Principi di Ingegneria Elettrica
Ingegneria Industriale

– RELAZIONI COSTITUTIVE –
– TABLEAU–
– SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI –

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

a.a. 2018-19

Classificazione dei componenti

- Dipende dalle equazioni costitutive del modello del componente, da quanti terminali è dotato, se è lineare o no, dinamico (con derivata) o algebrico, con parametri costanti o variabili nel tempo
  - Due-terminali
  - Multi-terminali
    - Lineari
    - Non-lineari
  - Resistivi
  - Dinamici
    - Tempo-invarianti (T-I)
    - Tempo-varianti (T-V)
- Le scelte non sono mutuamente esclusive, ma vanno applicate una alla volta a ogni componente

Classificazione: esempi

- $v(t) = R\, i(t)$ (resistenza)→ bipolo, lineare, resistivo, T-I
- $i(t) = I_0\,(e^{\,v(t)/v_T} - 1)$ (diodo)→ bipolo, nonlineare, resistivo, T-I
- $v(t) = R(t)\, i(t)$ (p.e. interruttore) → bipolo, lineare, resistivo, T-V
- $i(t) = C\, dv(t)/dt$ (condensatore)→ bipolo lineare ($Q = C\,V$), dinamico, T-I
- $$\begin{cases} v_1(t) = 10\,i_1(t) + 5\,i_2(t) \\ v_2(t) = 5\,i_1(t) + 7\,i_2(t) \end{cases}$$

→ doppio-bipolo, resistivo, lineare, T-I

- I circuiti si classificano in base ai componenti

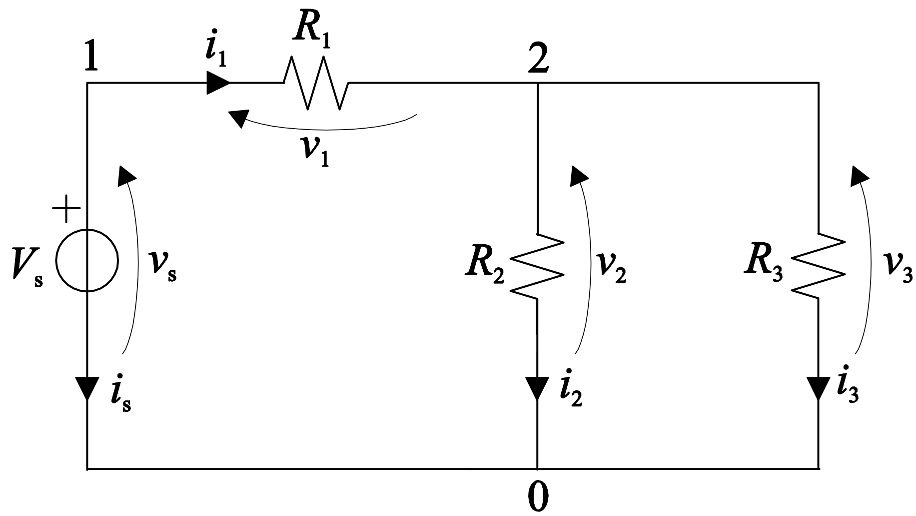
Metodo del Tableau

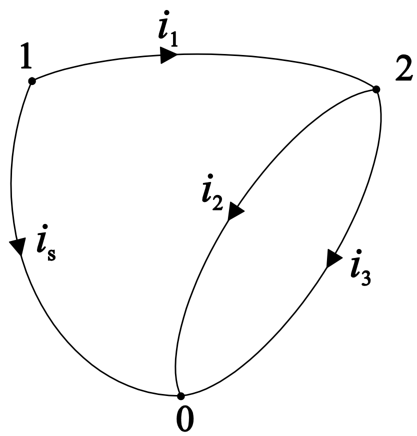
- Abbiamo scritto le equazioni topologiche (IK e IIK) di un circuito:
  - $2\,b + n - 1$ incognite
  - $b + n - 1$ equazioni

- Mancano ancora b equazioni per completare il sistema, ovvero le equazioni costitutive dei componenti

$$\begin{cases} \mathbf{A}\,\mathbf{i} = 0 \\ \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e} \\ \text{equazioni costitutive} \end{cases}$$

Tableau: esempio





$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Circuito lineare resistivo tempo-invariante (LRI)
- Ci sono 4 correnti, 4 tensioni e 2 variabili di nodo, in tutto 10 variabili
- Si possono scrivere 6 equazioni di Kirchhoff e 4 equazioni costitutive dei componenti.

Tableau: esempio (2)

- Equazioni di IK:

Ai = **0**:

$$\begin{cases} i_s + i_1 = 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

- Equazioni di IIK:

v = **A**$^{\mathrm{T}}$**e**:

$$\begin{cases} v_s = e_1 \\ v_1 = e_1 - e_2 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = e_2 \end{cases}$$

Tableau: esempio (3)

- Equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_s = V_s \\ v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \end{cases}$$

- In forma matriciale: $\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{N}\mathbf{i} = \mathbf{h}_s(t)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} v_s \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} i_s \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_s}$$

Tableau: esempio (4)

- Quindi la matrice tableau **T** è:

$$
\begin{cases}
\mathbf{A}\,\mathbf{i} = 0 \\
-\mathbf{A}^T\mathbf{e} + \mathbf{v} = 0 \\
\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{N}\mathbf{i} = \mathbf{h}_s(t)
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{array}{c} n-1 \\ b \\ b \end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \mathbf{A} \\
-\mathbf{A}^T & \mathbf{I}_b & 0 \\
0 & \mathbf{M} & \mathbf{N}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{e} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \mathbf{h}_s(t)
\end{bmatrix}
$$

$$
n-1 \quad b \quad b
$$

- In forma esplicita è ($n-1=2$, $b=4$):

$$
\left[\begin{array}{cc|cccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_3
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
e_1 \\ e_2 \\ \hline v_s \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \hline i_s \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline V_s \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{array}\right]
$$

Sistemi Tableau

- Se aggiungo un componente nonlineare come il diodo, il sistema tableau diventa *nonlineare*, non più esprimibile quindi con una matrice
- Se aggiungo un condensatore o un induttore, devo aggiungere alle variabili le derivate delle tensioni o delle correnti, o entrambe, e le relative condizioni iniziali. Il sistema sarà *dinamico*
- Se aggiungo un interruttore ottengo un sistema T-V

- Ci occuperemo di sistemi lineari, resistivi o dinamici, T-I (LRI, LDI)

Proprietà della matrice tableau

- Per circuiti LRI

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{h_s(t)}\end{bmatrix}$$

- T: $[(2b+n-1)\times(2b+n-1)]$

- Consideriamo det(**T**) per determinare il numero di soluzioni

- det(**T**) $\neq$ 0: circuito ben posto, una soluzione

- det(**T**) = 0:
  - Infinite soluzioni
  - Nessuna soluzione

Principio di sovrapposizione degli effetti (PSE)

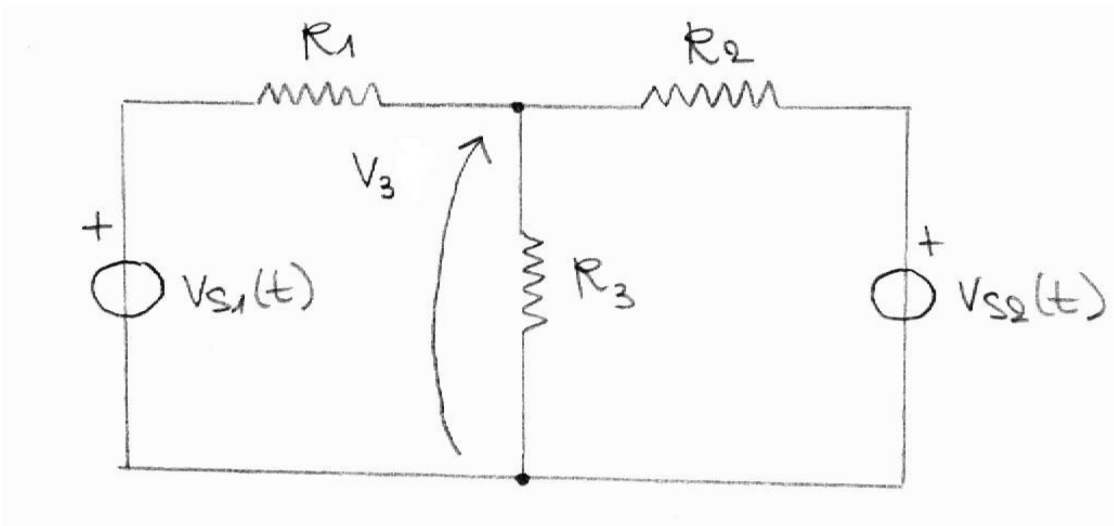
- E' il principio fondamentale dei circuiti lineari

Sia $\mathcal{N}$ un circuito LRI con un'unica soluzione, alimentato da N sorgenti indipendenti di tensione e M sorgenti indipendenti di corrente.

Allora ogni potenziale di nodo, tensione o corrente di ramo può essere espressa come combinazione lineare delle sorgenti indipendenti, con coefficienti costanti che dipendono dai parametri omogenei del circuito, ma non dipendono dai valori delle sorgenti stesse.

PSE: esempio 1

- Circuito LRI con 2 sorgenti di tensione indipendenti



- Applicando PSE alla tensione $v_3(t)$ si ottiene

$$v_3(t) = \alpha_1\ v_{s1}(t) + \alpha_2\ v_{s2}(t) =$$
$$= \ v_3'(t) \ + \ v_3''(t)$$

PSE: esempio 1 (2)

- Dove

$$v_3(t) = v_3'(t) = \alpha_1\, v_{s1}(t) \;\text{ se } v_{s2}(t) = 0\text{ V}$$
$$v_3(t) = v_3''(t) = \alpha_2\, v_{s2}(t) \;\text{ se } v_{s1}(t) = 0\text{ V}$$

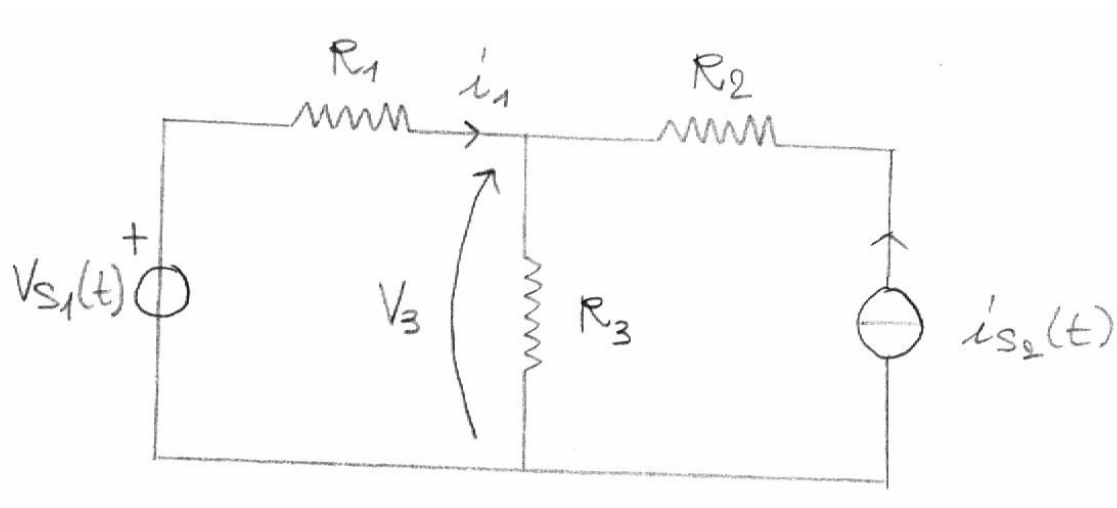
- Sorgente di tensione nulla → corto circuito
- Sorgente di corrente nulla → circuito aperto

- Quindi (coefficienti α_k sono numeri puri)

$$\begin{cases} \alpha_1 = \left.\dfrac{v_3(t)}{v_{s1}(t)}\right|_{v_{s2}(t)=0} = \dfrac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} \\ \alpha_2 = \left.\dfrac{v_3(t)}{v_{s2}(t)}\right|_{v_{s1}(t)=0} = \dfrac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3} \end{cases}$$

PSE: esempio 2

- Circuito LRI con 1 sorgente di tensione e 1 di corrente indipendenti



- Applicando PSE alla tensione $v_3(t)$ si ottiene

  $v_3(t) = \alpha_1\ v_{s1}(t) + r_2\ i_{s2}(t) =$

  $\qquad = \ v_3'(t) \ + \ v_3''(t)$

- Il coefficiente r_2 ha le dimensioni di una resistenza

Dimostrazione del PSE

- Consideriamo un circuito LRI con 2 sorgenti indipendenti, per semplicità. Applichiamo il metodo tableau scrivendo la matrice **T** che ha dimensioni [$M \times M$], dove $M = 2b+n-1$.
- Supponendo che det(**T**) ≠ 0, mettiamo le equazioni costitutive (tensioni e correnti) delle sorgenti indipendenti in fondo alla matrice. Si ottiene:

$$
\mathbf{T}\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{i}\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h_{s1}(t) \\ h_{s2}(t) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ M-1 \\ M \end{array}
$$

Dimostrazione del PSE (2)

- Risolviamo il sistema lineare e scomponiamo il vettore dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h_{s1}(t) \\ h_{s2}(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h_{s1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_{s2}(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t'_{1,M-1} \\ t'_{2,M-1} \\ \vdots \\ t'_{M-1,M-1} \\ t'_{M,M-1} \end{bmatrix} h_{s1}(t) + \begin{bmatrix} t'_{1,M} \\ t'_{2,M} \\ \vdots \\ t'_{M,M} \\ t'_{M,M} \end{bmatrix} h_{s2}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}'' \\ \mathbf{v}'' \\ \mathbf{i}'' \end{bmatrix}$$

Dimostrazione del PSE (3)

- La (M–1)-esima colonna di $\mathbf{T}^{-1}$ rappresenta i coefficienti della combinazione lineare relativi alla sorgente *s1*,

$$\begin{bmatrix} t'_{1,M-1} \\ t'_{2,M-1} \\ \vdots \\ t'_{M-1,M-1} \\ t'_{M,M-1} \end{bmatrix} h_{s1}(t)$$

- Mentre la *M*-esima colonna di $\mathbf{T}^{-1}$ rappresenta i coefficienti della combinazione lineare relativi alla sorgente *s2*.

$$\begin{bmatrix} t'_{1,M} \\ t'_{2,M} \\ \vdots \\ t'_{M,M} \\ t'_{M,M} \end{bmatrix} h_{s2}(t)$$