Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 24.06.19

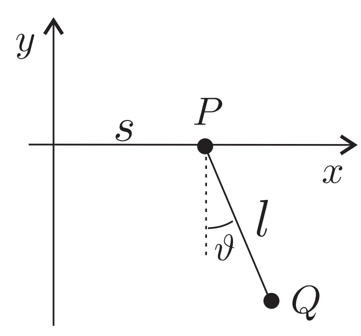
Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2018/2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà, con Lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

1. Sotto quale condizione si possono scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti? [1pt].
2. Scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti alle equazioni di Lagrange del sistema considerato e l'Hamiltoniana corrispondente [2pt].
3. Si dimostri l'equivalenza tra i due sistemi di equazioni [4pt].
4. Cos'è una coordinata ciclica in un sistema Hamiltoniano? Perché la sua presenza implica una costante del moto? [2pt]
5. Si definisca cosa si intende per sistema integrabile [1pt].
6. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi. Perché trovare un integrale completo di tale equazione è equivalente a trovare una traiettoria che risolva le equazioni del moto? [2pt]
7. *Facoltativo: Perché è utile descrivere un sistema integrabile in variabili azione-angolo? [1pt].*

Esercizio 2



Un punto materiale P di massa m_P è vincolato all'asse x di un piano cartesiano xy verticale come in figura. Un secondo punto materiale Q di massa m_Q è vincolato al medesimo piano e ha distanza fissa ℓ da P. Sul sistema agisce la forza di gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere l'angolo θ in figura e l'ascissa s del punto P [2pt].
2. Scrivere la matrice cinetica del sistema [1pt].
3. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
4. Individuare la coordinata ciclica e determinare la corrispondente costante del moto [2pt].
5. Utilizzando la presenza della coordinata ciclica, calcolare la Lagrangiana ridotta [2pt].
6. Linerizzare la Lagrangiana ridotta attorno al punto di equilibrio del problema ridotto (unidimensionale) [2pt].
7. *Facoltativo: Si trovi la frequenza delle piccole oscillazioni per il problema ridotto [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri un sistema quantistico con spazio di Hilbert tridimensionale. Si consideri un'osservabile H rappresentata (in una base) dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Si dimostri che H è un operatore autoaggiunto. [1pt]
2. Si trovino i possibili risultati di una misura dell'osservabile H. [2pt]
3. Si determinino gli autostati corrispondenti. [2pt]
4. Si prenda il sistema nello stato $|\psi\rangle$ rappresentato dal vettore [3pt]

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} . \tag{2}$$

   - Qual è la probabilità che una misura di H dia come risultato $+1$?
   - Qual è la probabilità che una misura di H dia come risultato -1?
   - Qual è la probabilità che una misura di H dia come risultato -2?