

*TEORIA dei CIRCUITI*  
*Ingegneria dell'Informazione*

*– FUNZIONI DI RETE –*

Stefano Pastore

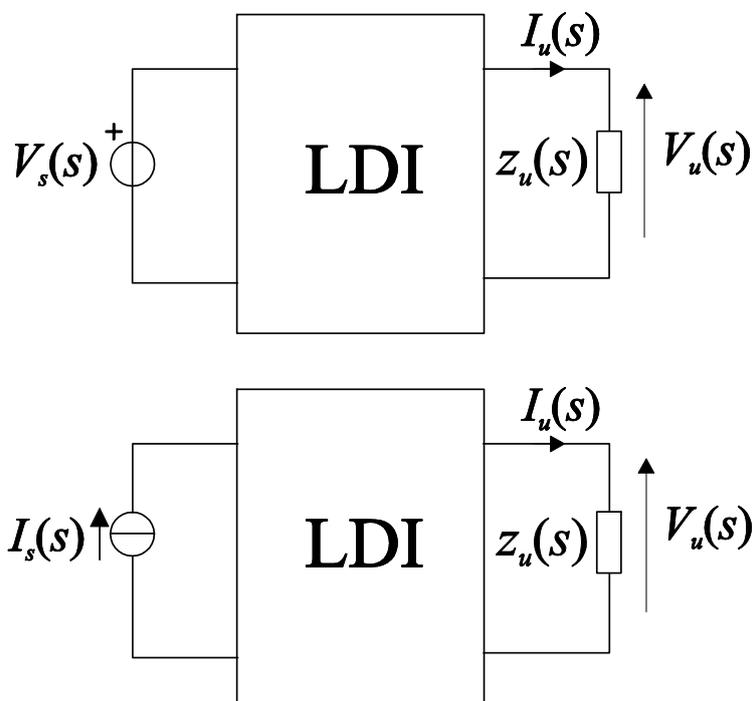
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Teoria dei Circuiti (105IN)

a.a. 2013-14

## Circuiti con un ingresso e una uscita

- Rappresentiamo un circuito LDI stabile e non-degenere di ordine  $n$  con gli schemi di figura



- Le funzioni di rete (in Laplace) esprimono la relazione esistente tra la (unica) sorgente indipendente (l'ingresso) e la tensione o corrente su una impedenza (l'uscita)

## *Dallo stato alle funzioni di rete*

- Indicata genericamente con  $u(t)$  la variabile in ingresso e con  $y(t)$  la variabile di uscita, le equazioni di stato e di uscita in  $t$  sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases}$$

- Dove  $\mathbf{x}(t)$  è un vettore  $[n \times 1]$ ,  $y(t)$  e  $u(t)$  sono scalari
- Le condizioni iniziali sono poste a zero per il fatto che ci interessa solamente il rapporto tra l'ingresso e l'uscita;  $y(t)$  rappresenta solamente la soluzione forzata (e non quella libera)
- Le funzioni di rete possono essere un rapporto di tensioni o di correnti, quindi numeri puri, o avere le dimensioni di una trans-impedenza o trans-ammettenza

## Dallo stato alle funzioni di rete (2)

- Trasformando con Laplace si ottiene la funzione di rete  $H(s)$

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = (\mathbf{C}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D)U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n'}s^{n'}}$$

- $H(s)$  è una funzione razionale fratta a coefficienti reali in  $s$ , dove  $\text{grad}(D(s)) = n' \leq n$
- $N(s)$  e  $D(s)$  non contengono fattori comuni che devono essere cancellati nel calcolo

## *Funzioni di rete*

- Le radici di  $D(s)$  sono chiamate “poli”, quelle di  $N(s)$  “zeri”. Sono reali o complesse coniugate
- I poli derivano da:  $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$ , espressione che ci dà gli autovalori di  $\mathbf{A}$  (coincidenti con le radici della equazione caratteristica)
- I poli in genere coincidono con gli autovalori di  $\mathbf{A}$  ( $n = n'$ ), a meno che qualche radice al denominatore non si elida con una corrispondente al numeratore, ovvero se qualche polo e zero coincidono. Questi corrispondono ai modi non-controllabili e non-osservabili. In questo caso  $n' < n$
- Gli zeri di  $N(s)$  possono essere positivi o a parte reale positiva, non influenzando sulla stabilità

## Funzioni di rete (3)

- $H(s)$  può essere sviluppata in somma di frazioni parziali, da cui si può ottenere la  $h(t)$

$$H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{n'}}{s - p_{n'}}$$

$$\Rightarrow h(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_{n'} e^{p_{n'} t}$$

per  $t \geq 0$

- $h(t)$  (risposta alla  $\delta(t)$ ) consiste in una somma di esponenziali reali e complesse; se tutte le radici, ovvero i poli, sono a parte reale negativa,  $h(t)$  va a zero per  $t \rightarrow \infty$ , ovvero il circuito è stabile
- Se  $U(s) = 1$  [ $u(t) = \delta(t)$ ], allora:  $H(s) = Y(s)$   
La funzione di rete coincide con l'uscita del circuito alimentato da una sorgente impulsiva unitaria
- La stabilità del circuito si vede anche dall'analisi delle funzioni di rete

## *Funzioni di rete sull'asse $j\omega$*

- Esaminiamo  $H(s)$  per un circuito stabile sull'asse immaginario, cioè poniamo  $s = j\omega$
- $H(j\omega)$  rappresenta il rapporto tra l'uscita e l'ingresso quando la sorgente è una sinusoidale a frequenza  $\omega$ .

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

- Il modulo esprime il rapporto tra i moduli delle sinusoidi in uscita e in ingresso, la fase la differenza delle fasi, ovvero il ritardo tra le due sinusoidi

## Laplace e fasori

- Se avessimo calcolato la funzione di rete come rapporto tra i fasori della  $y(t)$  e della  $u(t)$ , cosa avremmo ottenuto? Facciamo un confronto tra i due metodi
- La trasformata di Laplace di un ingresso  $u(t)$  sinusoidale è

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t)] &= [U \cos(\omega t + \varphi_u)] = \\ &= \frac{U \cos \varphi_u s - U \sin \varphi_u \omega}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{0.5Ue^{j\varphi_u}}{s - j\omega} + \frac{0.5Ue^{-j\varphi_u}}{s + j\omega}\end{aligned}$$

- Il fasore massimo è:  $\bar{U} = Ue^{j\varphi_u}$

## *Laplace e fasori (2)*

- Essendo un circuito LDI con una sola sorgente sinusoidale, la soluzione particolare o a regime  $y^p(t)$  è anch'essa una sinusoidale la cui trasformata di Laplace è

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y^p(t)] &= [Y \cos(\omega t + \varphi_y)] = \\ &= \frac{Y \cos \varphi_y s - Y \sin \varphi_y \omega}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{0.5Y e^{j\varphi_y}}{s - j\omega} + \frac{0.5Y e^{-j\varphi_y}}{s + j\omega}\end{aligned}$$

- Il fasore massimo è:  $\bar{Y} = Y e^{i\varphi_y}$

## Laplace e fasori (3)

- Ricordando che  $H(s)$  è un rapporto di polinomi:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \left[ \frac{0.5Ue^{j\varphi_u}}{s - j\omega} + \frac{0.5Ue^{-j\varphi_u}}{s + j\omega} \right] =$$
$$= \frac{N_1(s)}{D(s)} + \underbrace{\frac{0.5Ye^{j\varphi_y}}{s - j\omega} + \frac{0.5Ye^{-j\varphi_y}}{s + j\omega}}_{\text{soluzione particolare}}$$

- Il primo fattore rappresenta la soluzione transitoria stabile, il secondo e il terzo (sono complessi coniugati) la soluzione particolare o a regime
- Calcoliamo  $N_1(s)$ ,  $Y$  e  $\varphi_y$  riducendo il tutto a un unico denominatore e uguagliando i numeratori

## Laplace e fasori (4)

- Si ottiene

$$\begin{aligned} & N(s)0.5Ue^{j\varphi_u}(s + j\omega) + \\ & + N(s)0.5Ue^{-j\varphi_u}(s - j\omega) = \\ & = N_1(s)(s + j\omega)(s - j\omega) + \\ & + D(s)0.5Ye^{j\varphi_y}(s + j\omega) + \\ & + D(s)0.5Ye^{-j\varphi_y}(s - j\omega) \end{aligned}$$

- Ponendo  $s = j\omega$ , ovvero vincolando  $s$  sul suo asse immaginario, l'espressione si riduce a

$$\begin{aligned} N(j\omega)Ue^{j\varphi_u} &= D(j\omega)Ye^{j\varphi_y} \\ \rightarrow H(j\omega) &= \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{Ye^{j\varphi_y}}{Ue^{j\varphi_u}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} \end{aligned}$$

## *Laplace e fasori (5)*

- Abbiamo ottenuto il seguente risultato, che  $H(j\omega)$  è data dal rapporto tra i fasori  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{U}$  alla corrispondente frequenza angolare  $\omega$
- $H(j\omega)$  rappresenta soltanto la soluzione particolare o a regime con sorgente sinusoidale, non il transitorio
- Ipotesi fondamentale è che il circuito sia stabile, ovvero che i poli abbiano parte reale negativa. Non ci devono essere poli neanche sull'asse immaginario

## *Proprietà della $H(j\omega)$*

- $H(j\omega)$  è una funzione complessa di variabile complessa. Il modulo è una funzione pari di  $\omega$ , la fase una funzione dispari

$$H(-j\omega) = H((j\omega)^*) = H^*(j\omega)$$

$$\Rightarrow |H(-j\omega)| = |H^*(j\omega)| = |H(j\omega)|$$

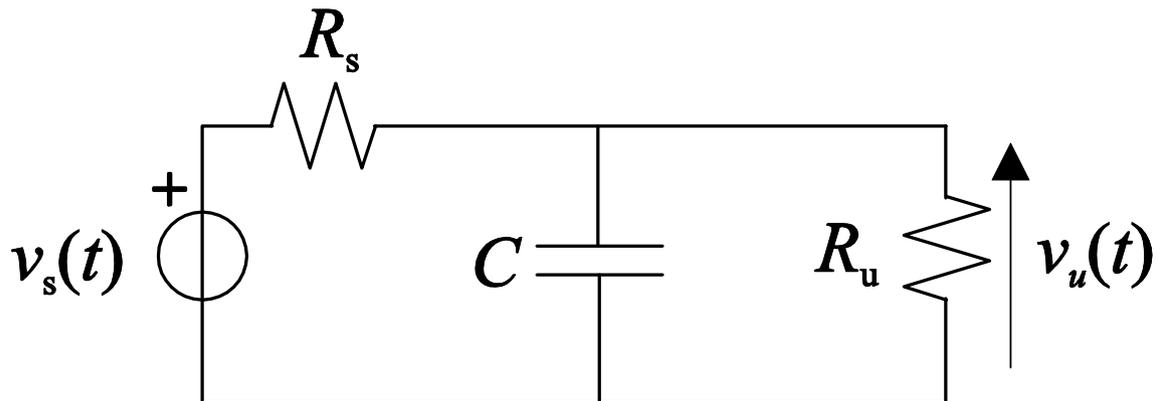
$$\Rightarrow \angle H(-j\omega) = \angle H^*(j\omega) = -\angle H(j\omega)$$

$$|H(j\omega)|^2 = M^H(\omega^2)$$

- Il modulo è continuo per le funzioni stabili. Il modulo al quadrato dipende da  $\omega^2$
- La fase è continua tranne quando ci sono delle coppie di zeri immaginari puri ( $\pm \pi$ )
- $H(j\omega)$  si può rappresentare o mediante la parte reale e quella immaginaria, oppure mediante modulo e fase

## Esempi di funzioni di rete

- Circuito RC del I ordine lineare



$$\frac{V_u(s)}{V_s(s)} = H(s) = \frac{R_u}{R_u + R_s} \frac{1}{1 + sC} \frac{R_u R_s}{R_u + R_s}$$

$$C = 1\mu\text{F}, R_u = R_s = 1000\ \Omega \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + s 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$h(t) = \left[ 1000 e^{-2000t} \right] u(t)$$

- Il polo è:  $p_1 = -2000$

## *Esempi di funzioni di rete (2)*

- Ingresso a gradino unitario

$$v_s(t) = 10u(t); V_s(s) = \frac{10}{s}$$

$$V_u(s) = \frac{5}{s} \frac{1}{1 + s \cdot 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$v_u(t) = \left[ -5e^{-2000t} + 5 \right] u(t)$$

- Ingresso esponenziale

$$v_s(t) = 10e^{-100t}u(t); V_s(s) = \frac{10}{s + 100}$$

$$V_u(s) = \frac{5}{(s + 100)(1 + s \cdot 5 \cdot 10^{-4})}$$

$$v_u(t) = \left[ -5.26e^{-2000t} + 5.26e^{-100t} \right] u(t)$$

## *Esempi di funzioni di rete (3)*

- Ingresso sinusoidale

$$v_s(t) = 10 \cos(1000 t) u(t); V_s(s) = \frac{10s}{s^2 + 10^6}$$

$$V_u(s) = \frac{5s}{(s^2 + 10^6)(1 + s 5 \cdot 10^{-4})}$$

$$v_u(t) = \left[ -46e^{-2000t} + 4.47 \cos(1000 t - 0.46) \right] u(t)$$

- Nel dominio dei fasori

$$v_s(t) = 10 \cos(1000 t); \bar{V}_s = 10$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\omega 5 \cdot 10^{-4}}$$

$$\bar{V}_u = \frac{5}{1 + j\omega 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{5}{1 + j0.5}$$

$$v_u(t) = 4.47 \cos(1000t - 0.46)$$

## *Diagrammi polari o di Nyquist*

- La funzione complessa  $H(j\omega)$  può essere rappresentata graficamente con parametro  $\omega$  nel piano

$$\Re\{H(j\omega)\}, \Im\{H(j\omega)\}$$

- Esempi:

1)  $H(j\omega) = a + j b\omega \rightarrow$  semiretta verticale

2)  $H(j\omega) = 1/(a + j b\omega) \rightarrow$  semicerchio con  
centro in  $(1/2a, 0)$

## *Ritardo di gruppo*

- Il ritardo di gruppo è definito come

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi^H(\omega)}{d\omega}$$

- Esprime il ritardo in secondi dei “gruppi” di frequenze componenti il segnale
- Una fase lineare comporta un ritardo di gruppo costante. È particolarmente importante, per esempio, nella elaborazione delle immagini, perché i contorni non vengono deformati

## Grandezze logaritmiche

- Per varie ragioni, la scala logaritmica è da preferirsi alla scala lineare nelle rappresentazioni delle funzioni di rete in modulo e fase, sia per la frequenza angolare in ascissa che per il modulo in ordinata

$$\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow 10\omega & \text{decade} \\ \omega \rightarrow 2\omega & \text{ottava} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10}(|H(j\omega)|) = \\ &= 10 \log_{10}(|H(j\omega)|^2) = 10 \log_{10}(M^H(\omega^2)) \\ |H(j\omega)|_{\text{Np}} &= \ln(|H(j\omega)|) \end{aligned}$$

- Le unità introdotte sono il decibel (dB) e il neper (Np)

$$1 \text{ Np} = 20 \log_{10}(e) = 8.686 \text{ dB}$$

## Attenuazione

- A volte si utilizza l'attenuazione  $\alpha(\omega)$  al posto del modulo, specialmente nel progetto dei filtri elettrici

$$\begin{aligned}\alpha_{dB}(\omega) &= 20 \log_{10} \left( \frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = \\ &= -20 \log_{10} (|H(j\omega)|) = \\ &= -10 \log_{10} (|H(j\omega)|^2) = \\ &= -10 \log_{10} (M^H(\omega^2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{Np}(\omega) &= \ln \left( \frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = -\ln(|H(j\omega)|) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(|H(j\omega)|^2)\end{aligned}$$

## Zeri e poli

- Per il teorema fondamentale dell'algebra, possiamo scomporre  $H(s)$  in un prodotto di fattori con coefficienti reali di primo e di secondo grado. Supponendo che  $\text{grad}(D(s)) = n$ ,  $\text{grad}(N(s)) = m$

$$H(s) = Ks^u \frac{\prod_{\nu=1}^{K_{zr}} \left(1 + \frac{s}{\sigma_{z\nu}}\right) \prod_{\nu=1}^{K_{zc}} \left(1 + \frac{s}{q_{z\nu}\omega_{z\nu}} + \frac{s^2}{\omega_{z\nu}^2}\right)}{\prod_{\nu=1}^{K_{pr}} \left(1 + \frac{s}{\sigma_{p\nu}}\right) \prod_{\nu=1}^{K_{pc}} \left(1 + \frac{s}{q_{p\nu}\omega_{p\nu}} + \frac{s^2}{\omega_{p\nu}^2}\right)}$$

- Dove
- $u \geq 0$ :  $n = K_{pr} + 2K_{pc}$ ,  $m = u + K_{zr} + 2K_{zc}$
- $u < 0$ :  $n = |u| + K_{pr} + 2K_{pc}$ ,  $m = K_{zr} + 2K_{zc}$
- Se  $n > m$ , ci sono  $n - m$  zeri a  $\infty$
- Se  $m = n$ , non ci sono né zeri né poli a  $\infty$
- $m > n$ : non possibile per circuiti non-degeneri

## *Fattori di secondo grado*

- I fattori di secondo grado tengono conto degli zeri e dei poli complessi coniugati. Hanno modulo  $\omega_0$  ( $> 0$ ) e angolo con l'asse reale  $\varphi$
- Le radici (poli o zeri) sono

$${}_1s_2 = -\frac{\omega_0}{2q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4q^2} - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0}{2q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4q^2} - 1}$$

$$\frac{1}{4q^2} - 1 < 0 \Rightarrow |q| > 0.5$$

$${}_1s_2 = -\frac{\omega_0}{2q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4q^2}}$$

- $|s| = \omega_0$
- $\cos \varphi = -\frac{1}{2q}$
- Per i poli, deve valere per la stabilità:  $q > 0$

## *Fattori di secondo grado (2)*

- Vediamo una tabella riassuntiva che associa i valori di  $q$  alla tipologia di poli o zeri

$0 < q < 0.5$       radici reali neg. distinte

$q = 0.5$       radici reali neg. coinc.

$0.5 < q < \infty$       radici complesse p.r. neg.

$q = \pm\infty$       radici immaginarie pure

$-\infty < q < -0.5$       radici complesse p.r. pos.

$q = -0.5$       radici reali pos. coinc.

$-0.5 < q < 0$       radici reali pos. distinte

- N.B. se un fattore contiene due radici reali, viene scomposto in due fattori di primo grado

## *Diagrammi di Bode*

- Sono i diagrammi del modulo (in dB) e della fase della  $H(j\omega)$  rispetto al logaritmo in  $\omega$
- Si ottengono sovrapponendo i diagrammi dei singoli fattori, grazie alla proprietà additiva del logaritmo e della fase
- Il procedimento risulta piuttosto semplice, intuitivo e veloce. Quando si utilizzano i diagrammi asintotici, ovvero quelli approssimati, si ottiene il diagramma asintotico di Bode

## *Scomposizione della $H(j\omega)$*

- Il modulo di un prodotto (rapporto) è uguale al prodotto (rapporto) dei moduli. Il logaritmo di un prodotto (rapporto) di moduli è uguale alla somma (differenza) dei logaritmi dei singoli fattori
- La fase di un prodotto (rapporto) è uguale alla somma (differenza) delle fasi
- Queste proprietà si possono applicare alla  $H(j\omega)$  se si considerano il modulo in dB e la fase in funzione di  $\omega$  ( $\log \omega$ )
- In tal caso il modulo in dB e la fase vengono scomposti nella somma (differenza) di fattori di primo e di secondo grado

## Scomposizione della $H(j\omega)$ (2)

- Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
 |H(j\omega)|_{dB} &= 10 \log(M^H(\omega^2)) = \\
 &= 10 \log(K^2) + 10u \log(\omega^2) + \\
 &+ 10 \sum_{\nu=1}^{K_{zr}} \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{z\nu}^2}\right) - 10 \sum_{\nu=1}^{K_{pr}} \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{p\nu}^2}\right) + \\
 &+ 10 \sum_{\nu=1}^{K_{zc}} \log(\dots) - 10 \sum_{\nu=1}^{K_{pc}} \log(\dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \angle H(j\omega) &= \angle K + u \frac{\pi}{2} + \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{K_{zr}} \angle\left(1 + \frac{j\omega}{\sigma_{z\nu}}\right) - \sum_{\nu=1}^{K_{pr}} \angle\left(1 + \frac{j\omega}{\sigma_{p\nu}}\right) + \\
 &+ \dots + 2k\pi
 \end{aligned}$$

## *Considerazioni sulla $H(j\omega)$*

- Le coppie di zeri immaginari puri sono chiamati zeri di trasmissione del doppio-bipolo

$$s^2 + \omega_z^2 = 0 \rightarrow s = \pm j\omega_z$$

- Il comportamento in continua si determina con

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega)$$

- Il comportamento nelle alte frequenze si determina con

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega)$$

## Fattori della $H(j\omega)$

- Fattore costante

$$H(j\omega) = K$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log K^2 = 20 \log |K|$$

$$\angle H(j\omega) = \angle K + 2k\pi$$

- Fattore nell'origine

$$H(j\omega) = (j\omega)^u$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log(\omega^2)^u = 20u \log \omega$$

$$\angle H(j\omega) = u \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

## Fattori della $H(j\omega)$ (2)

- Fattori di primo grado al numeratore

$$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\sigma_z}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log \left( 1 + \frac{\omega^2}{\sigma_z^2} \right)$$

$$\text{se : } \omega \ll |\sigma_z| \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg |\sigma_z| \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log \left( \frac{\omega^2}{\sigma_z^2} \right) = \\ &= 20 \log \omega - 20 \log |\sigma_z| \end{aligned}$$

$$\text{se : } \omega = |\sigma_z| \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log 2 = 3$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan \left( \frac{\omega}{\sigma_z} \right) \rightarrow \angle H(j0) = 0$$

$$\sigma_z > 0 : \angle H(j\sigma_z) = \frac{\pi}{4}, \angle H(j\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma_z < 0 : \angle H(j|\sigma_z|) = -\frac{\pi}{4}, \angle H(j\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

## Fattori della $H(j\omega)$ (3)

- Fattori di primo grado al denominatore

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\sigma_p}} \quad (\sigma_p > 0)$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = -10 \log \left( 1 + \frac{\omega^2}{\sigma_p^2} \right)$$

$$\text{se : } \omega \ll \sigma_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg \sigma_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx -10 \log \left( \frac{\omega^2}{\sigma_p^2} \right) = \\ &= -20 \log \omega + 20 \log \sigma_p \end{aligned}$$

$$\text{se : } \omega = \sigma_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log 2 = -3$$

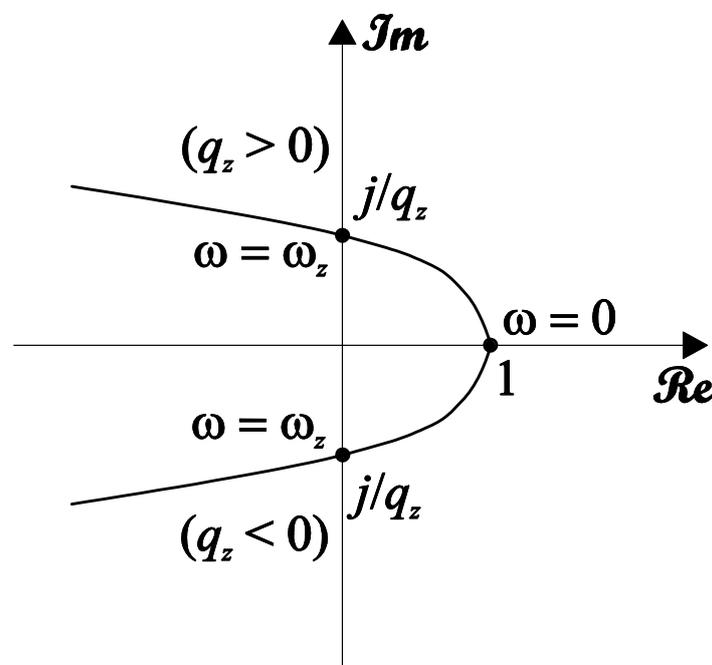
$$\angle H(j\omega) = -\arctan \left( \frac{\omega}{\sigma_p} \right) \rightarrow$$

$$\angle H(j0) = 0, \quad \angle H(j\sigma_p) = -\frac{\pi}{4}, \quad \angle H(j\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

## Fattori della $H(j\omega)$ (4)

- Fattori di secondo grado al numeratore ( $\omega_z > 0$ )

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 1 + \frac{j\omega}{q_z \omega_z} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_z^2} = \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2}\right) + \frac{j\omega}{q_z \omega_z} \end{aligned}$$



## *Fattori della $H(j\omega)$ (5)*

- Modulo (continuo)

$$|H(j\omega)|_{dB} = 10 \log \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{q_z \omega_z} \right)^2 \right]$$

$$\text{se : } \omega \ll \omega_z \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg \omega_z \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log \left( \frac{\omega^4}{\omega_z^4} \right) = \\ &= 40 \log \omega - 40 \log \omega_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega = \omega_z \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log \left( \frac{1}{q_z^2} \right) = \\ &= -20 \log |q_z| \end{aligned}$$

## Fattori della $H(j\omega)$ (6)

- Fase (continua)

se :  $\omega < \omega_z$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_z \omega}{q_z (\omega_z^2 - \omega^2)}\right) + 2k\pi$$

se :  $\omega > \omega_z$

$$\angle H(j\omega) = \pi + \arctan(\dots) + 2k\pi$$

$$\angle H(j0) = 0$$

se :  $q_z > 0$

$$\omega \rightarrow \omega_z^- \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow \pi$$

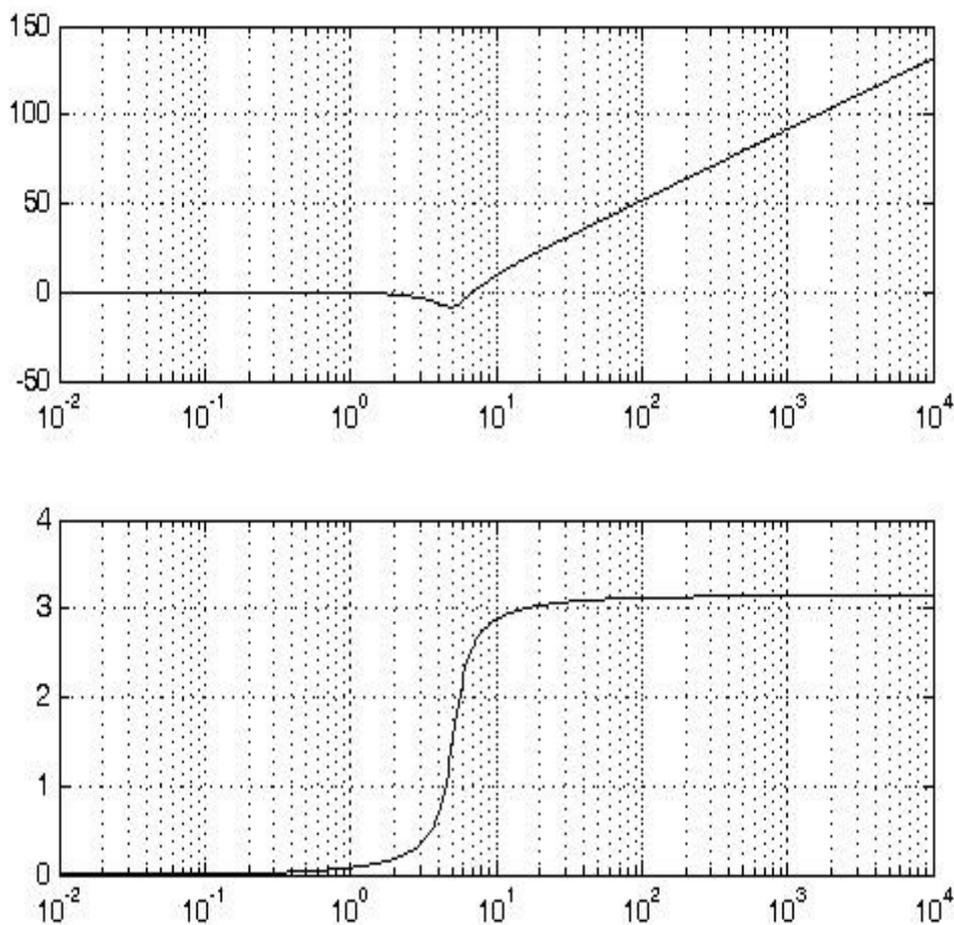
se :  $q_z < 0$

$$\omega \rightarrow \omega_z^- \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\pi$$

## *Fattori della $H(j\omega)$ (7)*

- I diagrammi di Bode del modulo e della fase di una coppia di zeri complessi coniugati ( $q_z > 0$ )



## *Fattori della $H(j\omega)$ (8)*

- Coppia di zeri immaginari puri

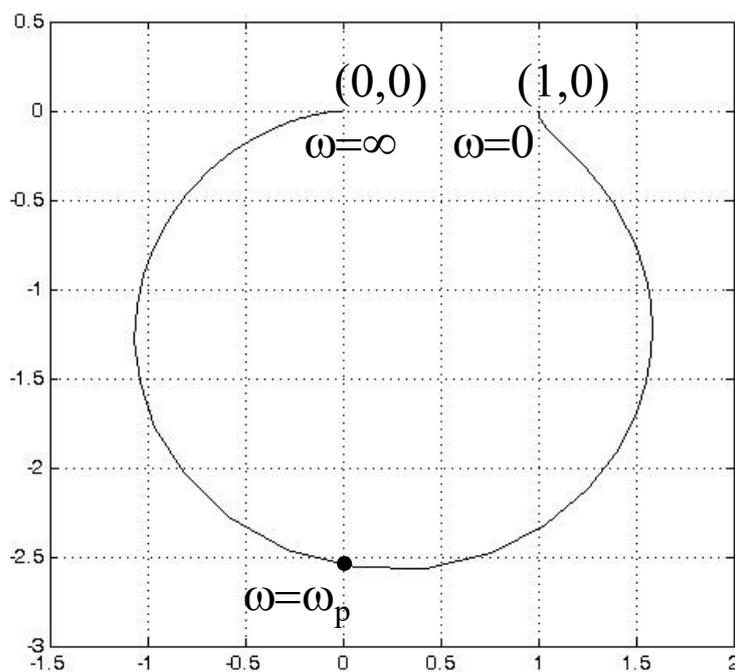
$$H(j\omega) = 1 + \frac{(j\omega)^2}{\omega_z^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2}$$

- La funzione  $H(j\omega)$  è reale, quindi il modulo coincide con il valore assoluto
- La fase è 0 per  $\omega < \omega_z$ , mentre diventa  $\pi$  per  $\omega > \omega_z$ , presentando una discontinuità nell'origine

## Fattori della $H(j\omega)$ (9)

- Fattori di secondo grado al denominatore ( $\omega_p > 0$ ,  $q_p > 0$ )

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{q_p \omega_p} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_p^2}} =$$
$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) + \frac{j\omega}{q_p \omega_p}}$$



## *Fattori della $H(j\omega)$ (10)*

- Modulo (continuo)

$$|H(j\omega)|_{dB} = -10 \log \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{q_p \omega_p} \right)^2 \right]$$

$$\text{se : } \omega \ll \omega_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega \gg \omega_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx -10 \log \left( \frac{\omega^4}{\omega_p^4} \right) = \\ &= -40 \log \omega + 40 \log \omega_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se : } \omega = \omega_p \rightarrow |H(j\omega)|_{dB} &\approx 10 \log(q_p^2) = \\ &= 20 \log(q_p) \end{aligned}$$

## Fattori della $H(j\omega)$ (11)

- Fase (continua)

se :  $\omega < \omega_p$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega_p \omega}{q_p (\omega_p^2 - \omega^2)}\right) + 2k\pi$$

se :  $\omega > \omega_p$

$$\angle H(j\omega) = \pi - \arctan(\dots) + 2k\pi$$

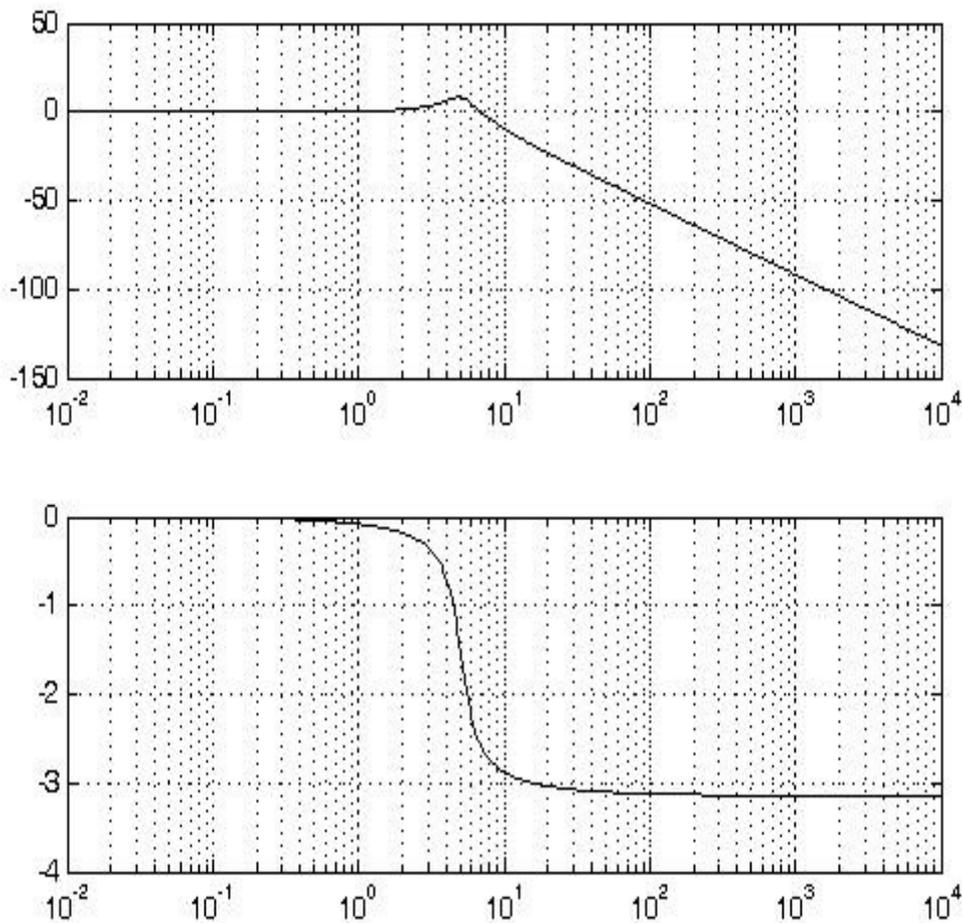
$$\angle H(j0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \omega_p^- \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle H(j\omega) \rightarrow -\pi$$

## *Fattori della $H(j\omega)$ (12)*

- I diagrammi di Bode del modulo e della fase di una coppia di poli complessi coniugati stabili



## *Diagrammi asintotici di Bode*

- Si ottengono sovrapponendo i diagrammi asintotici dei singoli fattori, grazie alla proprietà additiva del logaritmo e della fase
- Il procedimento risulta piuttosto semplice, intuitivo e veloce in quanto i diagrammi asintotici, ovvero approssimati, sono funzioni lineari a tratti
- Per quanto riguarda gli errori, si commette al massimo un errore di 3 dB se non ci sono fattori di secondo grado e se i poli e gli zeri distano tra loro almeno una decade

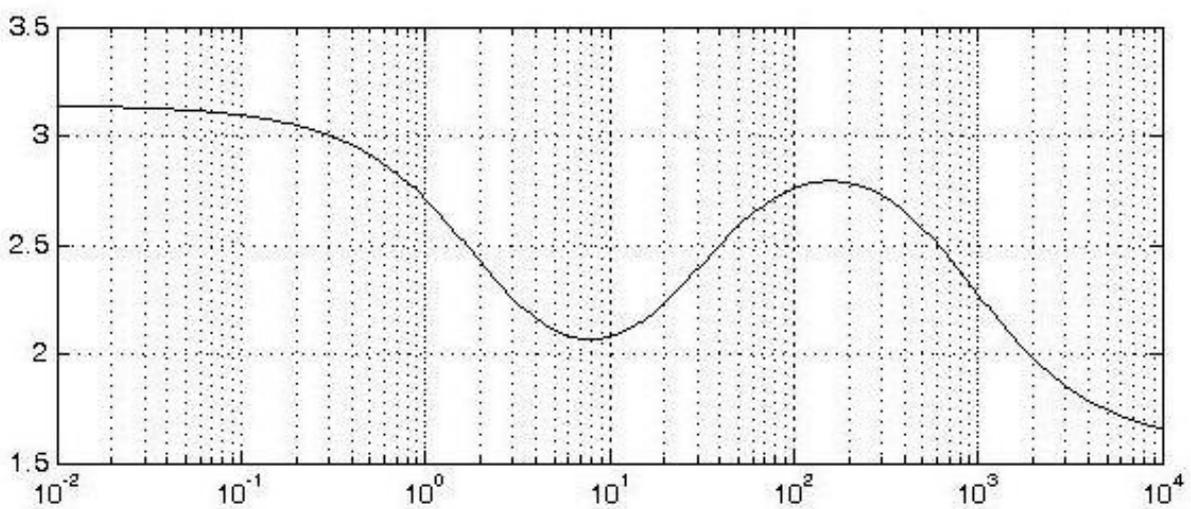
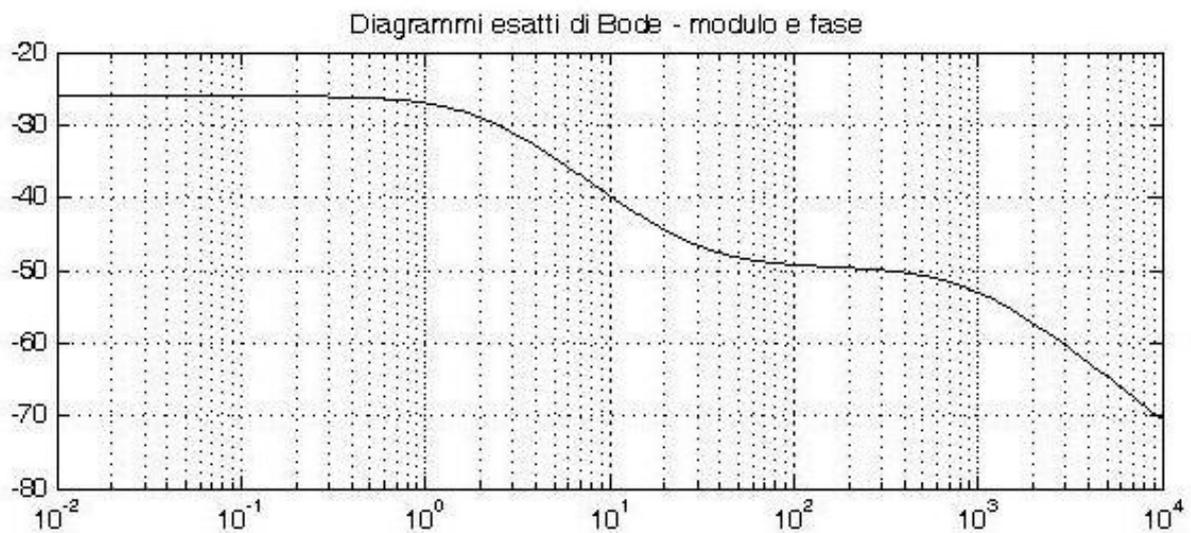
## *Esempio di diagramma di Bode*

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-3(s+30)}{(s+2)(s+900)} = \\ &= -\frac{1}{20} \frac{\left(1 + \frac{s}{30}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)\left(1 + \frac{s}{900}\right)} \end{aligned}$$

- Funzione con denominatore di secondo grado e numeratore di primo grado, uno zero all'infinito. Uno zero al finito e due poli reali negativi: circuito stabile
- $K_{db} = -26$ ,  $\angle K = \pm\pi$
- $z_1 = -30$ ,  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -900$
- $\log 2 = 0.3$ ,  $\log 30 = 1.5$ ,  $\log 900 = 2.9$

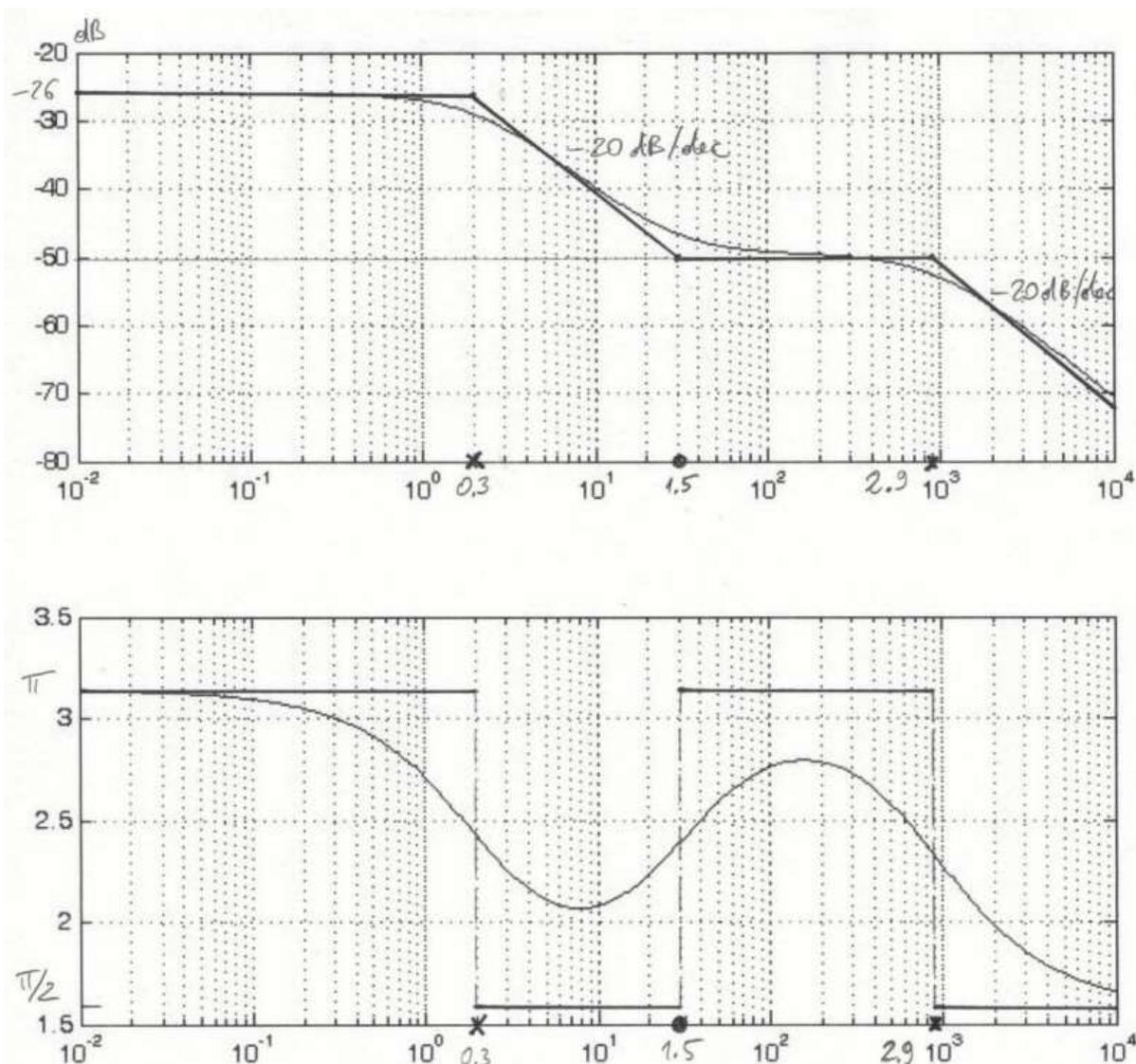
## *Esempio di diagramma di Bode (2)*

- I diagrammi esatti sono



## Esempio di diagramma di Bode (3)

- I diagrammi asintotici sono



- Si nota come il modulo asintotico approssimi abbastanza bene il modulo esatto, mentre la fase asintotica risulti piuttosto grossolana

## Esempio 2 di diagramma di Bode

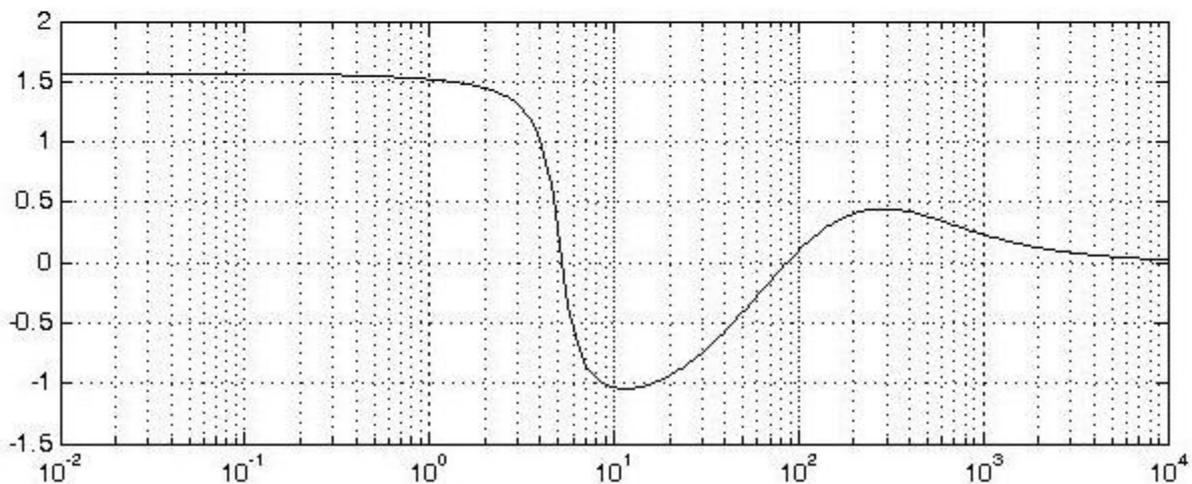
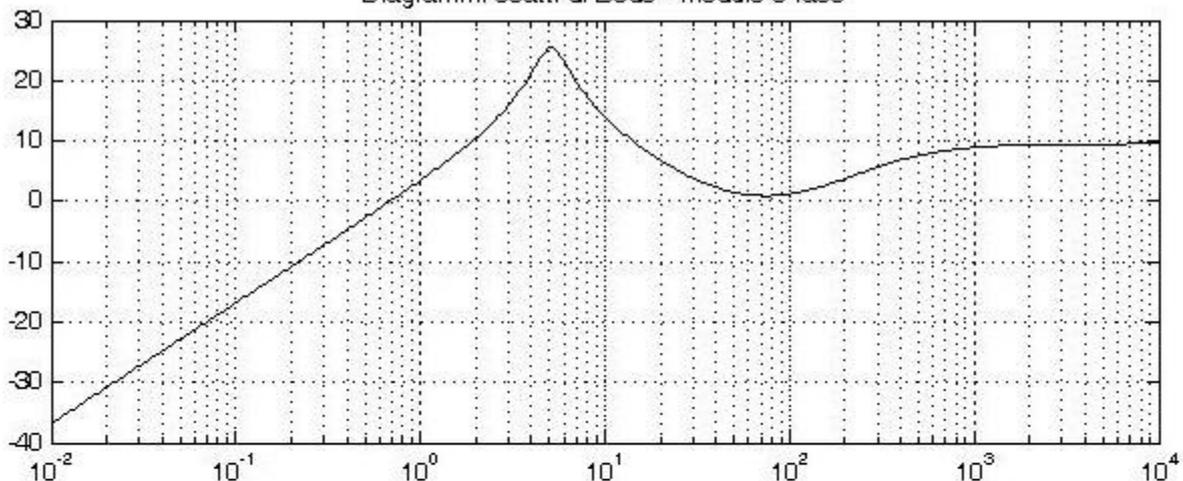
$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{3s(s + 50)(s + 100)}{(s^2 + 2s + 26)(s + 400)} = \\ &= \frac{75}{52} \frac{s \left(1 + \frac{s}{50}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{13} + \frac{s^2}{26}\right) \left(1 + \frac{s}{400}\right)} \end{aligned}$$

- Funzione con denominatore e numeratore di terzo grado, uno zero nell'origine e nessun zero all'infinito. Tre zeri al finito e tre poli, di cui due complessi coniugati, con parte reale negativa: circuito stabile
- Fattore secondo grado:  $\omega_p = \sqrt{26}$ ,  $q_p = 2.55$ ,  $q_{p\text{dB}} = 8.1 \text{ dB}$

## Esempio 2 di diagramma di Bode (2)

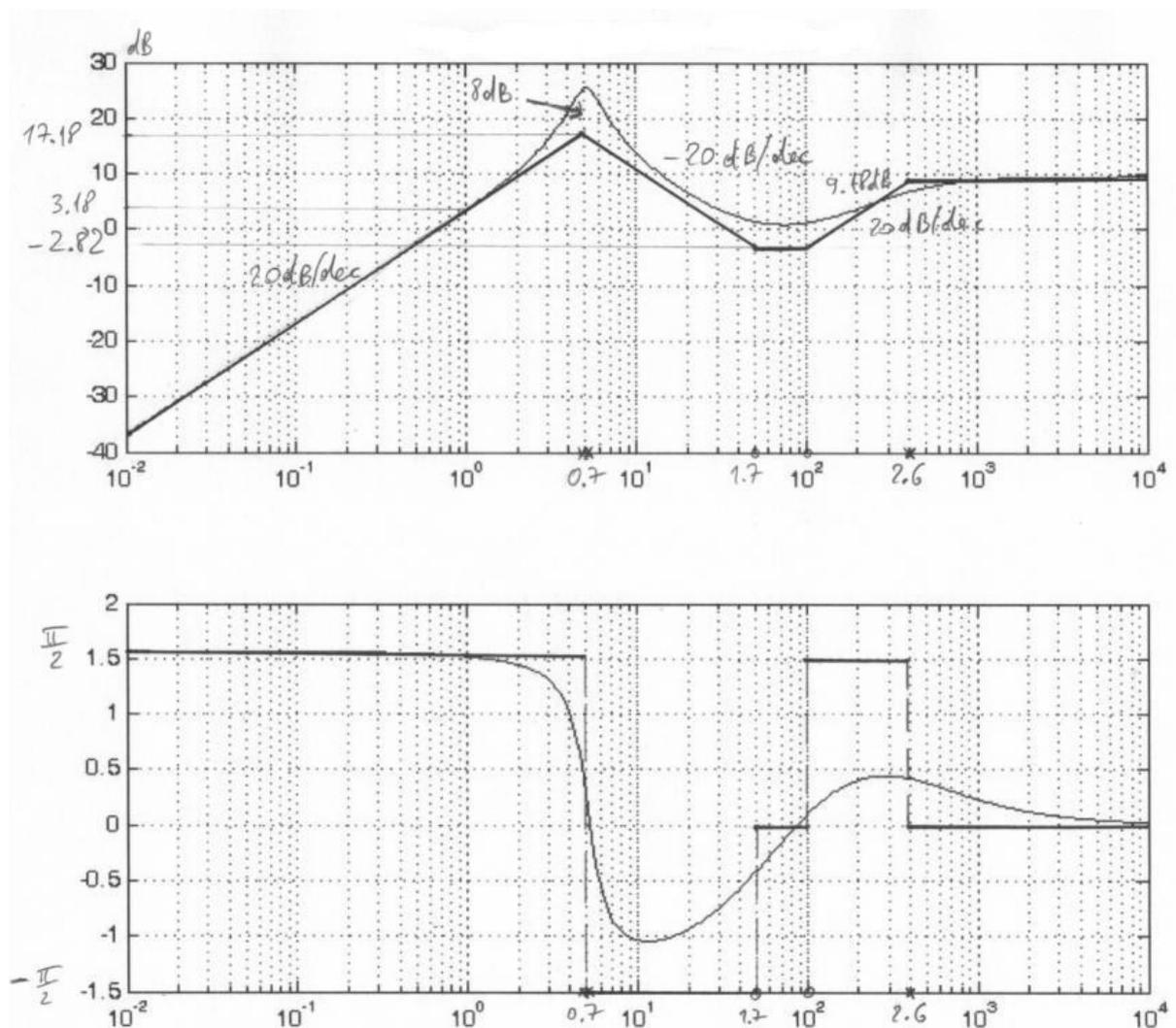
- $K' = 1.44, K'_{db} = 3.18$
- $z_1 = 0, z_2 = -50, z_3 = -100$
- $p_1 = -1 \pm j5, p_3 = -400$
- $\log 50 = 1.7, \log 100 = 2$
- $\log(\sqrt{26}) = 0.7, \log 400 = 2.6$

Diagrammi esatti di Bode - modulo e fase



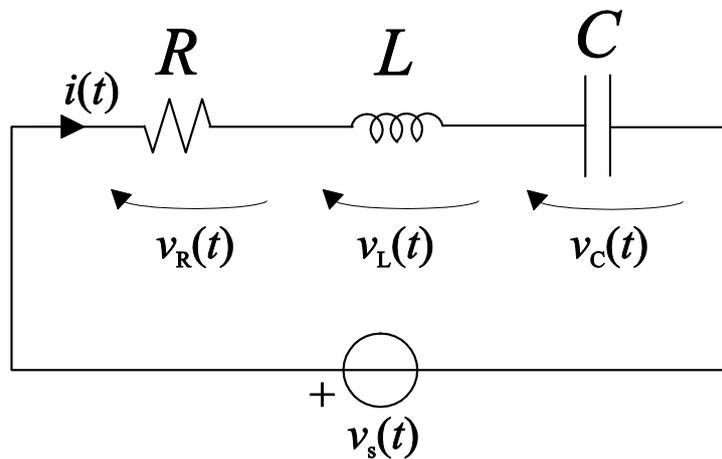
## Esempio 2 di diagramma di Bode (3)

- I diagrammi asintotici sono



## Circuito risonante reale serie

- Consideriamo un risonatore reale serie alimentato da una sorgente di tensione sinusoidale.



- Abbiamo visto che il circuito presenta frequenze naturali complesse coniugate, ovvero risona, imponendo

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2z_0$$

## Circuito risonante reale serie (2)

- Esaminiamo il circuito a regime e calcoliamo la funzione di rete  $H(j\omega)$  relativa alla tensione sulla resistenza

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right)} \end{aligned}$$

- Definendo la frequenza di risonanza  $\omega_0$  e il fattore di qualità  $Q_s$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q_s &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \end{aligned}$$

## Circuito risonante reale serie (3)

- Si ottiene

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ_s \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$H(j\omega_0) = 1$$

- Infine, introducendo la frequenza normalizzata:  $\Omega = \omega/\omega_0$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 + jQ_s \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}$$

$$H(j1) = 1$$

## Circuito risonante reale serie (4)

- Se  $\Omega_1 \cdot \Omega_2 = 1 \rightarrow H(j\Omega_1) = H^*(j\Omega_2)$
- Il modulo è geometricamente simmetrico rispetto alla frequenza di risonanza, la fase anti-simmetrica
- Calcoliamo le frequenze per cui il modulo di  $H(j\Omega)$  è uguale a  $1/\sqrt{2}$ , ovvero la banda passante a 3 dB

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2} \rightarrow Q_s^2 \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 = 1$$

$$Q_s \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right) = \pm 1$$

$$\begin{cases} \Omega^+ = \frac{1}{2Q_s} + \sqrt{\frac{1}{4Q_s^2} + 1} \\ \Omega^- = -\frac{1}{2Q_s} + \sqrt{\frac{1}{4Q_s^2} + 1} \end{cases}$$

## Circuito risonante reale serie (5)

- Ne risulta che

$$\begin{cases} \Omega^+ - \Omega^- = \frac{1}{Q_s} \\ \Omega^+ \Omega^- = 1 \end{cases}$$

- Più alto è  $Q_s$ , più stretta è la banda  $\Delta\Omega$  e maggiore è la simmetria aritmetica dei due punti rispetto a quella geometrica
- La fase nei punti significativi vale

$$\angle H(j0) = \frac{\pi}{2}, \quad \angle H(j\Omega^-) = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle H(j1) = 0, \quad \angle H(j\Omega^+) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\angle H(j\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

## Circuito risonante reale serie (6)

- Ritornando alla frequenza non normalizzata  $\omega_0$ , le relazioni diventano

$$\begin{cases} \omega^+ - \omega^- = \frac{\omega_0}{Q_s} \\ \omega^+ \omega^- = \omega_0^2 \end{cases}$$

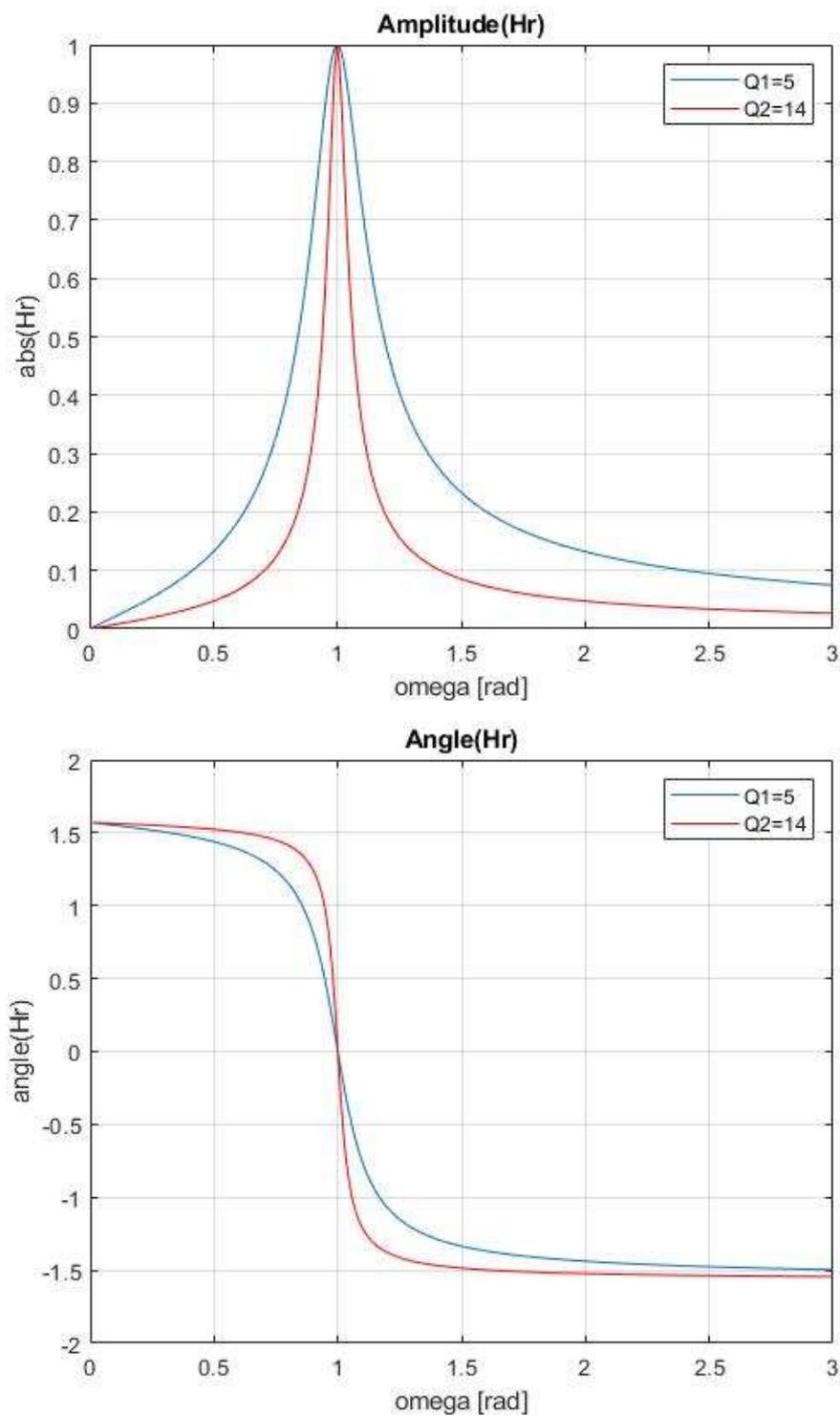
- Più alto è  $Q_s$ , più stretta è la banda  $\Delta\omega$  e maggiore è la simmetria aritmetica dei due punti rispetto a quella geometrica
- La fase nei punti significativi vale

$$\angle H(j0) = \frac{\pi}{2}, \quad \angle H(j\omega^-) = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle H(j\omega_0) = 0, \quad \angle H(j\omega^+) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\angle H(j\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

## Circuito risonante reale serie (7)



## Circuito risonante reale serie (8)

- Disegniamo il diagramma di Nyquist

