

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 14/2/2023

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x - y^2}}{x} \ln \left(1 - \frac{4y^2}{x^2} \right).$$

- (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(1, 0), (2, 1), (0, 0)$.
(c) (2 punti) Cosa significa affermare secondo la definizione che la funzione f ammette almeno un punto di massimo relativo? Si dica se è effettivamente così, giustificando la risposta.
2. (a) (2 punti) Si studi il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}.$$

3. (a) (3 punti) Si dimostri che ogni successione convergente in $\mathbb{R}$ è di Cauchy.
(b) (2 punti) Sia data una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con somma parziale $s_n = 3 - n2^{-n}$. Si determinino a_n e la somma della serie.
(c) (1 punto) Si determini il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.
4. (a) (3 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ la curva definita dall'equazione

$$xy = \ln \left(\frac{x}{y} \right)$$

è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$. Si determini inoltre se in un intorno di tale punto la curva rivolga la concavità verso l'alto o verso il basso.

5. (a) (2 punti) Si calcoli l'integrale di Riemann di

$$f(x, y) = xy$$

sulla regione del piano delimitata dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dalla parabola di equazione $y^2 = 2x + 6$.

6. (a) (3 punti) Si determini il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y$$

sul vincolo di equazione $x^2 + y^2 = 4$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura.

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$