Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 13.02.23

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2021/2022

Esercizio 1

1. Dare la definizione di funzionale. [1pt]
2. Definire la variazione di un funzionale. [1pt]
3. Dato il funzionale $F[u] = u(0)^2$, calcolare la sua variazione e dire su che funzioni essa si annulla. [2pt]

Si consideri un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, con coordinata libera q.

3. Scrivere il funzionale azione S. [1pt]
4. Calcolare la variazione δS del funzionale azione, scrivendo i vari passaggi. [2pt]
5. Si enunci e si dimostri il "Principio di Hamilton". [3pt]
6. Si usi il principio di Hamilton per dimostrare che "Lagrangiane che differiscono per una derivata totale sono equivalenti". [2pt]
7. *Facoltativo: Si usi il principio di Hamilton per dimostrare la proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate. [1pt]*

Esercizio 2

Una particella tridimensionale di massa m si muove nello spazio soggetta a un potenziale dato da

$$V(x, y, z) = \frac{\alpha z^2 e^{-\frac{2z}{a}}}{4a^2 m} - \frac{\alpha z e^{-\frac{z}{a}}}{m\sqrt{x^2 + y^2}} \,,$$

dove α ed a sono dei parametri.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando le coordinate cartesiane. Il sistema ammette una simmetria continua? Se sì, quale? [1pt].
2. Scrivere la Lagrangiana in coordinate cilindriche (r, θ, z) e derivare le corrispondenti equazioni di Lagrange [2pt].
3. Dire qual è la coordinata ciclica e la corrispondente costante del moto, spiegando che relazione ha con la simmetria del punto 1. [1pt]
4. Trovare la Lagrangiana ridotta del sistema, utilizzando la presenza della coordinata ciclica [2pt].
5. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema descritto dalla Lagrangiana ridotta. [2pt].

6. Discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate, usando il fatto che l'Hessiano del potenziale efficace è [2pt]

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{2z}{a}}\left(\alpha r\left(a^2-4az+2z^2\right)+2\alpha a^2 e^{z/a}(2a-z)\right)}{2a^4 mr} & \frac{\alpha e^{-\frac{z}{a}}(a-z)}{amr^2} \\ \frac{\alpha e^{-\frac{z}{a}}(a-z)}{amr^2} & \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2} \end{pmatrix} .$$

7. Calcolare le frequenza delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili del sistema ridotto [1pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in presenza del seguente potenziale

$$V(x) \;=\; \begin{cases} V_0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} ,$$

con $V_0 > 0$. Si consideri il caso in cui l'energia E è tale che $E > V_0$.

1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle due regioni a potenziale costante [1pt].

2. Si determini la soluzione totale, imponendo le opportune condizioni di raccordo e richiedendo che la particella arrivi da sinistra [3pt].

3. Le soluzioni sono stati fisici del sistema? In caso contrario, scrivere una generica soluzione dell'equazione di Schrödinger per questo sistema che sia uno stato fisico [1pt].

4. Calcolare i coefficienti di trasmissione e riflessione in funzione di E e V_0 [2pt].