Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 29/6/2023

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione
$$f(x,y) = \frac{\ln(y^2)}{x^2+y^2-4}\sqrt{y-x}.$$
   (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(0,3)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2,0)$.
   (c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo e minimo relativi, giustificando la risposta.
   (d) (3 punti) L'insieme D è aperto? E' chiuso? E' convesso? Si giustifichino le risposte.
   (e) (1 punto) La frontiera di D è un insieme convesso? Si giustifichi la risposta.
   (f) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme di livello zero di f.

2. (a) (1 punto) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Si dia la definizione di derivata direzionale di f in $(x_0, y_0) \in A$, rispetto ad un versore $v \in \mathbb{R}^2$.

3. (a) (2 punti) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che se $(a_n)_n$ diverge a $+\infty$, allora anche $(b_n)_n$ diverge a $+\infty$.
   (b) (2 punti) Si studi il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-2}{n^2+2n}.$$

4. (a) (2 punti) Si consideri la famiglia di curve $\alpha x+1-\ln(x+y)=0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e si verifichi che il punto $(0,e)$ appartiene ad ognuna di queste curve (cioè $\forall\alpha \in \mathbb{R}$).
   Si dimostri poi che in un intorno di $(0,e)$ ognuna di queste curve è grafico di una funzione $y = g_\alpha(x)$ e si scriva l'equazione della retta tangente in $(0,e)$ alla generica curva di parametro α, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Per quale valore di α tale retta tangente è parallela all'asse delle x?

5. (a) (2 punti) Sia E la regione del piano compresa tra le curve di equazione $y = 4x^2+2$, $y = -x^2+7$. Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $f(x,y) = xy$ su E.

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione
$$f(x,y) = y^4 - \frac{1}{2}y^2 - x^2$$
   su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.
   (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:
$$f(x,y) = 2xy - 8x^4 - \frac{1}{4}y^2$$
.