

# Geometria 3 – Topologia

## II appello d'esame

Anno accademico 2023-2024

13/2/2024

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.  
Tempo a disposizione: 3 ore.

1) (10 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x^2 + y^2 - 1) = 0\} \cap B^2 \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) (2 punti)  $X$  è compatto?

(b) (2 punti)  $X$  è connesso per archi?

(c) (2 punti) Quante componenti connesse per archi ha  $\mathbb{R}^2 - X$ ?

(d) (4 punti) Dimostrare che esiste un epimorfismo  $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

2) (7 punti) Supponiamo  $X$  spazio  $T_3$  e  $A \subset X$  chiuso. Dimostrare che  $A$  è intersezione di tutti gli aperti che lo contengono.

3) (7 punti) Sia  $r: X \rightarrow A$  una retrazione continua con  $X$  di Hausdorff e  $A \subset X$  non vuoto. Dimostrare che  $A$  è chiuso in  $X$ .

4) (6 punti) Calcolare  $\pi_1(\mathbb{R}P^2 - \{a\})$ , dove  $a \in \mathbb{R}P^2$  è un punto.