

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 31/5/2023

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (4 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \ln(x - y).$$

- (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(1, 0), (2, 2), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
(c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto, giustificando la risposta.
(d) (3 punti) L'insieme D è convesso? E' aperto? E' chiuso? Si giustificino le risposte.
(e) (1 punto) Si dica se l'insieme di livello zero di f è chiuso, giustificando la risposta.
2. (a) (2 punti) Si studi la continuità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. (a) (1 punto) Si studi il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$.
(b) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$, $x \in [0, 2\pi]$.
i. (2 punti) Si dimostri che tale serie converge uniformemente ad una funzione f continua.
ii. (2 punti) Si calcoli $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.
4. (a) (2 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(2, 2)$ la curva definita dall'equazione

$$x - y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(2, 2)$.

5. (a) (2 punti) Sia $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ e sia $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y \geq x^2 \\ y & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

Si calcoli l'integrale di Riemann $\iint_Q f$.

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 - y^3 + 3y^2$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 10\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = 2x^3 + 4y^2 - 12xy.$$