Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 09.09.2021

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2020/2021

Esercizio 1

1. Si definisca cosa si intende per *costante del moto* in un sistema Lagrangiano [2pt].
2. Si enunci e si dimostri il teorema di Nöther, giustificando tutti i passaggi della dimostrazione [5pt].
3. Si *utilizzi il teorema di Nöther* per dimostrare che il momento coniugato a una coordinata ciclica è una costante del moto [2pt].
4. Che relazione intercorre tra le costanti del moto e le parentesi di Poisson in un sistema Hamiltoniano? [1pt]
5. Si *utilizzi le parentesi di Poisson* per dimostrare che il momento coniugato a una coordinata ciclica è una costante del moto [2pt].
6. *Facoltativo: Si spieghi perché il sistema di Keplero 3-dimensionale è un sistema integrabile [1pt].*

Esercizio 2

Si consideri il moto tridimensionale $\vec{q}(t) = (\, q_1(t), q_2(t), q_3(t)\,)$ di un punto materiale di massa m e carica e in un campo magnetico costante $\vec{B} = (0, 0, B)$. Il potenziale vettore associato può essere scritto come

$$\vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A}\ )$$

Si ricordi che tale sistema è descritto dalla Lagrangiana $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^{\,2} + e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}$

1. Ricavare le equazioni di Lagrange nelle coordinate q_1, q_2, q_3 [1pt].
2. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere le coordinate cilindriche (cioè polari r, φ nel piano (q_1, q_2) e la coordinata $z = q_3$) [1,5pt].

Si aggiunga al sistema una forza esterna descritta dall'energia potenziale $V = \frac{\alpha}{m}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$.

3. Ci sono coordinate cicliche? Se sì quali? Trovare le costanti del moto corrispondenti. A che simmetrie del sistema corrispondono? [2pt]
4. Trovare un'ultreriore costante del moto e scrivere esplicitamente la sua espressione [1pt].
5. Scrivere la Lagrangiana efficace del problema ridotto a un grado di libertà [1,5pt].
6. Si trovi il punto di equilibrio stabile del potenziale efficace [2pt].

7. Trovare la frequenza delle piccole oscillazioni [1pt].

8. *Facoltativo: trovare almeno un'altra costante del moto rispetto quelle trovate nei punti 3 e 4, giustificando il risultato [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Scrivere, per tale sistema, l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x)$ ed energia E [1pt].

Ridefinire $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q\right) = \varphi(q)$, $E = \lambda\hbar\omega$. Si prenda $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ e $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$.

2. Per quali valori di r la funzione d'onda è una funzione pari? [1pt]

3. Calcolare le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$ [1pt].

Scrivendo l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ e inserendo $\varphi(q)$ in tale equazione, si trova la seguente equazione per $\theta(q)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

4. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r(r-1) = 0$ [2pt].

5. Determinare lo spettro dell'energia (e in particolare il valore minimo) [2pt].

6. Si trovi l'autofunzione relativa al valor minimo dell'energia [1pt].