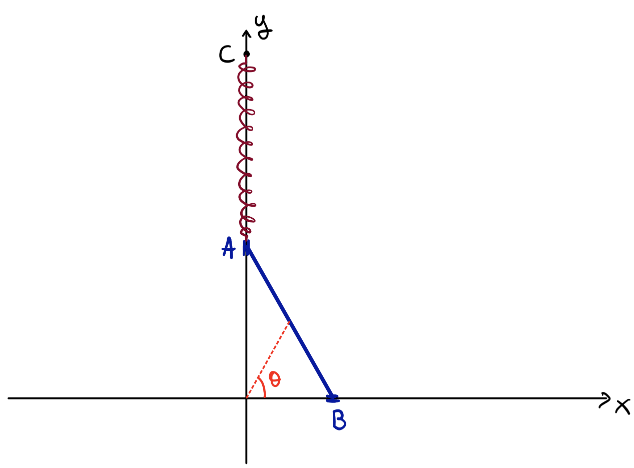
Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 05.09.23

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2022/2023

Esercizio 1

1. Si definisca cosa si intende per *costante del moto* in un sistema Lagrangiano. [2pt]
2. Si enunci e si dimostri il teorema di Nöther, giustificando tutti i passaggi della dimostrazione [4pt].
3. Scrivere la Lagrangiana in *coordinate cartesiane* di un corpo di massa m vincolato a un piano e soggetto a una forza centrale con energia potenziale $V(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$. Si dica qual è la simmetria della Lagrangiana e si *applichi* il teorema di Nöther per scrivere la costante del moto corrispondente. [2pt]
4. Si scriva l'*Hamiltoniana* corrispondente al problema centrale del punto precedente. [1pt]
5. Usando le parentesi di Poisson, si dimostri nel formalismo Hamiltoniano che la variabile dinamica trovata al punto 3 è effettivamente una costante del moto. [2pt]
6. Si dica se il sistema a due gradi di libertà del punto 3 è integrabile e perché. [1pt]
7. *Facoltativo: Si scriva l'Hamiltoniana del punto 4 in coordinate polari e si riduca il problema a un grado di libertà. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi corrispondente al problema ridotto. [1pt].*

Esercizio 2



Un'asta rigida omogenea di massa m e lunghezza ℓ è vincolata a giacere su un piano verticale con un estremo A vincolato a stare sull'asse y e un estremo B vicolato a stare sull'asse x. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla lega l'estremo A al punto C di coordinate $(0, 2\ell)$. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinata libera l'angolo θ in figura. [2pt].

2. Scrivere l'equazione di Lagrange. [1pt].

3. Il sistema ha una simmetria (oltre all'invarianza per traslazioni temporali)? Se sì, c'è una costante del moto associata? [0,5pt].

4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [4pt].

5. Si tracci il grafico delle biforcazioni al variare della combinazione $\frac{mg}{k\ell}$ [1pt].

6. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile [1,5pt].

7. Si ponga $k = \frac{mg}{\ell}$. Si tracci il grafico dell'energia potenziale $V(\theta)$ e il diagramma di fase [1pt].

8. *Facoltativo: Si ponga $k = 0$ e m, ℓ arbitrari. Si introduca una forza costante F che agisce su B in direzione parallela all'asse x e verso negativo. Si calcoli il punto di equilibrio stabile [1pt].*

Esercizio 3

Si cosideri una particella vincolata su una circonferenza di raggio R e parametrizzata da $\varphi \in [0, 2\pi[$. La sua dinamica è determinata dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{\left(p_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2} \,.$$

1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, trovando autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana $\hat{H}_\theta$ [4pt].

2. Si dica se le autofunzioni di $\hat{H}_\theta$ descrivono stati fisici del problema e perché [1pt].

3. Dato lo stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin\varphi$ al tempo $t = 0$, scrivere il suo evoluto $\psi(\varphi, t)$ al tempo $t \neq 0$ [1pt].

4. Si fissi $\theta = 0$. Si calcoli il valor medio della variabile dinamica $\tan(\varphi)$ nello stato fondamentale [1pt].