Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 16 gennaio 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) **(6 punti)** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \alpha x - y = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - \alpha y + z = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Si determinino i valori di α per cui il sistema lineare è compatibile e ha insieme delle soluzioni dipendente da un parametro.

È un SL in 3 incognite, quindi per Rouché - Capelli è compatibile con generica soluzione dipendente da un parametro $\iff$ $rg\, A = rg\,(A|b) = 2$ ($\#$ parametri $3 - rg A$).

Osservo, inoltre, che A è quadrata 3×3, e il suo $rg \leq 2 \iff \det A = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \alpha(2-\alpha) + 1(1+2) = -\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16, \quad {}_1\alpha_2 = \frac{-2 \mp \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{2 \mp 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Per $\alpha = 3$, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[III - 2\cdot I]{II - 3\cdot I}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg\, A = 2 = rg\,(A|b)$

$\Rightarrow$ per $\alpha = 3$ le condizioni sono soddisfatte

Per $\alpha = -1$, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III + 2\cdot I]{II + I} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III + II}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg\, A = 2 = rg\,(A|b)$

$\Rightarrow$ il SL è compatibile con generica soluz. dipendente da 1 parametro per $\alpha = 3$ e $\alpha = -1$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e si determini il suo rango.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}; \quad \xrightarrow[III+I]{II-I} \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-2\\0&3&3\end{pmatrix} \xrightarrow{III+\frac{3}{2}II} \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg\, A = 2$

(b) **(3 punti)** Si determini una base ortonormale di $\mathrm{Im} f$ rispetto al prodotto scalare standard.

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$; osservo che $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ uso Gram-Schmidt; sia $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\|v_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ pongo $u_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$; cons. $\tilde{v}_2 = \langle v_2, u_1\rangle u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) u_1$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}$

poi $v_2 - \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\-1/3\\4/3\end{pmatrix}$; infine $\|v_2 - \tilde{v}_2\| = \sqrt{25/9 + 1/9 + 16/9} = \sqrt{42/9} = \frac{\sqrt{42}}{3}$

$\Rightarrow u_2 := \frac{3}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix}5/3\\-1/3\\4/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/\sqrt{42}\\-1/\sqrt{42}\\4/\sqrt{42}\end{pmatrix} \Rightarrow$ base ortonormale $\{u_1, u_2\}$

(c) **(3 punti)** Si determinino, motivando la risposta, delle equazioni cartesiane per il sottospazio ortogonale $(\mathrm{Im} f)^{\perp}$ e una sua base ortonormale.

$\dim \mathrm{Im} f = rg\, A = 2 \Rightarrow \dim (\mathrm{Im} f)^{\perp} = 3 - 2 = 1$

un vettore $v \in (\mathrm{Im} f)^{\perp} \Leftrightarrow v$ è ortogonale a una base di $\mathrm{Im} f \Leftrightarrow \left\langle v, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0 = \left\langle v, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

(scelgo la prima base perché le componenti sono numeri più semplici)

$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

base: $\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$; $\left\|\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{14}$

base ortonormale $\begin{pmatrix}1/\sqrt{14}\\-3/\sqrt{14}\\-2/\sqrt{14}\end{pmatrix}$

(3) Si consideri la matrice

$$C_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2-b & -2+2b \\ a & 1-b & -1+2b \end{pmatrix}.$$

- **(4 punti)** Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ per cui $C_{a,b}$ è diagonalizzabile.

$$p_{C_{a,b}}(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2a & (2-b)-x & -2+2b \\ a & 1-b & (-1+2b)-x \end{pmatrix} = (1-x)\left((2-b-x)(-1+2b-x) - (1-b)(-2(1-b))\right)$$

$$= (1-x)\left(x^2 - (b+1)x + b\right)$$

$$= (1-x)(x-1)(x-b) = -(x-1)^2(x-b) \Rightarrow p_{C_{a,b}}(x) \text{ fattorizza nel prodotto di fattori lineari } \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$Sp(C_{a,b}) = \{1, b\}$

$m_g(1) = \dim Aut(1) = \dim \ker(C_{a,b} - \mathbb{I}_3) = 3 - rg(C_{a,b} - \mathbb{I}_3)$

$$C_{a,b} - \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 1-b & 2(b-1) \\ a & 1-b & 2(b-1) \end{pmatrix}$$

se $b \neq 1$ e $a \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

se $b = 1$ e $a \neq 0 \Rightarrow rg = 1$

se $b \neq 1$ e $a = 0 \Rightarrow rg = 1$

se $b = 1$ e $a = 0 \Rightarrow rg = 0$

Quindi

$$m_g(1) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \neq 1 \text{ e } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } b = 1 \text{ e } a \neq 0 \text{ opp. } b \neq 1 \text{ e } a = 0 \\ 3 & \text{se } b = 1 \text{ e } a = 0 \end{cases}$$

$$m_a(1) = \begin{cases} 2 & \text{se } b \neq 1 \\ 3 & \text{se } b = 1 \end{cases} \quad ; \quad m_a(b) = 1 = m_g(b) \text{ se } b \neq 1$$

Si ha $m_a(1) = m_g(1) \Leftrightarrow b = 1 \wedge a = 0$, opp. se $b \neq 1 \wedge a = 0 \Rightarrow C_{a,b}$ è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$

- **(4 punti)** Per tali coppie di valori di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ si determini un base di autovettori per L_C.

Se $b = 1 \wedge a = 0$: $m_g(1) = 3 = \dim Aut(1) \Rightarrow Aut(1) = \mathbb{R}^3 \rightarrow$ una base di autovettori è ad esempio la base canonica $\mathcal{E}$

Se $b \neq 1$ e $a = 0$: $Aut(1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 2(b-1) \\ 0 & 1-b & 2(b-1) \end{pmatrix}$; eq. per $Aut(1)$: $(1-b)y + 2(b-1)z = 0$, $(1-b) \neq 0$

$\Updownarrow$

$y - 2z = 0$

una base di $Aut(1)$ è, ad esempio, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$Aut(b) = \ker\begin{pmatrix} 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 2-2b & 2b-2 \\ 0 & 1-b & b-1 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} (1-b)x = 0 \\ 2(1-b)y + 2(b-1)z = 0 \end{cases}$$

$b - 1 \neq 0$: $\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$; base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) **(6 punti)** Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che esistano due vettori non nulli $v, w \in V$, $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$, tali che

$$f(v) = w, \quad f(w) = v.$$

Si dimostri che f ammette un autovettore.

Cons. $f(v+w)$; si ha $f(v+w) = f(v)+f(w) = w+v = v+w$

se $v+w \neq 0_V \Rightarrow v+w$ è autovettore relativo a $\lambda = 1$

se $v+w = 0_V \Rightarrow w = -v \Rightarrow f(v) = w = -v$

$\Rightarrow v$ è autovettore relativo a $\lambda = -1$.

(5) **(6 punti)** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Si dimostri che se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori relativi a k autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$), allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Visto a lezione.