Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 20 febbraio 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo tale che $(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))_{ij} = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $j = 1, \dots, n$.

(a) **(2 punti)** Si determini il rango di f.

(b) **(2 punti)** Sia $u = v_1 + \cdots + v_n$. Si calcoli $f(u)$.

(c) **(4 punti)** Si dica, giustificando la risposta, se f è diagonalizzabile.

(a) $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $\quad rg(f) = 1$

(b) Per def. di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ si ha

$$f(v_1) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n$$
$$f(v_2) = 1 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_n$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = 1 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_n$$

Quindi $f(u) = f(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_n) = n \cdot (v_1 + \cdots + v_n) = n \cdot u$

(c) Se $n=1$, ogni applicazione lineare è diagonalizzabile.
Sia $n \geq 2$. Osservo che $u = v_1 + \cdots + v_n \neq 0_V$, perché altrimenti si avrebbe che $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. DIP.

Siccome $f(u) = n \cdot u \Rightarrow u$ è un autovettore con autovalore n.

Inoltre: $rg(f) = 1 \Rightarrow \dim \ker f = n - rg(f) = n-1 \geq 1 \Rightarrow \ker f = Aut(0)$

Sia $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ una base di $\ker f$.

Affermo che $u_1, \dots, u_{n-1}, u$ sono linearmente indipendenti; cons. $a_1 u_1 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1} + a_n u = 0_V$

se $a_n \neq 0 \Rightarrow u = \frac{1}{a_n} \cdot (-a_1 u_1 - \cdots - a_{n-1} u_{n-1}) \in \ker f$, ma $f(u) \neq 0_V$

se $a_n = 0 \Rightarrow a_1 u_1 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1} = 0_V \Rightarrow a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ perché $u_1, \dots, u_{n-1}$ LIN. INDIP.

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_{n-1}, u\}$ sono una base di autovettori $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile.

(2) **(6 punti)** Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2k & 2 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

$$p_{B_k}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2k & 2-x & 1 \\ k & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)\left((2-x)^2 - 1\right) = (1-x)(x^2-4x+3) = (1-x)(x-1)(x-3)$$
$$= -(x-1)^2(x-3)$$

$$\Rightarrow Sp(B_k) = \{1, 3\}, \quad m_a(1) = 2, \quad m_a(3) = 1$$

$$1 \leq m_g(3) \leq m_a(3) = 1 \Rightarrow m_g(3) = 1$$

B_k è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_g(1) = m_a(1) = 2 \Leftrightarrow rg\left(B_k - 1 \cdot I_3\right) = 3 - 2 = 1$

$B_k - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango $1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ k \end{pmatrix}$ è proporzionale a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = 0$

$\Rightarrow B_k$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow k = 0$.

Base di autovettori:

$Aut(1) = \ker(B_0 - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, eq. $y + z = 0$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$Aut(3) = \ker(B_0 - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, eq. $\begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) **(6 punti)** Si determinino i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema lineare compatibile:

$$\begin{cases} x - ay + 2az & = & a \\ -x + (a+1)y - (2a+2)z & = & a \\ -x - y + 3z & = & a. \end{cases}$$

Per tali valori di $a \in \mathbb{R}$, si determini la generica soluzione del sistema.

Il SL è compatibile $\Leftrightarrow$ $rg\, A = rg\,(A|b)$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2a & a \\ -1 & a+1 & -(2a+2) & a \\ -1 & -1 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow{II + I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2a & a \\ 0 & 1 & -2 & 2a \\ -1 & -1 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow{III \leftrightarrow I} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2a \\ 1 & -a & 2a & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III + I} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2a \\ 0 & -a-1 & 2a+3 & 2a \end{array}\right) \xrightarrow{III + (a+1)II} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & 2a^2+4a \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $rg\, A = 3 = rg\,(A|b)$: il SL è compatibile $\forall a \in \mathbb{R}$

Soluzione: $z = 2a^2 + 4a$, $\quad y = 2z + 2a = 4a^2 + 10a$, $\quad x = -y + 3z - a$

$$= -4a^2 - 10a + 6a^2 + 12a - a$$

$$= 2a^2 + a$$

$$S = \begin{pmatrix} 2a^2 + a \\ 4a^2 + 10a \\ 2a^2 + 4a \end{pmatrix}$$

(4) Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata.

(a) **(2 punti)** Si dimostri che se λ è un autovalore di A, allora A^2 ammette un autovalore, giustificando la risposta.

(b) **(2 punti)** Si dimostri che se λ è un autovalore di A, allora λ è anche un autovalore di ${}^tA$. Questo vale anche per gli autovettori?

(c) **(2 punti)** Si dimostri che se λ è un autovalore di A, e A è invertibile, allora A^{-1} ammette un autovalore, giustificando la risposta.

(a) $A v = \lambda v$; $\quad A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot (\lambda v) = \lambda \cdot (A \cdot v) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 \cdot v$

$v \neq 0_V$ $\quad \Rightarrow \lambda^2$ è autovalore di A^2

(b) λ è radice $p_A(x) = \det(A - x\,\mathbb{I}_n) = \det {}^t(A - x\,\mathbb{I}_n) = \det({}^tA - x\,\mathbb{I}_n)$

$\Rightarrow \lambda$ è radice di $p_{{}^tA}(x)$

In generale, però, gli autovettori sono diversi: esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0$ è autovalore

$Aut(0) = \ker L_A$, eq. $x + 2y = 0$, base $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

per ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Aut(0) = \ker L_{{}^tA}$, eq. $x + y = 0$, base $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A \cdot v = \lambda v$, $\quad A^{-1} \cdot (A \cdot v) = A^{-1}(\lambda v)$

$v \neq 0_V$ $\quad v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$; A invertibile $\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1} \cdot v = A^{-1} \cdot v$

$\Rightarrow \lambda^{-1}$ è autovalore di A^{-1}

(5) Sia V uno spazio euclideo o unitario di dimensione finita

(a) **(4 punti)** Si dimostri il Teorema di Gram-Schmidt: ogni base ortonormale di un sottospazio $W \subseteq V$ si prolunga ad una base ortonormale di V.

(b) **(2 punti)** Si dimostri che $V = W \oplus W^{\perp}$.

(c) **(2 punti)** Si dimostri che ogni spazio euclideo o unitario ammette una base ortonormale.

Vedere appunti delle lezioni.