

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 14/6/2023

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)} \sqrt{x^2 - y^2}.$$

- (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
(c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto, giustificando la risposta.
(d) (2 punti) L'insieme D è aperto? E' chiuso? Si giustificino le risposte.
(e) (2 punti) La frontiera di D è un insieme convesso? E' un insieme chiuso? Si giustificino le risposte.
(f) (1 punto) La frontiera dell'insieme di livello zero di f è un insieme chiuso? Si giustifichi la risposta.
2. (a) (1 punto) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Si dia la definizione di differenziabilità in $(x_0, y_0) \in A$ per f .
3. (a) (2 punti) Sia, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n$, $a_n \leq b_n \leq c_n$ ed inoltre $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 7$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = 10$. Si dimostri che allora $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ converge.
(b) (2 punti) Sia data la successione di funzioni definite su $[0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ \frac{2}{n} - 2x & \text{se } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di tale successione di funzioni.

4. (a) (2 punti) Si consideri la famiglia di curve $x^2 y^2 - \alpha \ln(x) - \ln(1 - y) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e si verifichi che il punto $(1, 0)$ appartiene ad ognuna di queste curve (cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}$). Si dimostri poi che in un intorno di $(1, 0)$ ognuna di queste curve è grafico di una funzione $y = g_\alpha(x)$ e si scriva l'equazione della retta tangente in $(1, 0)$ alla generica curva di parametro α , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
5. (a) (2 punti) Sia E la regione del piano compresa tra le rette di equazione $y = mx$, $y = -mx$, $y = m$, con $m > 0$. Si determini per quale valore del parametro m si ha

$$\iint_E y \, dx dy = 3/2.$$

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 - xy - y^2$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 4, |y| \leq 4\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 + xy^2 - x^2 - 2x.$$