

Principi di Ingegneria Elettrica
Ingegneria Industriale

– FUNZIONI DI RETE –

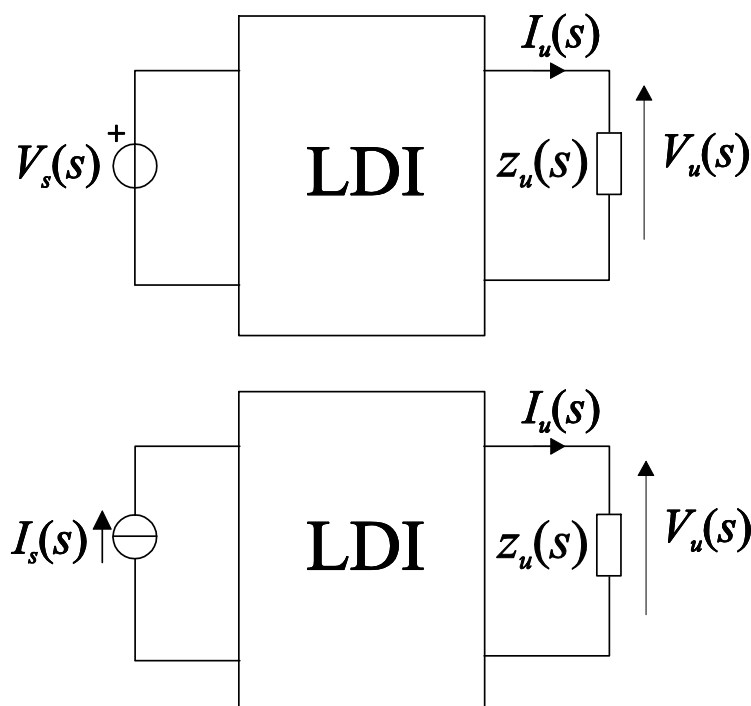
Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Corso di Teoria dei Circuiti (105IN)

a.a. 2021-22

Circuiti con un ingresso e una uscita

- Rappresentiamo un circuito LDI stabile e non-degenere di ordine n con gli schemi di figura



- Le funzioni di rete (in Laplace) esprimono la relazione esistente tra la (unica) sorgente indipendente (l'ingresso) e la tensione o corrente su una impedenza (l'uscita)

Dallo stato alle funzioni di rete

- Indicata genericamente con $u(t)$ la variabile in ingresso e con $y(t)$ la variabile di uscita, le equazioni di stato e di uscita in t sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases}$$

- Dove $\mathbf{x}(t)$ è un vettore $[n \times 1]$, $y(t)$ e $u(t)$ sono scalari
- Le condizioni iniziali sono poste a zero per il fatto che ci interessa solamente il rapporto tra l'ingresso e l'uscita; $y(t)$ rappresenta solamente la soluzione forzata (e non quella libera)
- Le funzioni di rete possono essere un rapporto di tensioni o di correnti, quindi numeri puri, o avere le dimensioni di una trans-impedenza o trans-ammettenza

Dallo stato alle funzioni di rete (2)

- Trasformando con Laplace si ottiene la funzione di rete $H(s)$

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = (\mathbf{C}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D)U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n'}s^{n'}}$$

- $H(s)$ è una funzione razionale fratta a coefficienti reali in s , dove $\text{grad}(D(s)) = n' \leq n$
- $N(s)$ e $D(s)$ non contengono fattori comuni che devono essere cancellati nel calcolo

Funzioni di rete

- Le radici di $D(s)$ sono chiamate “poli”, quelle di $N(s)$ “zeri”. Sono reali o complesse coniugate
- I poli derivano da: $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$, espressione che ci dà gli autovalori di \mathbf{A} (coincidenti con le radici della equazione caratteristica)
- I poli in genere coincidono con gli autovalori di \mathbf{A} ($n = n'$), a meno che qualche radice al denominatore non si elida con una corrispondente al numeratore, ovvero se qualche polo e zero coincidono. Questi corrispondono ai modi non-controllabili e non-osservabili. In questo caso $n' < n$
- Gli zeri di $N(s)$ possono essere positivi o a parte reale positiva, non influenzando sulla stabilità

Funzioni di rete (3)

- $H(s)$ può essere sviluppata in somma di frazioni parziali, da cui si può ottenere la $h(t)$

$$H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{n'}}{s - p_{n'}}$$

$$\Rightarrow h(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_{n'} e^{p_{n'} t}$$

per $t \geq 0$

- $h(t)$ (risposta alla $\delta(t)$) consiste in una somma di esponenziali reali e complesse; se tutte le radici, ovvero i poli, sono a parte reale negativa, $h(t)$ va a zero per $t \rightarrow \infty$, ovvero il circuito è stabile
- Se $U(s) = 1$ [$u(t) = \delta(t)$], allora: $H(s) = Y(s)$
La funzione di rete coincide con l'uscita del circuito alimentato da una sorgente impulsiva unitaria
- La stabilità del circuito si vede anche dall'analisi delle funzioni di rete

Funzioni di rete sull'asse $j\omega$

- Esaminiamo $H(s)$ per un circuito stabile sull'asse immaginario, cioè poniamo $s = j\omega$
- $H(j\omega)$ rappresenta il rapporto tra l'uscita e l'ingresso quando la sorgente è una sinusoidale a frequenza ω .

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

- Il modulo esprime il rapporto tra i moduli delle sinusoidi in uscita e in ingresso, la fase la differenza delle fasi, ovvero il ritardo tra le due sinusoidi

Laplace e fasori

- Se avessimo calcolato la funzione di rete come rapporto tra i fasori della $y(t)$ e della $u(t)$, cosa avremmo ottenuto? Facciamo un confronto tra i due metodi
- La trasformata di Laplace di un ingresso $u(t)$ sinusoidale è

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t)] &= [U \cos(\omega t + \varphi_u)] = \\ &= \frac{U \cos \varphi_u s - U \sin \varphi_u \omega}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{0.5Ue^{j\varphi_u}}{s - j\omega} + \frac{0.5Ue^{-j\varphi_u}}{s + j\omega}\end{aligned}$$

- Il fasore massimo è: $\bar{U} = Ue^{j\varphi_u}$

Laplace e fasori (2)

- Essendo un circuito LDI con una sola sorgente sinusoidale, la soluzione particolare o a regime $y^p(t)$ è anch'essa una sinusoidale la cui trasformata di Laplace è

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y^p(t)] &= [Y \cos(\omega t + \varphi_y)] = \\ &= \frac{Y \cos \varphi_y s - Y \sin \varphi_y \omega}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{0.5Y e^{j\varphi_y}}{s - j\omega} + \frac{0.5Y e^{-j\varphi_y}}{s + j\omega}\end{aligned}$$

- Il fasore massimo è: $\bar{Y} = Y e^{i\varphi_y}$

Laplace e fasori (3)

- Ricordando che $H(s)$ è un rapporto di polinomi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \left[\frac{0.5Ue^{j\varphi_u}}{s - j\omega} + \frac{0.5Ue^{-j\varphi_u}}{s + j\omega} \right] = \\ &= \frac{N_1(s)}{D(s)} + \underbrace{\frac{0.5Ye^{j\varphi_y}}{s - j\omega} + \frac{0.5Ye^{-j\varphi_y}}{s + j\omega}}_{\text{soluzione particolare}} \end{aligned}$$

- Il primo fattore rappresenta la soluzione transitoria stabile, il secondo e il terzo (sono complessi coniugati) la soluzione particolare o a regime
- Calcoliamo $N_1(s)$, Y e φ_y riducendo il tutto a un unico denominatore e uguagliando i numeratori

Laplace e fasori (4)

- Si ottiene

$$\begin{aligned} & N(s)0.5Ue^{j\varphi_u}(s + j\omega) + \\ & + N(s)0.5Ue^{-j\varphi_u}(s - j\omega) = \\ & = N_1(s)(s + j\omega)(s - j\omega) + \\ & + D(s)0.5Ye^{j\varphi_y}(s + j\omega) + \\ & + D(s)0.5Ye^{-j\varphi_y}(s - j\omega) \end{aligned}$$

- Ponendo $s = j\omega$, ovvero vincolando s sul suo asse immaginario, l'espressione si riduce a

$$\begin{aligned} N(j\omega)Ue^{j\varphi_u} &= D(j\omega)Ye^{j\varphi_y} \\ \rightarrow H(j\omega) &= \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{Ye^{j\varphi_y}}{Ue^{j\varphi_u}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} \end{aligned}$$

Laplace e fasori (5)

- Abbiamo ottenuto il seguente risultato, che $H(j\omega)$ è data dal rapporto tra i fasori \mathbf{Y} e \mathbf{U} alla corrispondente frequenza angolare ω
- $H(j\omega)$ rappresenta soltanto la soluzione particolare o a regime con sorgente sinusoidale, non il transitorio
- Ipotesi fondamentale è che il circuito sia stabile, ovvero che i poli abbiano parte reale negativa. Non ci devono essere poli neanche sull'asse immaginario

Proprietà della $H(j\omega)$

- $H(j\omega)$ è una funzione complessa di variabile complessa. Il modulo è una funzione pari di ω , la fase una funzione dispari

$$H(-j\omega) = H((j\omega)^*) = H^*(j\omega)$$

$$\Rightarrow |H(-j\omega)| = |H^*(j\omega)| = |H(j\omega)|$$

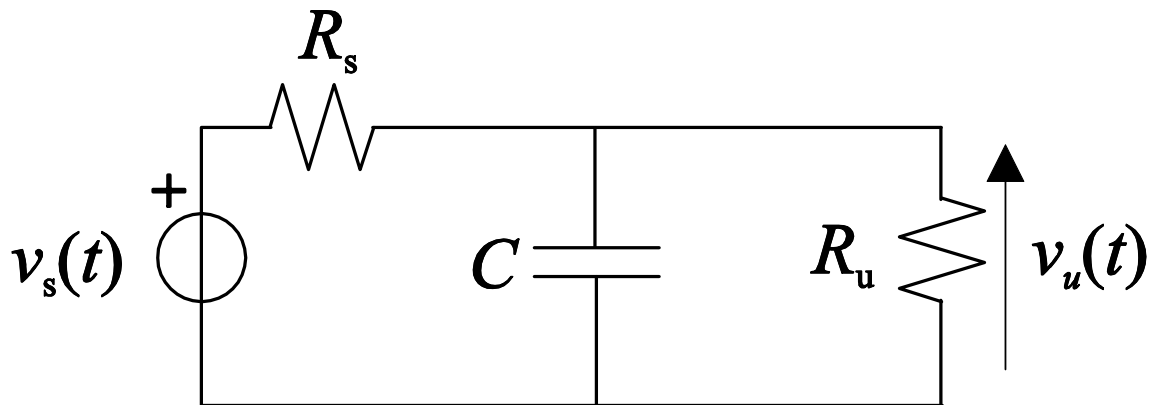
$$\Rightarrow \angle H(-j\omega) = \angle H^*(j\omega) = -\angle H(j\omega)$$

$$|H(j\omega)|^2 = M^H(\omega^2)$$

- Il modulo è continuo per le funzioni stabili. Il modulo al quadrato dipende da ω^2
- La fase è continua tranne quando ci sono delle coppie di zeri immaginari puri ($\pm \pi$)
- $H(j\omega)$ si può rappresentare o mediante la parte reale e quella immaginaria, oppure mediante modulo e fase

Esempi di funzioni di rete

- Circuito RC del I ordine lineare



$$\frac{V_u(s)}{V_s(s)} = H(s) = \frac{R_u}{R_u + R_s} \frac{1}{1 + sC \frac{R_u R_s}{R_u + R_s}}$$

$$C = 1\mu\text{F}, R_u = R_s = 1000\ \Omega \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + s 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$h(t) = \left[1000 e^{-2000t} \right] u(t)$$

- Il polo è: $p_1 = -2000$

Esempi di funzioni di rete (2)

- Ingresso a gradino unitario

$$v_s(t) = 10u(t); V_s(s) = \frac{10}{s}$$

$$V_u(s) = \frac{5}{s} \frac{1}{1 + s \cdot 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$v_u(t) = \left[-5e^{-2000t} + 5 \right] u(t)$$

- Ingresso esponenziale

$$v_s(t) = 10e^{-100t}u(t); V_s(s) = \frac{10}{s + 100}$$

$$V_u(s) = \frac{5}{(s + 100)(1 + s \cdot 5 \cdot 10^{-4})}$$

$$v_u(t) = \left[-5.26e^{-2000t} + 5.26e^{-100t} \right] u(t)$$

Esempi di funzioni di rete (3)

- Ingresso sinusoidale

$$v_s(t) = 10 \cos(1000 t) u(t); V_s(s) = \frac{10s}{s^2 + 10^6}$$

$$V_u(s) = \frac{5s}{(s^2 + 10^6)(1 + s 5 \cdot 10^{-4})}$$

$$v_u(t) = \left[-46e^{-2000t} + 4.47 \cos(1000 t - 0.46) \right] u(t)$$

- Nel dominio dei fasori

$$v_s(t) = 10 \cos(1000 t); \bar{V}_s = 10$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\omega 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$\bar{V}_u = \frac{5}{1 + j\omega 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{5}{1 + j0.5}$$

$$v_u(t) = 4.47 \cos(1000t - 0.46)$$

Diagrammi polari o di Nyquist

- La funzione complessa $H(j\omega)$ può essere rappresentata graficamente con parametro ω nel piano

$$\Re\{H(j\omega)\}, \Im\{H(j\omega)\}$$

- Esempi:

1) $H(j\omega) = a + j b\omega \rightarrow$ semiretta verticale

2) $H(j\omega) = 1/(a + j b\omega) \rightarrow$ semicerchio con
centro in $(1/2a, 0)$

Ritardo di gruppo

- Il ritardo di gruppo è definito come

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi^H(\omega)}{d\omega}$$

- Esprime il ritardo in secondi dei “gruppi” di frequenze componenti il segnale
- Una fase lineare comporta un ritardo di gruppo costante. È particolarmente importante, per esempio, nella elaborazione delle immagini, perché i contorni non vengono deformati

Grandezze logaritmiche

- Per varie ragioni, la scala logaritmica è da preferirsi alla scala lineare nelle rappresentazioni delle funzioni di rete in modulo e fase, sia per la frequenza angolare in ascissa che per il modulo in ordinata

$$\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow 10\omega & \text{decade} \\ \omega \rightarrow 2\omega & \text{ottava} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10}(|H(j\omega)|) = \\ &= 10 \log_{10}(|H(j\omega)|^2) = 10 \log_{10}(M^H(\omega^2)) \\ |H(j\omega)|_{\text{Np}} &= \ln(|H(j\omega)|) \end{aligned}$$

- Le unità introdotte sono il decibel (dB) e il neper (Np)

$$1 \text{ Np} = 20 \log_{10}(e) = 8.686 \text{ dB}$$

Attenuazione

- A volte si utilizza l'attenuazione $\alpha(\omega)$ al posto del modulo, specialmente nel progetto dei filtri elettrici

$$\begin{aligned}\alpha_{dB}(\omega) &= 20 \log_{10} \left(\frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = \\ &= -20 \log_{10} (|H(j\omega)|) = \\ &= -10 \log_{10} (|H(j\omega)|^2) = \\ &= -10 \log_{10} (M^H(\omega^2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{Np}(\omega) &= \ln \left(\frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = -\ln(|H(j\omega)|) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(|H(j\omega)|^2)\end{aligned}$$

Zeri e poli

- Per il teorema fondamentale dell'algebra, possiamo scomporre $H(s)$ in un prodotto di fattori con coefficienti reali di primo e di secondo grado. Supponendo che $\text{grad}(D(s)) = n$, $\text{grad}(N(s)) = m$

$$H(s) = Ks^u \frac{\prod_{\nu=1}^{K_{zr}} \left(1 + \frac{s}{\sigma_{z\nu}}\right) \prod_{\nu=1}^{K_{zc}} \left(1 + \frac{s}{q_{z\nu}\omega_{z\nu}} + \frac{s^2}{\omega_{z\nu}^2}\right)}{\prod_{\nu=1}^{K_{pr}} \left(1 + \frac{s}{\sigma_{p\nu}}\right) \prod_{\nu=1}^{K_{pc}} \left(1 + \frac{s}{q_{p\nu}\omega_{p\nu}} + \frac{s^2}{\omega_{p\nu}^2}\right)}$$

- Dove
- $u \geq 0$: $n = K_{pr} + 2K_{pc}$, $m = u + K_{zr} + 2K_{zc}$
- $u < 0$: $n = |u| + K_{pr} + 2K_{pc}$, $m = K_{zr} + 2K_{zc}$
- Se $n > m$, ci sono $n - m$ zeri a ∞
- Se $m = n$, non ci sono né zeri né poli a ∞
- $m > n$: non possibile per circuiti non-degeneri

Fattori di secondo grado

- I fattori di secondo grado tengono conto degli zeri e dei poli complessi coniugati. Hanno modulo ω_0 (> 0) e angolo con l'asse reale φ
- Le radici (poli o zeri) sono

$${}_1s_2 = -\frac{\omega_0}{2q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4q^2} - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0}{2q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4q^2} - 1}$$

$$\frac{1}{4q^2} - 1 < 0 \Rightarrow |q| > 0.5$$

$${}_1s_2 = -\frac{\omega_0}{2q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4q^2}}$$

- $|s| = \omega_0$
- $\cos \varphi = -\frac{1}{2q}$
- Per i poli, deve valere per la stabilità: $q > 0$

Fattori di secondo grado (2)

- Vediamo una tabella riassuntiva che associa i valori di q alla tipologia di poli o zeri

$0 < q < 0.5$	radici reali neg. distinte
$q = 0.5$	radici reali neg. coinc.
$0.5 < q < \infty$	radici complesse p.r. neg.
$q = \pm\infty$	radici immaginarie pure
$-\infty < q < -0.5$	radici complesse p.r. pos.
$q = -0.5$	radici reali pos. coinc.
$-0.5 < q < 0$	radici reali pos. distinte

- N.B. se un fattore contiene due radici reali, viene scomposto in due fattori di primo grado

Diagrammi di Bode

- Sono i diagrammi del modulo (in dB) e della fase della $H(j\omega)$ rispetto al logaritmo in ω
- Si ottengono sovrapponendo i diagrammi dei singoli fattori, grazie alla proprietà additiva del logaritmo e della fase
- Il procedimento risulta piuttosto semplice, intuitivo e veloce. Quando si utilizzano i diagrammi asintotici, ovvero quelli approssimati, si ottiene il diagramma asintotico di Bode

Scomposizione della $H(j\omega)$

- Il modulo di un prodotto (rapporto) è uguale al prodotto (rapporto) dei moduli. Il logaritmo di un prodotto (rapporto) di moduli è uguale alla somma (differenza) dei logaritmi dei singoli fattori
- La fase di un prodotto (rapporto) è uguale alla somma (differenza) delle fasi
- Queste proprietà si possono applicare alla $H(j\omega)$ se si considerano il modulo in dB e la fase in funzione di ω ($\log \omega$)
- In tal caso il modulo in dB e la fase vengono scomposti nella somma (differenza) di fattori di primo e di secondo grado

Scomposizione della $H(j\omega)$ (2)

- Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
 |H(j\omega)|_{dB} &= 10 \log(M^H(\omega^2)) = \\
 &= 10 \log(K^2) + 10u \log(\omega^2) + \\
 &+ 10 \sum_{v=1}^{K_{zr}} \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{zv}^2}\right) - 10 \sum_{v=1}^{K_{pr}} \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{pv}^2}\right) + \\
 &+ 10 \sum_{v=1}^{K_{zc}} \log(\dots) - 10 \sum_{v=1}^{K_{pc}} \log(\dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \angle H(j\omega) &= \angle K + u \frac{\pi}{2} + \\
 &+ \sum_{v=1}^{K_{zr}} \angle\left(1 + \frac{j\omega}{\sigma_{zv}}\right) - \sum_{v=1}^{K_{pr}} \angle\left(1 + \frac{j\omega}{\sigma_{pv}}\right) + \\
 &+ \dots + 2k\pi
 \end{aligned}$$

Considerazioni sulla $H(j\omega)$

- Le coppie di zeri immaginari puri sono chiamati zeri di trasmissione del doppio-bipolo

$$s^2 + \omega_z^2 = 0 \rightarrow s = \pm j\omega_z$$

- Il comportamento in continua si determina con

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega)$$

- Il comportamento nelle alte frequenze si determina con

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega)$$

Fattori della $H(j\omega)$

- Fattore costante

$$H(j\omega) = K$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log K^2 = 20 \log |K|$$

$$\angle H(j\omega) = \angle K + 2k\pi$$

- Fattore nell'origine

$$H(j\omega) = (j\omega)^u$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log(\omega^2)^u = 20u \log \omega$$

$$\angle H(j\omega) = u \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Fattori della $H(j\omega)$ (2)

- Fattori di primo grado al numeratore

$$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\sigma_z}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_z^2} \right)$$

$$\text{se : } \omega \ll |\sigma_z| \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg |\sigma_z| \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log \left(\frac{\omega^2}{\sigma_z^2} \right) = \\ &= 20 \log \omega - 20 \log |\sigma_z| \end{aligned}$$

$$\text{se : } \omega = |\sigma_z| \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log 2 = 3$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan \left(\frac{\omega}{\sigma_z} \right) \rightarrow \angle H(j0) = 0$$

$$\sigma_z > 0 : \angle H(j\sigma_z) = \frac{\pi}{4}, \angle H(j\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma_z < 0 : \angle H(j|\sigma_z|) = -\frac{\pi}{4}, \angle H(j\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Fattori della $H(j\omega)$ (3)

- Fattori di primo grado al denominatore

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\sigma_p}} \quad (\sigma_p > 0)$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_p^2} \right)$$

$$\text{se : } \omega \ll \sigma_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg \sigma_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx -10 \log \left(\frac{\omega^2}{\sigma_p^2} \right) = \\ &= -20 \log \omega + 20 \log \sigma_p \end{aligned}$$

$$\text{se : } \omega = \sigma_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log 2 = -3$$

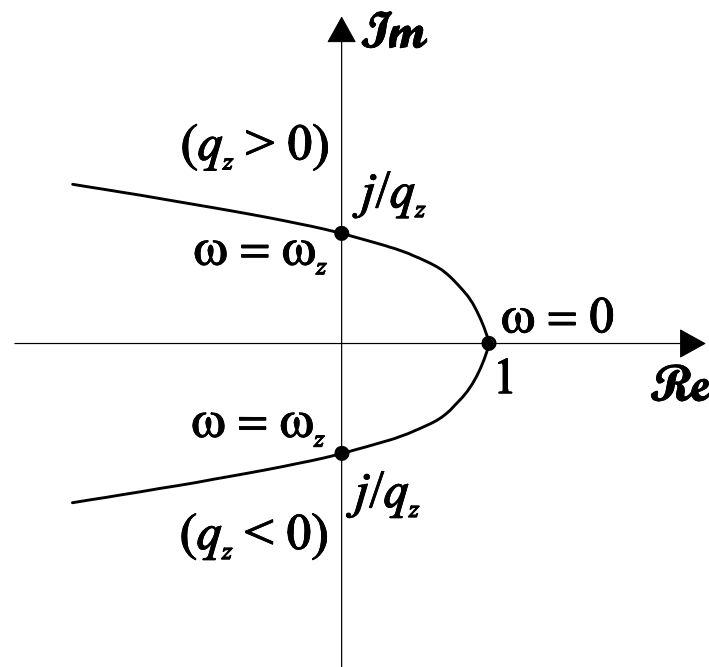
$$\angle H(j\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\sigma_p} \right) \rightarrow$$

$$\angle H(j0) = 0, \quad \angle H(j\sigma_p) = -\frac{\pi}{4}, \quad \angle H(j\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Fattori della $H(j\omega)$ (4)

- Fattori di secondo grado al numeratore ($\omega_z > 0$)

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 1 + \frac{j\omega}{q_z \omega_z} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_z^2} = \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \right) + \frac{j\omega}{q_z \omega_z} \end{aligned}$$



Fattori della $H(j\omega)$ (5)

- Modulo (continuo)

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{q_z \omega_z} \right)^2 \right]$$

$$\text{se : } \omega \ll \omega_z \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg \omega_z \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log \left(\frac{\omega^4}{\omega_z^4} \right) = \\ &= 40 \log \omega - 40 \log \omega_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega = \omega_z \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log \left(\frac{1}{q_z^2} \right) = \\ &= -20 \log |q_z| \end{aligned}$$

Fattori della $H(j\omega)$ (6)

- Fase (continua)

se : $\omega < \omega_z$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_z \omega}{q_z (\omega_z^2 - \omega^2)}\right) + 2k\pi$$

se : $\omega > \omega_z$

$$\angle H(j\omega) = \pi + \arctan(\dots) + 2k\pi$$

$$\angle H(j0) = 0$$

se : $q_z > 0$

$$\omega \rightarrow \omega_z^- \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow \pi$$

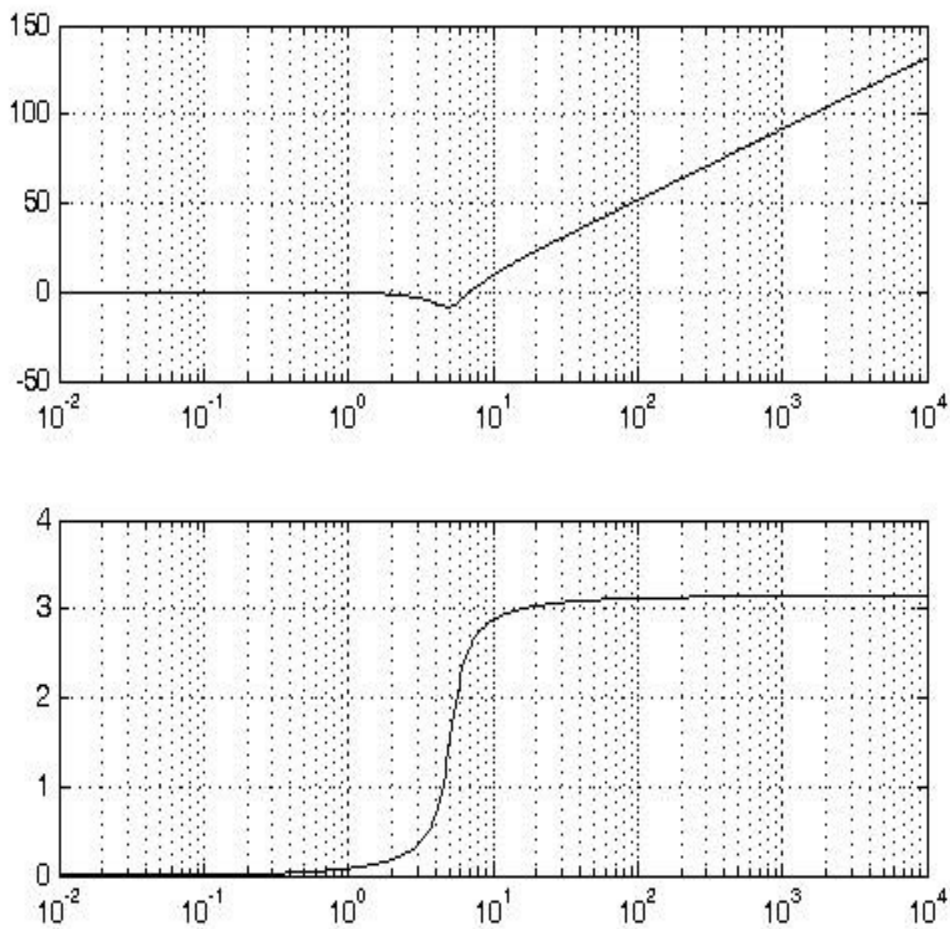
se : $q_z < 0$

$$\omega \rightarrow \omega_z^- \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\pi$$

Fattori della $H(j\omega)$ (7)

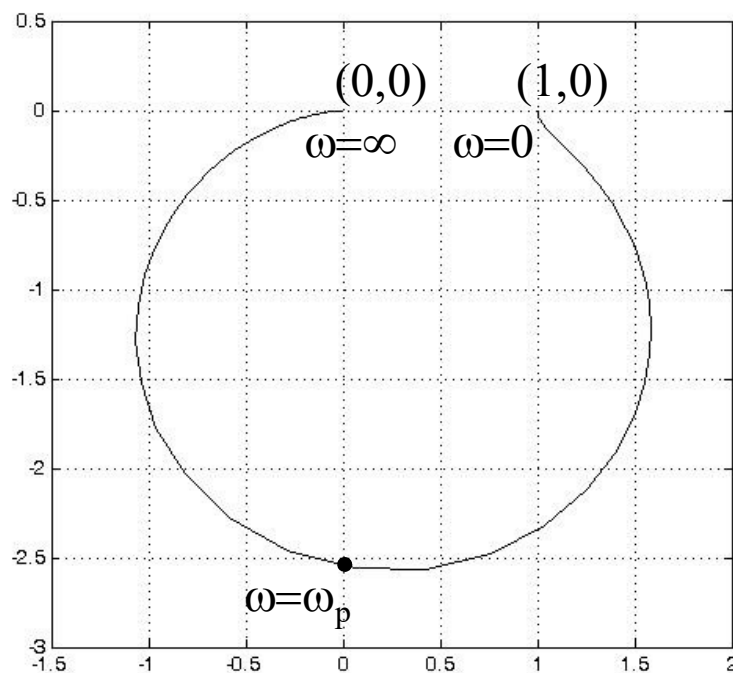
- I diagrammi di Bode del modulo e della fase di una coppia di zeri complessi coniugati ($q_z > 0$)



Fattori della $H(j\omega)$ (8)

- Fattori di secondo grado al denominatore ($\omega_p > 0$, $q_p > 0$)

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{q_p \omega_p} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_p^2}} = \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) + \frac{j\omega}{q_p \omega_p}}
 \end{aligned}$$



Fattori della $H(j\omega)$ (9)

- Modulo (continuo)

$$|H(j\omega)|_{dB} = -10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{q_p \omega_p} \right)^2 \right]$$

$$\text{se : } \omega \ll \omega_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg \omega_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx -10 \log \left(\frac{\omega^4}{\omega_p^4} \right) = \\ &= -40 \log \omega + 40 \log \omega_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega = \omega_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log(q_p^2) = \\ &= 20 \log(q_p) \end{aligned}$$

Fattori della $H(j\omega)$ (10)

- Fase (continua)

se : $\omega < \omega_p$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega_p \omega}{q_p (\omega_p^2 - \omega^2)}\right) + 2k\pi$$

se : $\omega > \omega_p$

$$\angle H(j\omega) = \pi - \arctan(\dots) + 2k\pi$$

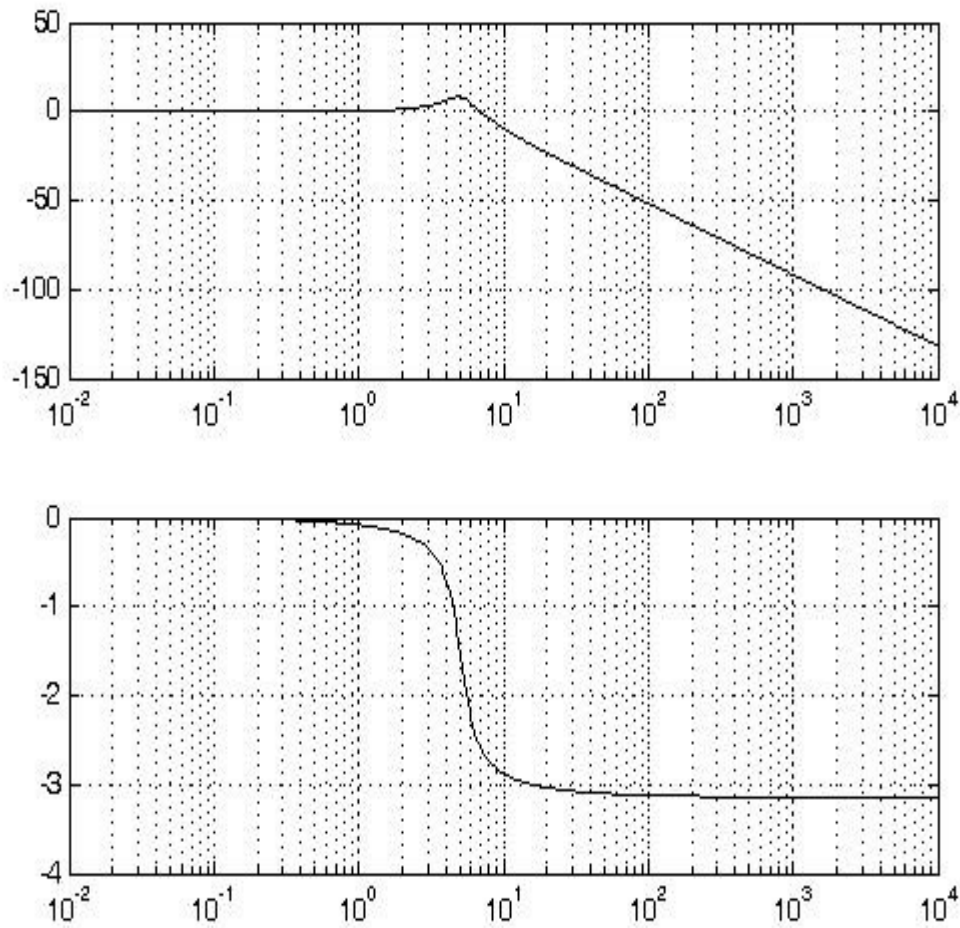
$$\angle H(j0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \omega_p^- \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\pi$$

Fattori della $H(j\omega)$ (11)

- I diagrammi di Bode del modulo e della fase di una coppia di poli complessi coniugati stabili



Diagrammi asintotici di Bode

- Si ottengono sovrapponendo i diagrammi asintotici dei singoli fattori, grazie alla proprietà additiva del logaritmo e della fase
- Il procedimento risulta piuttosto semplice, intuitivo e veloce in quanto i diagrammi asintotici, ovvero approssimati, sono funzioni lineari a tratti
- Per quanto riguarda gli errori, si commette al massimo un errore di 3 dB se non ci sono fattori di secondo grado e se i poli e gli zeri distano tra loro almeno una decade

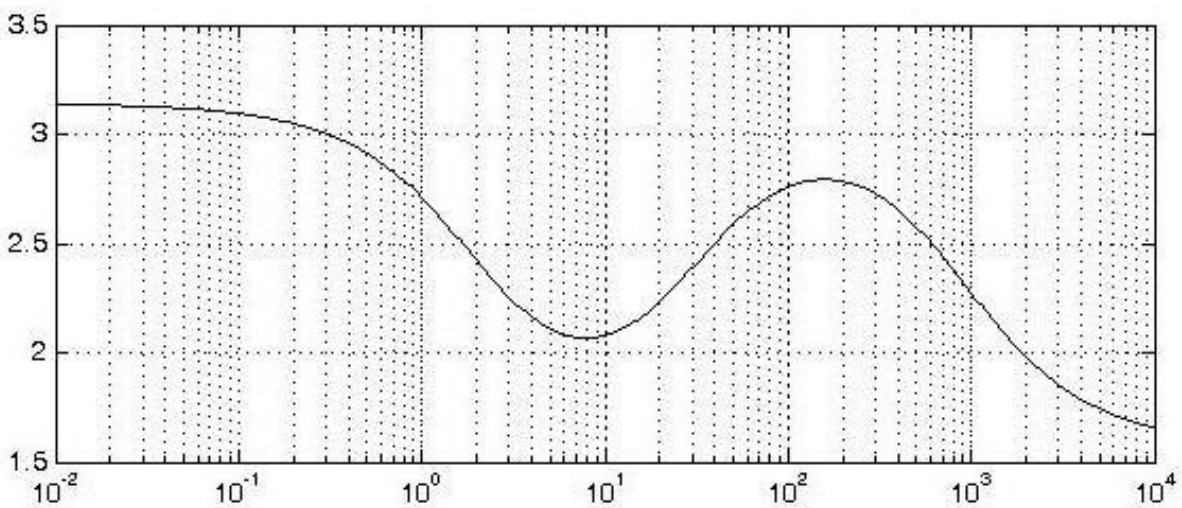
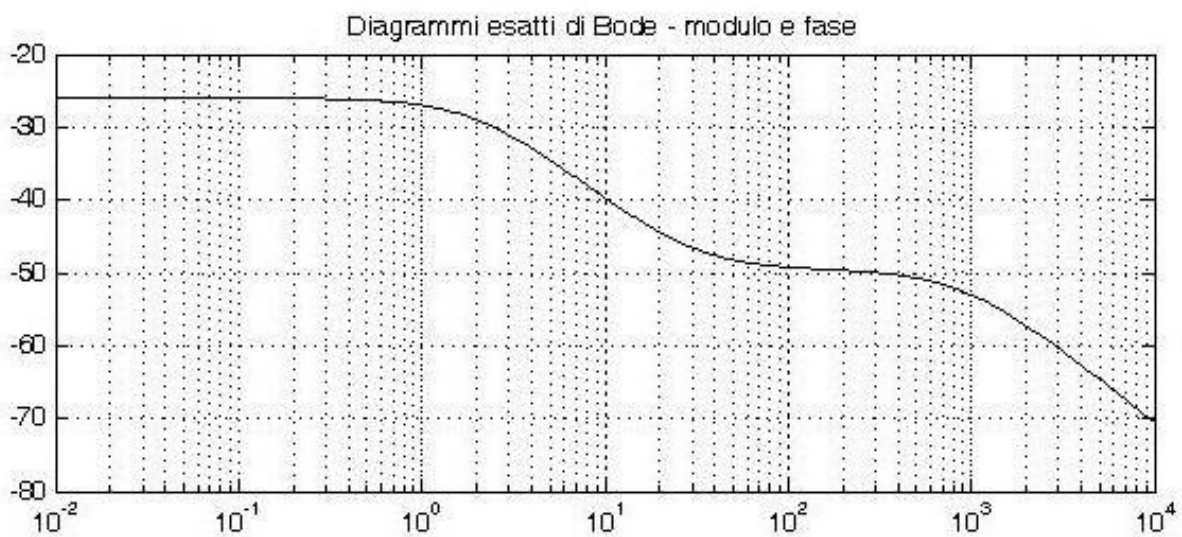
Esempio di diagramma di Bode

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-3(s+30)}{(s+2)(s+900)} = \\ &= -\frac{1}{20} \frac{\left(1 + \frac{s}{30}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)\left(1 + \frac{s}{900}\right)} \end{aligned}$$

- Funzione con denominatore di secondo grado e numeratore di primo grado, uno zero all'infinito. Uno zero al finito e due poli reali negativi: circuito stabile
- $K_{db} = -26$, $\angle K = \pm\pi$
- $z_1 = -30$, $p_1 = -2$, $p_2 = -900$
- $\log 2 = 0.3$, $\log 30 = 1.5$, $\log 900 = 2.9$

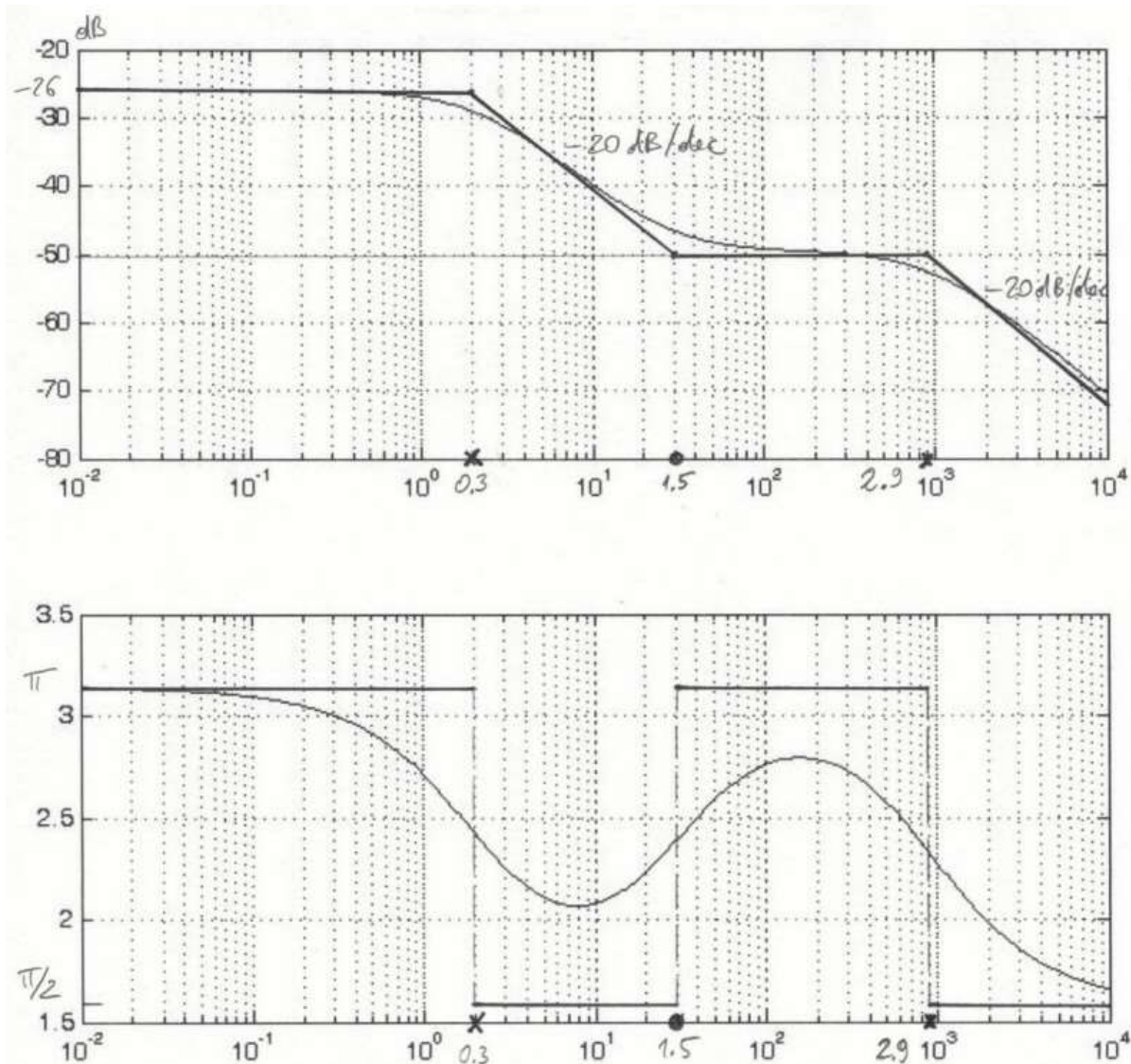
Esempio di diagramma di Bode (2)

- I diagrammi esatti sono



Esempio di diagramma di Bode (3)

- I diagrammi asintotici sono



- Si nota come il modulo asintotico approssimi abbastanza bene il modulo esatto, mentre la fase asintotica risulti piuttosto grossolana

Esempio 2 di diagramma di Bode

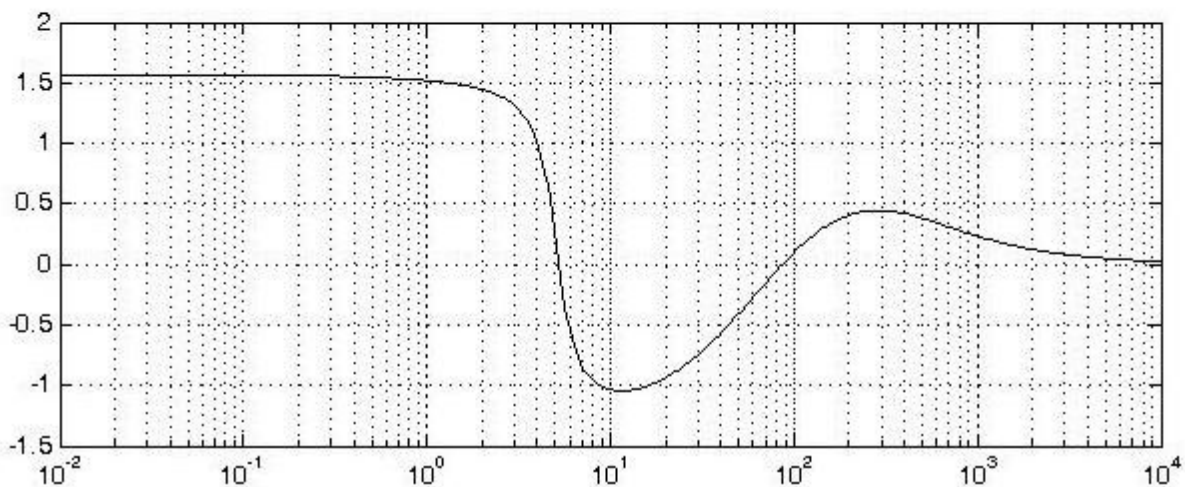
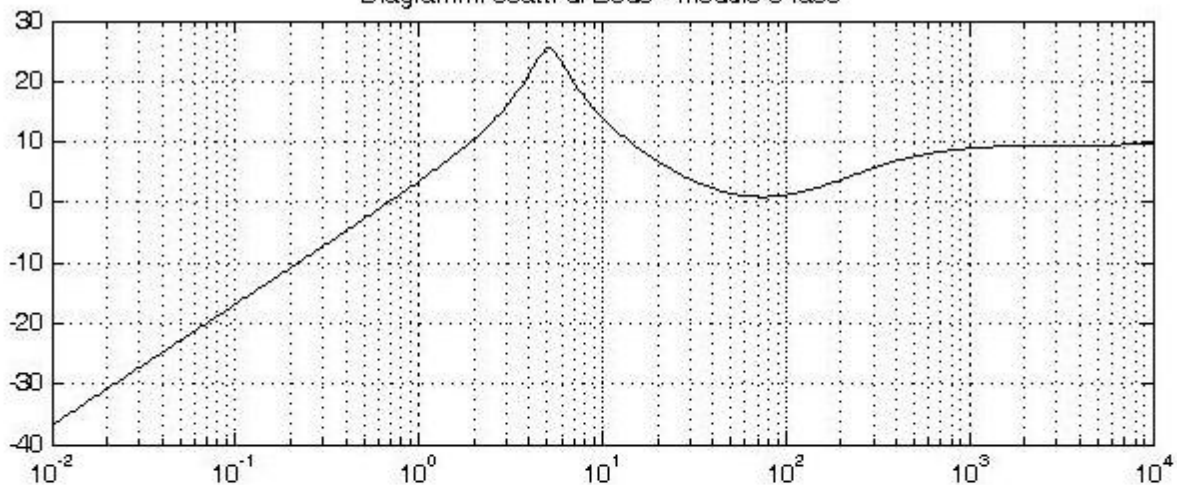
$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{3s(s + 50)(s + 100)}{(s^2 + 2s + 26)(s + 400)} = \\ &= \frac{75}{52} \frac{s \left(1 + \frac{s}{50}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{13} + \frac{s^2}{26}\right) \left(1 + \frac{s}{400}\right)} \end{aligned}$$

- Funzione con denominatore e numeratore di terzo grado, uno zero nell'origine e nessun zero all'infinito. Tre zeri al finito e tre poli, di cui due complessi coniugati, con parte reale negativa: circuito stabile
- Fattore secondo grado: $\omega_p = \sqrt{26}$, $q_p = 2.55$, $q_{p\text{dB}} = 8.1$ dB

Esempio 2 di diagramma di Bode (2)

- $K' = 1.44, K'_{db} = 3.18$
- $z_1 = 0, z_2 = -50, z_3 = -100$
- $p_1 = -1 \pm j5, p_3 = -400$
- $\log 50 = 1.7, \log 100 = 2$
- $\log(\sqrt{26}) = 0.7, \log 400 = 2.6$

Diagrammi esatti di Bode - modulo e fase



Esempio 2 di diagramma di Bode (3)

- I diagrammi asintotici sono

