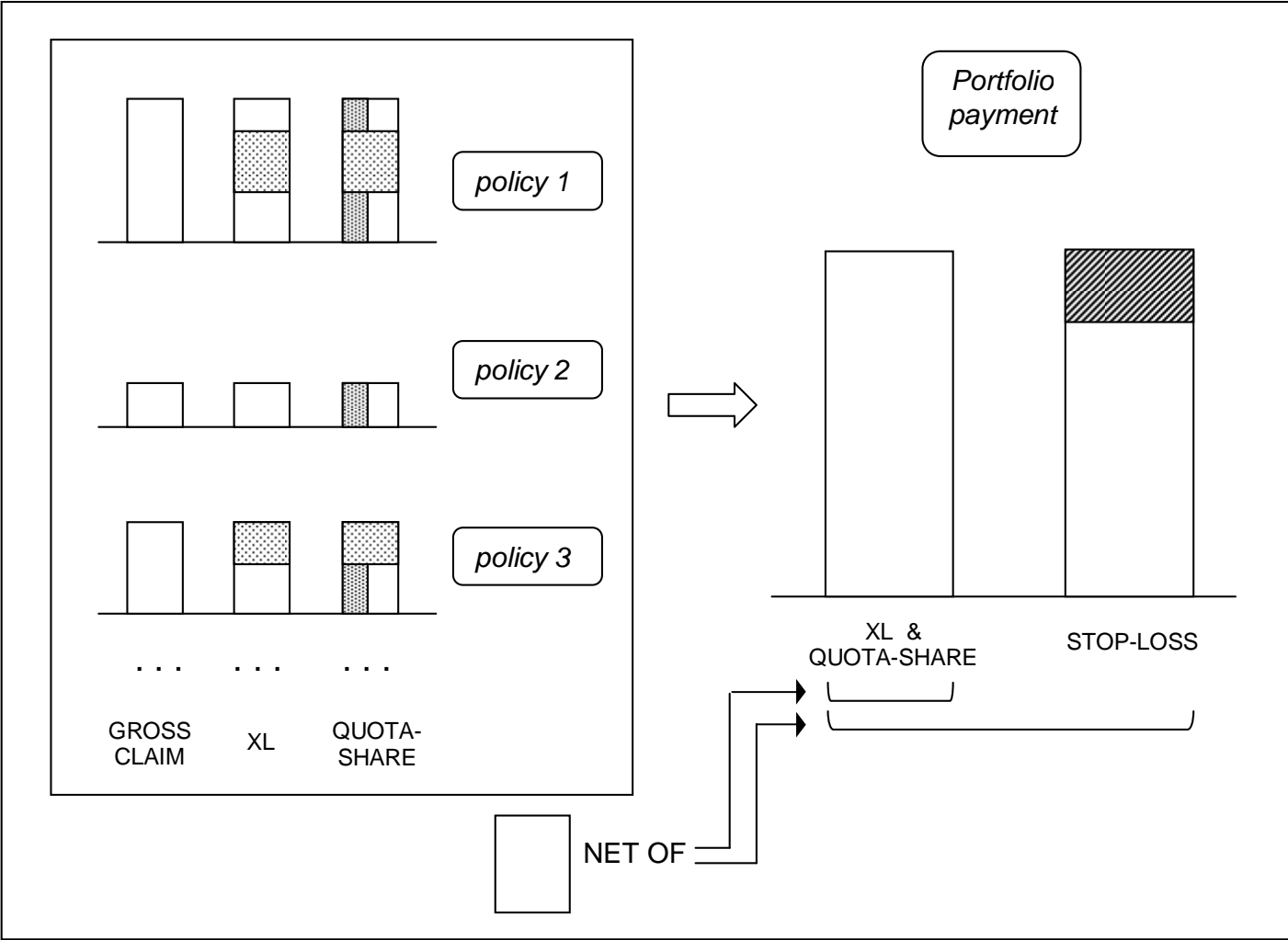
L'applicazione di un programma riassicurativo a ciascun rischio individuale in un portafoglio determina una progressiva riduzione dell'esposizione della cedente (v. Figure)

Riassicurazione (cont.)



Applicazione di un programma riassicurativo; effetti sul singolo rischio assicurato

Riassicurazione (cont.)



Applicazione di un programma riassicurativo; effetti a livello di portafoglio

Esempi elementari di programmi riassicurativi: combinazioni di quota-share e surplus

Si assuma l'aliquota di conservazione a per la quota-share, e la retention line $x^{[\text{ret}]}$ per la surplus

Risultati per il rischio j :

- ▷ quota-share “seguita” da surplus comporta la conservazione

$$x^{(j)[\text{ret}1]} = \min\{a x^{(j)}, x^{[\text{ret}]}\}$$

- ▷ surplus “seguita” da quota-share comporta la conservazione

$$x^{(j)[\text{ret}2]} = a \min\{x^{(j)}, x^{[\text{ret}]}\}$$