

Esame di Programmazione Informatica

23 febbraio 2024

Esercizio 1 (18/30)

Data la seguente funzione:

$$f(x) = e^{cx} (A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x))$$

essa può essere rappresentata in MATLAB dal vettore $\mathbf{f}$ dei 4 coefficienti:

$$\mathbf{f} = [c, \omega, A, B]$$

La derivata prima di $f(x)$ è:

$$f'(x) = e^{cx} ((cA - \omega B) \sin(\omega x) + (cB + \omega A) \cos(\omega x))$$

che è dello stesso tipo di f (ossia un'esponenziale che moltiplica una combinazione lineare di $\sin(\omega x)$ e $\cos(\omega x)$) e quindi può anch'essa essere rappresentata in MATLAB dal vettore $\mathbf{D_f}$ dei relativi coefficienti:

$$\mathbf{D_f} = [c, \omega, cA - \omega B, cB + \omega A]$$

Scrivere una prima funzione `derivata` che prenda come argomento in ingresso il vettore $\mathbf{f}$, che rappresenta quindi $f(x)$, e restituisca come argomento in uscita il vettore $\mathbf{D_f}$, che rappresenta quindi $f'(x)$.

Considerato poi che la derivata k -esima di una funzione si ottiene applicando k volte la derivata prima, scrivere una seconda funzione `derivata_k` che prenda come argomenti in ingresso:

- il vettore $\mathbf{f}$ (che rappresenta ancora $f(x)$)
- un intero $k \geq 0$

e, richiamando al suo interno la precedente funzione `derivata`, restituisca come argomento in uscita il vettore $\mathbf{Dk_f}$ relativo alla derivata k -esima di $f(x)$.

Mostrare poi come utilizzare la funzione `derivata_k` per calcolare il vettore dei 4 coefficienti della derivata terza della funzione $f(x) = e^{2x} (\sin(x) + 2 \cos(x))$.

Soluzione: per la prima funzione procediamo a costruire il vettore **D_f** in maniera diretta:

derivata.m

```
function D_f = derivata(f)
    k = f(1) ;
    w = f(2) ;
    A = f(3) ;
    B = f(4) ;
    D_f = [k, w, k*A-w*B, k*B+w*A] ;
end
```

Per la seconda funzione utilizziamo un ciclo **for** che ripete k volte l'applicazione della derivata prima, ottenuta richiamando la precedente funzione **derivata**. Prima del ciclo **for** inizializziamo l'output **Dk_f** pari all'input **f** in modo da operare ripetutamente sull'output **Dk_f** nel ciclo **for**:

derivata_k.m

```
function Dk_f = derivata_k(f, k)
    Dk_f = f ;
    for i = 1 : k
        Dk_f = derivata(Dk_f) ;
    end
end
```

Utilizzo per il calcolo della derivata terza di $f(x) = e^{2x}(\sin(x) + 2\cos(x))$, ossia $k = 3$ e $\mathbf{f} = [c = 2, \omega = 1, A = 1, B = 2]$:

```
f = [2, 1, 1, 2] ;
Dk_f = derivata_k(f, 3)
```

ottenendo i coefficienti $[2, 1, -20, 15]$, ossia $f^{(3)}(x) = e^{2x}(-20\sin(x) + 15\cos(x))$.

Esercizio 2 (15/30)

Scrivere una funzione MATLAB che prenda come argomento in ingresso un intero $N > 0$ e restituisca come argomento in uscita la seguente somma, troncata al termine N -esimo:

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Mostrare poi come utilizzare la precedente funzione per calcolare le somme troncate per $N = 100, 1000, 10000$. Quanto valgono le differenze tra i valori che si ottengono e $\pi/4$?

Soluzione: Possiamo procedere con un ciclo `for` nel quale i segni alternati dei numeratori li otteniamo dalle potenze di (-1) , mentre i denominatori sono numeri dispari:

```
                                somme_troncate.m
function SN = somme_troncate(N)
    SN = 0 ;
    for i = 1:N
        numeratore    = (-1)^(i+1) ;
        denominatore  = 2*i - 1 ;
        SN = SN + numeratore/denominatore ;
    end
end
```

Alternativamente, possiamo utilizzare le operazioni vettoriali ricordandoci di usare le relative operazioni elemento per elemento per l'elevamento a potenza `.^` e per la divisione `./`. Sfruttiamo quindi la funzione `sum` per sommare tutti i termini del vettore risultante:

```
                                somme_troncate_vett.m
function SN = somme_troncate_vett(N)
    i = 1:N ;
    numeratori    = (-1).^ (i+1) ;
    denominatori  = 2*i - 1 ;
    SN = sum( numeratori ./ denominatori ) ;
end
```

Utilizzo nel caso di $N = 100, 1000, 10000$ con differenze rispetto a $\pi/4$:

```
for N = [100,1000,10000]
    pi/4 - somme_troncate(N)
end
```

ottenendo delle differenze via via decrescenti di valore $2.5 \cdot 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-5}$; infatti S è la serie di Leibniz per calcolare π .