Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 29.01.2020

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2018/2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema Hamiltoniano a n gradi di libertà, con Hamiltoniana $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$.

1. Si scrivano le equazioni che descrivono la dinamica del sistema [1pt].
2. Si definisca cosa si intende per *costante del moto* in un sistema Hamiltoniano [2pt].
3. Si definiscano le Parentesi di Poisson [1pt].
4. Si caratterizzi le costanti del moto usando le parentesi di Poisson e si dica quando l'energia del sistema è una costante del moto (e perché) [2pt].
5. Si definisca cosa si intende per una trasformazione canonica [1pt].
6. Che relazione intercorre tra le trasformazioni canoniche e le parentesi di Poisson? [1pt]
7. Si definisca il flusso Hamiltoniano e si dimostri che definisce una trasformazione canonica [4pt].
8. *Facoltativo: Si enunci e si dimostri il teorema di Liouville [1pt].*

Esercizio 2

Si consideri il moto tridimensionale $\vec{q}(t) = (\, q_1(t), q_2(t), q_3(t)\,)$ di una carica e in un campo magnetico costante $\vec{B} = (0, 0, B)$. Il potenziale vettore associato può essere scritto come

$$\vec{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\; \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \;)$$

Si ricordi che tale sistema è descritto dalla Lagrangiana $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^{\,2} + e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}$

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere le coordinate cilindriche (cioè polari r, φ nel piano (q_1, q_2) e la coordinata $z = q_3$) [1pt].
2. Ci sono coordinate cicliche? Se sì quali? Trovare le costanti del moto corrispondenti. A che simmetrie del sistema corrispondono? [2pt]

Si aggiunga al sistema una forza esterna descritta dall'energia potenziale $V = V_0 e^{q_3^2/\ell^2}$.

3. Si scriva la nuova Lagrangiana, sempre nelle coordinate libere r, φ, z, e si derivino le equazioni di Lagrange corrispondenti [2pt].
4. Qual è la coordinata ciclica? Scrivere la Lagrangiana efficace del problema ridotto a due gradi di libertà [2pt].

5. Si trovi il punto di equilibrio stabile del potenziale efficace [1pt].

6. Linearizzare la Lagrangiana efficace attorno al punto di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni [2pt].

7. *Facoltativo: si risolvano le equazioni di Lagrange del sistema linearizzato [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Scrivere, per tale sistema, l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x)$ ed energia E [1pt].

Ridefinire $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q\right) = \varphi(q)$, $E = \lambda\hbar\omega$. Si prenda $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ e $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$.

2. Per quali valori di r la funzione d'onda è una funzione pari? [1pt]

3. Calcolare le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$ [1pt].

Scrivendo l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ e inserendo $\varphi(q)$ in tale equazione, si trova la seguente equazione per $\theta(q)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

4. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r(r-1) = 0$ [3pt].

5. Determinare lo spettro dell'energia (e in particolare il valore minimo) [2pt].

6. *Facoltativo: si trovi l'autofunzione relativa al volor minimo dell'energia. [1pt]*