Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 18.07.22

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2021/2022

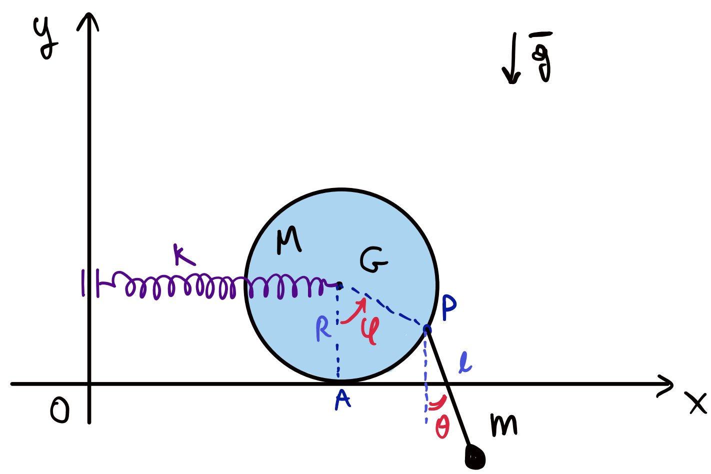
Esercizio 1

1. Si dia la definizione di *costante del moto* per un sistema Lagrangiano. [2pt]
2. Si definisca cos'è una coordinata ciclica e si spieghi perché ad essa è associata una costante del moto. [1pt]
3. Si consideri un punto materiale soggetto a una forza centrale. Si spieghi perché il moto avviene su un piano. Si scriva la Lagrangiana in coordinate polari e, utilizzando la coordinata ciclica, si ricavi la Lagrangiana ridotta. [2pt]
4. Si scriva il potenziale efficace del problema ridotto, assumendo $V(r) = \frac{k}{2}r^2$. Si tracci il suo diagramma di fase e si utilizzino le traiettorie sul piano di fase per descrivere qualitativamente le orbite sul piano del moto. [2pt]
5. Definire cosa si intende per trasformazione canonica in un contesto Hamiltoniano. [2pt]
6. Si dimostri che una funzione $F_1(q, \tilde{q})$ genera una trasformazione canonica. Qual è l'Hamiltoniana coniugata? [2pt]
7. Dimostrare che la trasformazione di coordinate definita da
$$\tilde{p} = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \qquad \text{e} \qquad \tilde{q} = \arctan\left(\frac{\omega\, q}{p}\right)$$
è canonica e si calcoli l'Hamiltoniana coniugata a quella dell'oscillatore armonico con $m = 1$. Si scrivano le soluzioni delle equazioni del moto nelle coordinate $(\tilde{p}, \tilde{q})$. [2pt]
8. *Facoltativo: Trovare la funzione generatrice della trasformazione canonica data nel quesito 7. [1pt]*

Esercizio 2

Si consideri il sistema in figura, vincolato al piano verticale xy: Un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola *senza strisciare* sull'asse x. Il suo centro G è collegato al punto $(0, R)$ con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Un pendolo di lunghezza ℓ e massa m è appeso al punto P. Sul sistema agisce la gravità. Lo spazio delle configurazioni è parametrizzato dagli angoli φ e θ in figura. L'angolo φ è definito in maniera tale che quando $\varphi = \pi$ la molla ha lunghezza nulla.

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema. [2pt]
2. Scrivere la matrice cinetica del sistema. [0,5pt]
3. Scrivere l'equazione di Lagrange relativa alla variabile θ. [1pt]
4. Mettendo a zero uno dei parametri (m, M, k, R, ℓ, g) si aumenta il numero di costanti del moto. Quale parametro? (Giustificare la risposta.) [1pt]



5. Trovare i punti di equilibrio del sistema e discutere la loro stabilità nei seguenti due casi: $\frac{KR}{mg} > 1$ e $\frac{2}{5\pi} < \frac{KR}{mg} < 1$. [4pt]

6. Si ponga $\frac{KR}{mg} = 2$, $\ell = R$ e $M = \frac{2}{3}m$ e si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni, la Lagrangiata linearizzata attorno al punto di equilibrio stabile e le relative equazioni di Lagrange. [1,5pt]

7. *Facoltativo: Si trovino i modi normali di oscillazione relativi al quesito 6. [1pt]*

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Scrivere, per tale sistema, l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x)$ ed energia E [1pt].

Si considerino le ridefinizioni $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q\right) = \varphi(q)$, $E = \lambda\hbar\omega$. Scrivendo l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ e inserendo $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ in tale equazione, si trova la seguente equazione per $\theta(q)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

Si ponga $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$.

2. Calcolare le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$ [1pt].

3. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r(r-1) = 0$ [1pt].

4. Determinare lo spettro dell'energia (e in particolare il valore minimo) [2pt].

5. Si trovi l'autofunzione relativa al primo livello eccitato dell'energia e il valor medio della variabile dinamica P in tale stato [2pt].