Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 7/9/2023

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x,y) = \frac{\ln(x+y)\ln(x)}{y-x^2}.$$

   (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(0,\pi)$, $(\sqrt{2},2)$, $(1,1)$.

   (c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto e di minimo assoluto, giustificando la risposta.

   (d) (2 punti) L'insieme D è aperto? E' convesso? Si giustifichino le risposte.

   (e) (1 punto) La frontiera di D è un insieme convesso? Si giustifichi la risposta.

   (f) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme di livello zero di f.

2. (a) (1 punto) Sia dia l'enunciato del Teorema di Schwarz.

3. (a) (3 punti) Si consideri la successione di termini $a_n = -\frac{n}{n^2+25}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e sia $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ l'insieme dei suoi termini.

   Si determini, giustificando la risposta, se la successione è monotona. Sempre giustificando la risposta, si determinino $\sup E$ e $\inf E$.

   (b) (2 punti) Si dimostri che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{n}{2}x^2}$$

   converge uniformemente nell'intervallo $]0,+\infty[$.

4. (a) (2 punti) Si consideri la famiglia di curve $\alpha \sin^3(x-y) - 3\cos(x-y) + 3y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e si verifichi che il punto $(1,1)$ appartiene ad ognuna di queste curve (cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}$).

   Si dimostri poi che in un intorno di $(1,1)$ ognuna di queste curve è grafico di una funzione $y = g_\alpha(x)$ e si scriva l'equazione della retta tangente in $(1,1)$ alla generica curva di parametro α, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di α tale retta tangente è parallela all'asse delle x?

5. (a) (2 punti) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0\}$. Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ su E.

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 6y + 4$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.

(b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 8xy$$