

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 23/1/2024

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x-y}-1}.$$

- (b) (3 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.
- (c) (1 punto) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto e di minimo assoluto, giustificando la risposta.
- (d) (4 punti) L'insieme D è aperto? E' chiuso? E' convesso? E' connesso per segmenti (poligonali)? Si giustifichino le risposte.
2. (a) (1 punto) Sia dia l'enunciato del Teorema del Valor Medio nel caso di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
3. (a) (3 punti) Si dimostri che, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \neq 0$, allora $\exists k \in \mathbb{R}, k > 0$, e $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n| \geq k \ \forall n \geq \bar{n}$.
- (b) (1 punto) Si studi il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2}}$.
- (c) (2 punti) Si dimostri che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \sin x \right)^n$$

converge uniformemente nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. (a) (2 punti) Si sviluppi con la formula di Taylor con il resto di Peano di ordine 2 la funzione $f(x, y) = x\sqrt{y}$ in un intorno di $(1, 4)$.
5. (a) (2 punti) Sia E il parallelogramma di vertici $(1, 2), (3, 4), (4, 3), (6, 5)$. Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $f(x, y) = x$ su E .
6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^{2x^2-y^2}$$

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = 2xy - 4x^4 - \frac{1}{4}y^4$$