Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 30 gennaio 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia

$$U := \{Y \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot Y = Y \cdot A\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

(a) **(2 punti)** Si dimostri che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
(b) **(2 punti)** Si determini una base $\mathcal{B}_U$ di U e la sua dimensione.
(c) **(2 punti)** Si prolunghi $\mathcal{B}_U$ a una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Siano $Y_1, Y_2 \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrari

voglio mostrare che $\alpha Y_1 + \beta Y_2 \in U$

Cons. $A \cdot (\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha A \cdot Y_1 + \beta A \cdot Y_2 =$

$= \alpha Y_1 \cdot A + \beta Y_2 \cdot A = (\alpha Y_1 + \beta Y_2) \cdot A$

$\Rightarrow \alpha Y_1 + \beta Y_2 \in U$

(b) $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \in U \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}+y_{21} & y_{12}+y_{22} \\ y_{11}+y_{21} & y_{12}+y_{22} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}+y_{12} & y_{11}+y_{12} \\ y_{21}+y_{22} & y_{21}+y_{22} \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} y_{11}+y_{21} = y_{11}+y_{12} \\ y_{12}+y_{22} = y_{11}+y_{12} \\ y_{11}+y_{21} = y_{21}+y_{22} \\ y_{12}+y_{22} = y_{21}+y_{22} \end{cases} \iff \begin{cases} y_{21} = y_{12} \\ y_{22} = y_{11} \\ y_{11} = y_{22} \\ y_{12} = y_{21} \end{cases} \iff Y = \begin{pmatrix} t & s \\ s & t \end{pmatrix}$

$= t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; sono LIN. INDIP. $\Rightarrow \dim U = 2$

(c) Un prolungamento a base è dato ad esempio da

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; infatti la matrice delle

componenti è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rg $= 4$.

(2) Usando il Teorema della dimensione e il Teorema di struttura per Applicazioni Lineari definire, se esistono, in ciascuno dei tre casi seguenti, applicazioni lineari che soddisfino le condizioni indicate, motivando esplicitamente il rispetto di tali condizioni:

(a) **(2 punti)** $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva;

(b) **(2 punti)** $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ suriettiva e tale che $\ker(g) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

(c) **(2 punti)** $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Per il Teorema di Dimensione $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$
se f iniettiva, $\dim \ker f = 0 \Rightarrow 4 = \mathrm{rg} f$; ma $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f \leq 3$ perché $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) Pongo $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Essendo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base, una tale g $\exists!$ per Teorema Struttura AL

Osservo che $\mathrm{Im} g = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{rg}\, g = 2$
$\Rightarrow \dim \ker g = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}\, g = 3 - 2 = 1$; $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \ker g$; hanno la stessa dimensione $\Rightarrow \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \ker g$.

(c) Pongo $h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
allora $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{rg}\, h = 2 \Rightarrow \dim \ker h = \dim \mathbb{R}^2 - \mathrm{rg}\, h = 0$
$\Rightarrow h$ è iniettiva

(3) **(6 punti)** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \beta x + y - z = \beta \\ 2y + z = 1 \\ x + \beta y - \beta z = 2\beta. \end{cases}$$

Si determinino i valori di β per cui il sistema lineare è compatibile.

La matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & -\beta & 2\beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & -\beta & 2\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \beta & 1 & -1 & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & -\beta & 2\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\beta^2 & -1+\beta^2 & \beta-2\beta^2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & -\beta & 2\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}(1-\beta^2) & -\frac{1}{2}(3\beta^2-2\beta+1) \end{array}\right)$$

se $\beta \neq \pm 1$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 3 \Rightarrow$ il sistema è compatibile

se $\beta = \pm 1$, $-\frac{1}{2}(3\beta^2-2\beta+1) = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 < 3 = \operatorname{rg}(A|b) \Rightarrow$ il sistema non è compatibile

(4) (a) **(4 punti)** Si dimostri che esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e tale che

$$\operatorname{Aut}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0 \right\}$$ sia l'autospazio relativo all'autovalore 2.

(b) **(4 punti)** Si dimostri (senza usare matrici associate ad f) che una tale f è diagonalizzabile.

(a) Oss. che il piano $x_2 - x_3 = 0$ è uguale a $\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e che $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

Pongo quindi: $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Per Teo. Struttura per AL, f $\exists!$; si ha $\operatorname{Aut}(2) = \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$, e

$(f - 2\,\mathrm{Id})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(f - 2\,\mathrm{Id})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(f - 2\,\mathrm{Id})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ effettivamente $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Osservo che $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ non è iniettiva, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker f = \operatorname{Aut}(0) \supseteq \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \operatorname{Sp} f \supseteq \{0, 2\}$ e

$m_g(2) + m_g(0) \geq 2 + 1 \geq 3$; ma $m_g(2) + m_g(0) \leq 3 \Rightarrow$ vale $=$ e f è diagonalizzabile

(5) Sia V uno spazio euclideo e sia $f : V \to V$ un endomorfismo ortogonale.

(a) **(2 punti)** Si dimostri che ogni autovalore λ di f soddisfa $|\lambda| = 1$.

(b) **(2 punti)** Si dimostri che ogni matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ di f in una base ortonormale $\mathcal{B}$ è una matrice ortogonale.

(c) **(2 punti)** Si dimostri che $|\det f| = 1$.

(d) **(2 punti)** Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori diversi di f sono tra loro ortogonali.