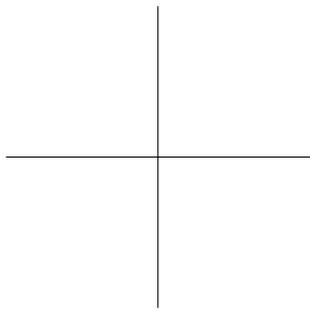
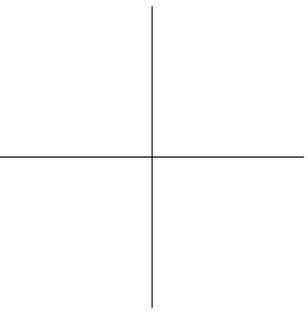
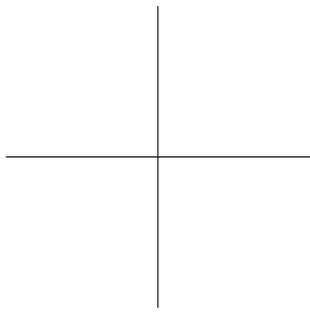
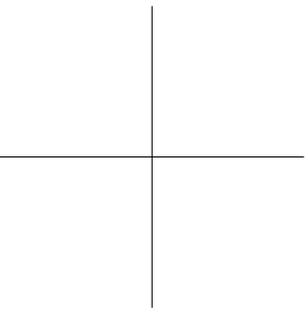


*Estratto da*

**FONDAMENTI DI  
TERMOFLUIDODINAMICA  
COMPUTAZIONALE**

**a cura di G. Comini, G. Croce ed E. Nobile**

5 maggio 2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni della convezione</b>	
	<b>G. Comini</b>	<b>1</b>
1.1	INTRODUZIONE . . . . .	1
1.2	CONSERVAZIONE DELLA MASSA . . . . .	3
1.3	CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA . . . . .	6
1.3.1	Formulazioni alternative dell'equazione dell'energia . . . . .	9
1.3.2	Equazione dell'energia ed analisi numeriche . . . . .	10
1.3.3	Condizioni al contorno ed iniziali per l'equazione dell'energia	11
1.3.4	Coefficiente di convezione . . . . .	12
1.4	CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO . . . . .	13
1.4.1	Applicazione al moto dei fluidi . . . . .	14
1.4.2	Forze agenti su un volume fluido . . . . .	17
1.4.3	Equazioni di Navier . . . . .	18
1.4.4	Leggi di Stokes . . . . .	19
1.4.5	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	19
1.4.6	Condizioni al contorno ed iniziali per le equazioni di Navier- Stokes . . . . .	23
1.4.7	Convezione forzata, naturale e mista . . . . .	24
1.5	METODOLOGIE DI SOLUZIONE NUMERICA . . . . .	25
1.5.1	Equazioni del moto in termini di funzione di corrente e vorticità	26
1.5.2	Condizioni al contorno per funzione di corrente e vorticità . .	28
1.5.3	Significato fisico della pressione . . . . .	28
1.6	SOLUZIONI IN VARIABILI PRIMITIVE . . . . .	29
1.6.1	Equazione di Poisson per la pressione . . . . .	30
1.7	ALGORITMI PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI . . . . .	31
1.7.1	Equazioni del campo termofluidodinamico . . . . .	32
1.7.2	Condizioni al contorno per la soluzione numerica . . . . .	35
1.7.3	Significato fisico delle pressioni di stima e di correzione . . .	37
1.8	CONVEZIONE TURBOLENTA . . . . .	38
1.9	SOMMARIO . . . . .	40

## INDICE

---

1.10	APPENDICE . . . . .	41
1.10.1	Convenzioni e regole . . . . .	42
1.10.2	Operatore nabla . . . . .	43
1.11	NOMENCLATURA . . . . .	49
1.12	BIBLIOGRAFIA . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Convezione nei fluidi incompressibili: analisi ai volumi finiti</b>	
	<b>E. Nobile</b>	<b>53</b>
2.1	INTRODUZIONE . . . . .	53
2.2	L'EQUAZIONE DI TRASPORTO . . . . .	54
2.3	L'IDEA DI BASE . . . . .	55
2.3.1	La griglia di calcolo . . . . .	56
2.3.2	Griglie Cartesiane per il metodo dei volumi finiti . . . . .	59
2.4	DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE . . . . .	60
2.4.1	Integrali di superficie . . . . .	60
2.4.2	Integrali di volume . . . . .	63
2.4.3	Tecniche di interpolazione . . . . .	65
2.4.4	Correzione differita . . . . .	72
2.4.5	Equazione algebrica finale . . . . .	73
2.4.6	Condizioni al contorno . . . . .	74
2.5	INTEGRAZIONE TEMPORALE . . . . .	76
2.6	METODI DI SOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI . . . . .	82
2.6.1	Metodi diretti . . . . .	84
2.6.2	Metodi iterativi . . . . .	88
2.7	SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI . . . . .	94
2.7.1	Disposizione delle variabili sulla griglia . . . . .	95
2.8	PROCEDURA AI VOLUMI FINITI . . . . .	98
2.8.1	Metodi segregati . . . . .	98
2.8.2	Metodi accoppiati . . . . .	101
2.9	GEOMETRIE COMPLESSE: GRIGLIE NON STRUTTURATE . . . . .	104
2.9.1	Scelta delle componenti di velocità . . . . .	106
2.9.2	Disposizione delle variabili sulla griglia . . . . .	106
2.9.3	Quantità geometriche . . . . .	107
2.9.4	Distribuzione spaziale delle variabili . . . . .	111
2.9.5	Integrali di superficie e di volume . . . . .	112
2.9.6	Calcolo del gradiente . . . . .	113
2.9.7	Termine transitorio . . . . .	119

2.9.8	Termine sorgente . . . . .	119
2.9.9	Flusso convettivo . . . . .	119
2.9.10	Flusso diffusivo . . . . .	121
2.9.11	Griglie ibride . . . . .	123
2.9.12	Condizioni iniziali ed al contorno . . . . .	125
2.10	SOMMARIO . . . . .	126
2.11	NOMENCLATURA . . . . .	128
2.12	BIBLIOGRAFIA . . . . .	130
<b>3</b>	<b>Convezione nei fluidi incomprimibili: analisi agli elementi finiti</b>	
	<b>C. Nonino</b>	<b>135</b>
3.1	INTRODUZIONE . . . . .	135
3.2	CONCETTI DI BASE . . . . .	136
3.3	METODO DEI RESIDUI PESATI . . . . .	140
3.3.1	Metodo di Galerkin . . . . .	143
3.3.2	“Assembly” . . . . .	147
3.3.3	Discretizzazione del termine advettivo . . . . .	149
3.3.4	“Upwinding” . . . . .	150
3.4	EQUAZIONI PER IL REGIME TRANSITORIO . . . . .	151
3.4.1	Integrazione nel tempo . . . . .	153
3.5	FUNZIONI DI FORMA . . . . .	154
3.6	MAPPATURA DEGLI ELEMENTI . . . . .	160
3.6.1	Trasformazione isoparametrica . . . . .	164
3.7	INTEGRAZIONE NUMERICA . . . . .	169
3.8	ELEMENTI TRIANGOLARI . . . . .	172
3.9	SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI . . . . .	177
3.9.1	Esempio di procedura “equal order” . . . . .	181
3.9.2	Esempio di procedura “unequal order” . . . . .	183
3.10	SOMMARIO . . . . .	186
3.11	APPENDICE . . . . .	187
3.11.1	Introduzione delle condizioni al contorno . . . . .	187
3.11.2	Matrici per alcuni elementi momo- e bidimensionali . . . . .	189
3.12	NOMENCLATURA . . . . .	190
3.13	BIBLIOGRAFIA . . . . .	191
<b>4</b>	<b>La turbolenza e i suoi modelli</b>	
	<b>M. Ciofalo</b>	<b>195</b>
4.1	INTRODUZIONE . . . . .	195
4.2	CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA . . . . .	197
4.2.1	Decomposizione e fluttuazioni . . . . .	197

## INDICE

---

4.2.2	La cascata di Kolmogorov . . . . .	199
4.2.3	Spettri della turbolenza . . . . .	202
4.2.4	Strutture coerenti . . . . .	205
4.2.5	Turbolenza bidimensionale . . . . .	206
4.2.6	Turbolenza e <i>attrattori strani</i> . . . . .	208
4.3	SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA . . . . .	210
4.3.1	Requisiti di risoluzione per il moto turbolento di Poiseuille . . . . .	211
4.3.2	Un esempio di simulazione diretta della turbolenza . . . . .	217
4.4	LARGE EDDY SIMULATION . . . . .	219
4.4.1	Aspetti generali: filtraggio e decomposizione . . . . .	219
4.4.2	Filtraggio delle equazioni di governo . . . . .	221
4.4.3	Il modello <i>sub-grid</i> di Smagorinsky . . . . .	224
4.4.4	Il modello dinamico . . . . .	227
4.4.5	Altri modelli <i>sub-grid</i> . . . . .	230
4.4.6	Condizioni al contorno e iniziali per la LES . . . . .	232
4.5	MODELLI RANS . . . . .	234
4.5.1	Aspetti generali . . . . .	234
4.5.2	Modelli a viscosità turbolenta . . . . .	235
4.5.3	Il modello $k - \varepsilon$ e le sue varianti . . . . .	239
4.5.4	Condizioni al contorno e funzioni di parete . . . . .	242
4.5.5	Modelli $k - \varepsilon$ per basso numero di Reynolds . . . . .	246
4.5.6	Il modello $k - \omega$ . . . . .	249
4.5.7	Modelli algebrici degli sforzi e flussi di Reynolds . . . . .	253
4.5.8	Modelli differenziali degli sforzi e flussi di Reynolds . . . . .	254
4.6	TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA . . . . .	260
4.6.1	Aspetti fisici e descrizione matematica . . . . .	260
4.6.2	Contributo della <i>buoyancy</i> ai bilanci degli sforzi di Reynolds . . . . .	261
4.6.3	Contributo della <i>buoyancy</i> ai bilanci dell'energia cinetica turbolenta . . . . .	263
4.6.4	Contributo della <i>buoyancy</i> ai bilanci di dissipazione . . . . .	265
4.6.5	Esempi di convezione naturale e mista turbolenta . . . . .	268
4.6.6	Turbolenza nello strato limite atmosferico . . . . .	271
4.7	CONCLUSIONI . . . . .	273
4.8	NOMENCLATURA . . . . .	275
4.9	BIBLIOGRAFIA . . . . .	278

**Indice analitico**

**289**

## Capitolo 1

# Equazioni della convezione

G. Comini

### 1.1 INTRODUZIONE

Le equazioni differenziali alle derivate parziali che governano i processi di convezione nei fluidi sono ricavate dai principi generali di conservazione formulati, di solito, per sistemi aperti in ipotesi abbastanza semplificative. In particolare l'equazione di conservazione dell'energia, che governa la distribuzione delle temperature, è basata sul primo principio della termodinamica, mentre l'equazione di continuità e le equazioni di Navier-Stokes, che governano la distribuzione delle velocità, sono basate, rispettivamente, sul principio di conservazione della massa e sulla seconda legge di Newton (interpretata come principio di conservazione della quantità di moto).

Per quanto riguarda la determinazione del campo termico si può osservare che, nella formulazione usuale dell'equazione dell'energia, vengono trascurate le variazioni di energia cinetica e potenziale, il lavoro scambiato e la conversione in calore di energie chimiche, elettriche o nucleari. In tal modo, l'espressione differenziale risultante comprende i soli termini di variazione temporale, trasporto conduttivo (legato alle interazioni molecolari) e trasporto avvevivo (legato al movimento delle particelle fluide). A causa della presenza delle componenti della velocità come coefficienti del termine avvevivo, tuttavia, la conoscenza del campo di moto è un prerequisito per la determinazione del campo termico.

Per quanto riguarda la determinazione del campo di moto, si può osservare che l'espressione differenziale dell'equazione di continuità comprende i soli termini di variazione temporale e trasporto avvevivo (in quanto i micromovimenti delle molecole hanno risultante nulla, e la generazione locale, sia positiva di tipo "sorgente" sia negativa di tipo "pozzo", è incompatibile con il principio di conservazione della massa). L'espressione differenziale delle equazioni di Navier-Stokes, invece, comprende

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

termini “tipo generazione”, positivi o negativi, legati al gradiente di pressione ed alle forze di massa, oltre ai termini di trasporto diffusivo (legati alle interazioni molecolari) e trasporto avvevativo (legati, come si è detto, al movimento delle particelle fluide).

In questo capitolo si limiterà l’indagine ai soli fluidi a comportamento incomprimibile, rimandando al Capitolo 5 per la trattazione dei fluidi a comportamento comprimibile. Nell’ipotesi di incomprimibilità, la soluzione numerica delle equazioni del moto è resa difficile dall’assenza di un’equazione in cui compaia la pressione come variabile principale. Ciò costringe ad interrogarsi sul ruolo svolto dalla pressione durante il moto. Teoria ed esperienza dimostrano che la pressione, istante per istante, assume valori tali da garantire il rispetto della continuità. Pertanto, nelle soluzioni in variabili primitive (cioè scritte in termini di pressione e componenti della velocità), è opportuno trasformare, in qualche modo, l’equazione di continuità in un’equazione per la pressione. Lo scopo è determinare una distribuzione delle pressioni che, utilizzata nelle equazioni di Navier-Stokes, porti ad un campo di moto che rispetta la continuità.

Il rispetto della continuità, tuttavia, può essere ottenuto anche attraverso strategie alternative come, ad esempio, la formulazione delle equazioni del moto in termini di funzione di corrente e vorticità. In tale formulazione, l’assenza della pressione è giustificata dall’impiego della funzione di corrente che, di per sé, assicura il rispetto della continuità (e dimostra implicitamente come la pressione, non necessaria in presenza di un campo di velocità “a potenziale”, sia legata alla sola componente irrotazionale del campo di moto). Nel contempo, l’assenza della pressione nella residua equazione differenziale per la vorticità dimostra come la componente rotazionale del campo di moto (misurata, appunto, dalla vorticità) dipenda esclusivamente dalle forze di attrito. Sfortunatamente, la funzione di corrente esiste solo in due dimensioni e, quindi, la formulazione in termini di funzione di corrente e vorticità ha un’importanza più concettuale che pratica. I problemi tridimensionali, infatti, devono essere risolti nell’ambito delle variabili primitive ed, in tale contesto, non sorprende il fatto che il successo dei codici commerciali sia legato, essenzialmente, all’efficienza delle procedure seguite per determinare distribuzioni di pressione che conducano al rispetto della continuità.

Tradizionalmente, le strategie di soluzione numerica delle equazioni della convezione, scritte in variabili primitive, sono riferite al regime di moto laminare, per il quale non s’incontrano particolari difficoltà nella stima delle diffusività termiche e cinematiche. Le stesse strategie di soluzione numerica e le stesse equazioni del campo termofluidodinamico sono, in linea di principio, utilizzabili direttamente anche per il regime di moto turbolento. Tuttavia, come si vedrà meglio nel seguito, le soluzioni “dirette” richiedono una griglia spazio-temporale alquanto spinta, e quindi

l'impiego di reticoli molto fitti e di un numero molto grande d'intervalli temporali. Di conseguenza, le soluzioni di tipo diretto non sono ancora compatibili con le applicazioni normali della termofluidodinamica computazionale. Infatti, nella pratica attuale si preferisce non utilizzare le equazioni differenziali originali, ma fare ricorso ad equazioni mediate su intervalli di tempo abbastanza lunghi, o porzioni di spazio abbastanza grandi. In questo modo si "filtrano" le piccole oscillazioni del campo termofluidodinamico che, oltre ad avere valor medio nullo, si sviluppano su brevi intervalli di tempo e riguardano zone limitate di spazio.

Con le equazioni mediate la soluzione numerica di problemi pratici diventa possibile, anche con le definizioni spazio-temporali ridotte compatibili con le attuali risorse di calcolo. Nelle equazioni mediate, tuttavia, compaiono sforzi e flussi termici specifici "turbolenti" che derivano, rispettivamente, dagli scambi di quantità di moto e d'energia legati alle piccole fluttuazioni di velocità. Da qui la necessità di "chiudere" il procedimento di calcolo, valutando sforzi e flussi termici specifici turbolenti per mezzo di "modelli" più o meno sofisticati. In questo capitolo ci si limiterà ad accennare ai modelli di turbolenza basati sull'introduzione di diffusività termiche e cinematiche turbolente, rimandando al Capitolo 4 per un vero e proprio esame dei modelli stessi. Tuttavia, può essere interessante osservare sin d'ora che il modello di turbolenza di maggior successo, cioè il modello  $(k, \epsilon)$ , calcola diffusività termiche e cinematiche turbolente mediante espressioni algebriche in cui compaiono, appunto, l'energia cinetica turbolenta  $k$  e la dissipazione d'energia cinetica turbolenta  $\epsilon$ . A loro volta, le distribuzioni di  $k$  ed  $\epsilon$  sono governate da equazioni di bilancio in cui sono facilmente esplicitabili i termini di variazione temporale, trasporto avvevativo, trasporto diffusivo e generazione, positiva o negativa.

## 1.2 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Per un sistema aperto con più entrate ed uscite, del tipo rappresentato in Fig. 1.1, il principio di conservazione della massa può essere espresso in forma di "bilancio contabile"

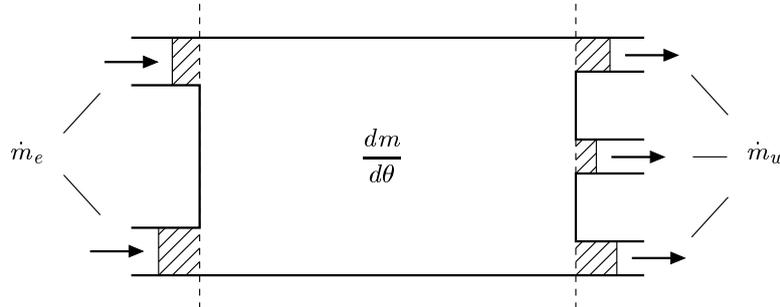
$$\text{variazione} = \text{entrate} - \text{uscite}$$

ovvero in forma analitica

$$\frac{dm}{d\theta} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_u \quad (1.1)$$

In entrambi i casi la "variazione" della massa  $m$ , al primo membro, viene espressa, al secondo membro, come differenza tra portate massiche "entranti"  $\dot{m}_e$  ed "uscanti"  $\dot{m}_u$ .

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE



**Figura 1.1:** Conservazione della massa: macrobilancio.

Con riferimento al generico dominio fluido di volume  $V$ , rappresentato in Fig. 1.2, la variazione di massa può essere valutata come

$$\frac{dm}{d\theta} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial \theta} dV \quad (1.2)$$

La differenza tra portate di massa entranti ed uscenti, può essere calcolata integrando la distribuzione delle velocità sull'intera superficie esterna del dominio  $A = A_e + A_u$ , ed applicando successivamente il teorema di Gauss

$$\sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_u = - \int_A \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) dV \quad (1.3)$$

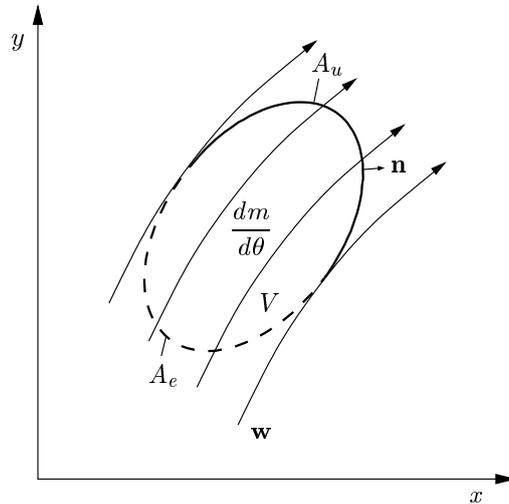
Si noti che il segno negativo al secondo membro della Eq. (1.3) tiene conto dell'orientamento verso l'esterno della normale  $\mathbf{n}$ . In base alle (1.2) e (1.3), l'Eq. (1.1) può essere scritta nella forma

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) \right] dV = 0 \quad (1.4)$$

dopo aver portato al primo membro tutti i termini. Poiché nella (1.4) il volume di integrazione è arbitrario deve, necessariamente, essere anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (1.5)$$

dove la relazione differenziale esprime la conservazione locale della massa ed è comunemente definita "equazione di continuità". (Il nome deriva dal fatto che le "discontinuità", tipo "pozzi" o "sorgenti" di fluido, non sono compatibili con la conservazione locale della massa).



**Figura 1.2:** Conservazione della massa: dominio di riferimento.

Nel caso stazionario, dall'Eq. (1.5) si ricava

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (1.6)$$

mentre, se la densità non varia, si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (1.7)$$

sia dalla (1.5) sia dalla (1.6). Si noti che l'Eq. (1.7) ha un campo di applicazione più ampio di quello che potrebbe sembrare a prima vista. Nella maggior parte delle applicazioni di interesse per la fluidodinamica, infatti, non solo i liquidi ma anche i gas si comportano da “fluidi incompressibili”, in quanto le velocità sono relativamente basse e, di conseguenza, le variazioni di pressione e densità, legate al campo di moto, non sono tanto forti da costringere all'utilizzo della (1.5) o della (1.6) al posto della (1.7). Nella termotecnica, la (1.7) viene usata quasi sempre nell'analisi dei processi di convezione forzata (nei quali le variazioni di densità con la temperatura non sono, generalmente, tali da condizionare il campo di moto). Nell'analisi dei processi di convezione naturale, per contro, le variazioni di densità con la temperatura inducono il campo di moto e, di conseguenza, non possono venir trascurate. Nella convezione naturale, tuttavia, è quasi sempre lecito fare ricorso all'ipotesi di Boussinesq (discussa in dettaglio nel Paragrafo 1.4.5), secondo la quale basta tener conto delle variazioni di densità con la temperatura nel termine di galleggiamento delle equazioni del moto.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

A conclusione del paragrafo, è utile ricordare che il prodotto scalare, indicato con il puntino nell'Eq. (1.7), ha per risultato la funzione scalare rappresentativa della divergenza del campo di velocità. In coordinate Cartesiane bidimensionali, essa può venire espressa come

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.8)$$

dove  $u$  e  $v$  sono le componenti della velocità, rispettivamente secondo l'asse  $x$  e l'asse  $y$ . Per completezza si può anche notare che, come illustrato in Appendice, la rappresentazione matriciale del prodotto scalare al primo membro è

$$\nabla \cdot \mathbf{w} \equiv \nabla^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.9)$$

in quanto il risultato viene ottenuto moltiplicando, in base alla regola “righe per colonne”, la trasposta del primo vettore per il secondo.

### 1.3 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Il principio di conservazione dell'energia per un sistema aperto con più entrate ed uscite, del tipo rappresentato in Fig. 1.3, può essere espresso nella forma “contabile” generale

$$\text{variazione} = \text{entrate} - \text{uscite} + \text{fornitura}$$

intendendo con “entrate” ed “uscite” i flussi di energia entranti ed uscenti, e con “fornitura” gli scambi di lavoro e calore, nonché la conversione in calore di energie chimiche, elettriche o nucleari. Se poi, come spesso accade nei sistema aperti di interesse pratico, risultano trascurabili

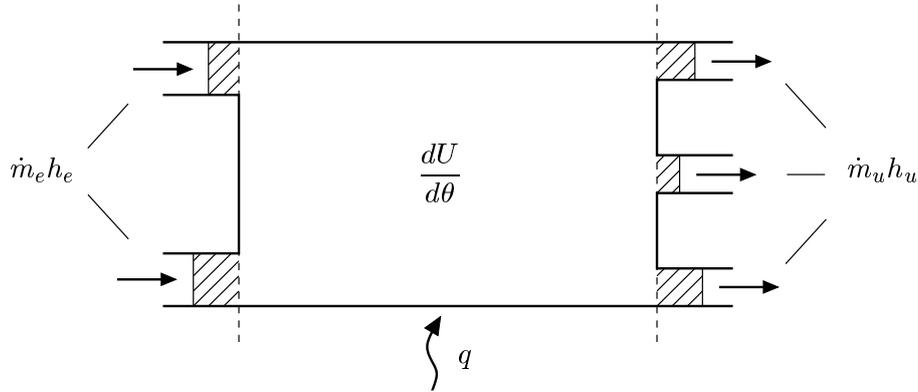
- le variazioni di energia cinetica e potenziale tra entrata ed uscita,
- il lavoro totale scambiato con l'esterno e
- la conversione in calore di energie chimiche, elettriche o nucleari

la forma analitica del bilancio

$$\frac{dU}{d\theta} = \sum \dot{m}_e h_e - \sum \dot{m}_u h_u + q \quad (1.10)$$

si semplifica notevolmente. Al primo membro troviamo, infatti, la variazione di energia interna totale  $U$  mentre, al secondo membro, le energie entranti ed uscenti si riducono ai soli flussi entalpici, e la “fornitura” è rappresentata dal solo flusso termico conduttivo fornito  $q$  (positivo se entrante o negativo se uscente).

### 1.3. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA



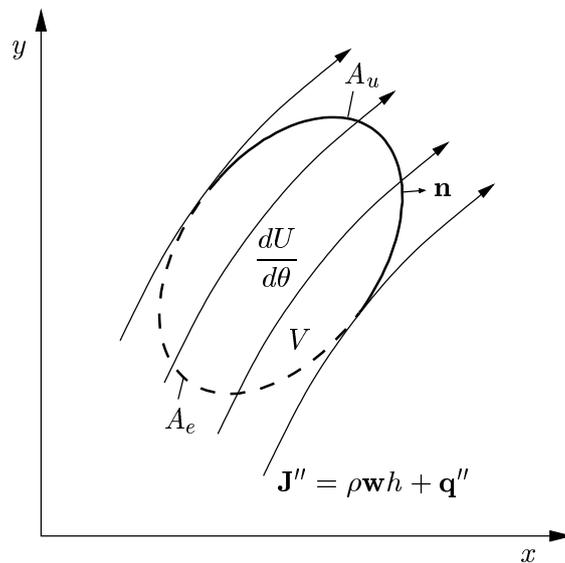
**Figura 1.3:** Conservazione dell'energia: macrobilancio.

Con riferimento al generico dominio fluido di volume  $V$ , rappresentato in Fig. 1.4, la variazione di energia interna al primo membro della (1.10) può essere valutata come

$$\frac{dU}{d\theta} = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \hat{u}) \right] dV = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho c_v t) \right] dV \quad (1.11)$$

in quanto, per la maggior parte dei casi che qui interessano, si può assumere

$$d\hat{u} = c_v dt \quad (1.12)$$



**Figura 1.4:** Conservazione dell'energia: dominio di riferimento.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

ricordando poi, eventualmente, che nei liquidi il calore specifico a volume costante  $c_v$  coincide con il calore specifico a pressione costante  $c_p$  (e si identifica, quindi, con il calore specifico  $c$  del fluido).

Nella valutazione del secondo membro della (1.10), in letteratura si usa introdurre il vettore flusso termico specifico convettivo

$$\mathbf{J}'' = \rho \mathbf{w} h + \mathbf{q}'' = \rho \mathbf{w} h - \lambda \nabla t \quad (1.13)$$

somma dei vettori flusso entalpico convettivo e flusso termico conduttivo. Attese tali definizioni, il secondo membro della (1.10) può essere trasformato integrando la distribuzione di  $\mathbf{J}''$  sull'intera superficie esterna del dominio  $A = A_e + A_u$ , ed applicando successivamente il teorema di Gauss

$$\begin{aligned} \sum \dot{m}_e h_e - \sum \dot{m}_u h_u + q &= - \int_A (\rho \mathbf{w} h + \mathbf{q}'') \cdot \mathbf{n} dA \\ &= - \int_A \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} dA = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}'' dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t - \lambda \nabla t) dV \end{aligned} \quad (1.14)$$

Anche questa volta il segno negativo al secondo membro della Eq. (1.14) tiene conto dell'orientamento verso l'esterno della normale  $\mathbf{n}$ . In base alle (1.11), (1.12) e (1.14), l'Eq. (1.10) può essere scritta nella forma

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho c_v t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t - \lambda \nabla t) \right] dV = 0 \quad (1.15)$$

dopo aver portato al primo membro tutti i termini. Poiché nella (1.15) il volume di integrazione è arbitrario, deve necessariamente essere anche

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho c_v t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t) = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) \quad (1.16)$$

dove la relazione differenziale esprime la conservazione locale dell'energia. In essa si distinguono i termini di variazione temporale e di trasporto convettivo al primo membro, ed il termine di trasporto conduttivo al secondo membro. Nella (1.16) che, come si è osservato, è una forma semplificata, mancano i termini corrispondenti alle variazioni d'energia cinetica e potenziale, al lavoro compiuto dalle forze d'attrito, ed alla conversione in calore di energie chimiche, elettriche o nucleari. Tali termini, tuttavia, compariranno nella forma completa dell'equazione dell'energia illustrata nel Paragrafo 1.3.1.

Si noti che, nei fluidi a comportamento incomprimibile e con calori specifici costanti, risulta anche

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t) = \rho c_p \mathbf{w} \cdot \nabla t + \rho c_p t \nabla \cdot \mathbf{w} = \rho c_p \mathbf{w} \cdot \nabla t \quad (1.17)$$

### 1.3. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Pertanto in tali fluidi la (1.16) può essere scritta nella forma

$$\rho c_v \frac{\partial t}{\partial \theta} + \rho c_p \mathbf{w} \cdot \nabla t = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) \quad (1.18)$$

che, di solito, viene chiamata “non conservativa”. Nel caso di fluidi a comportamento incomprimibile con calori specifici costanti, la rappresentazione “conservativa” (1.16) e quella “non conservativa” (1.18) portano alle stesse soluzioni analitiche. Nelle simulazioni numeriche, invece, forme conservative e non conservative portano, in genere, a risultati diversi poiché, di solito, la rappresentazione numerica della divergenza non è identicamente uguale a zero in tutti i punti di calcolo.

A conclusione del paragrafo è utile ricordare che, anche nelle Eq. (1.16) e (1.18), i puntini tra i vettori indicano prodotti scalari. In coordinate Cartesiane bidimensionali, tali prodotti possono venir espressi come

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v c_p t) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v c_p t) \quad (1.19)$$

nel caso del contributo avvevivo in forma conservativa,

$$\rho c_p \mathbf{w} \cdot \nabla t = \rho v c_p \frac{\partial t}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial t}{\partial y} \quad (1.20)$$

nel caso del contributo avvevivo in forma non conservativa, e

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad (1.21)$$

nel caso del contributo conduttivo.

#### 1.3.1 Formulazioni alternative dell'equazione dell'energia

Nelle applicazioni che lo richiedano, anche a bassa velocità l'equazione dell'energia in forma “completa” deve includere i termini

- $\dot{q}$  relativo alla conversione in calore di energie chimiche, elettriche o nucleari e
- $\dot{\phi}$  relativo al lavoro compiuto dalle forze di attrito.

A bassa velocità, tuttavia, si possono ancora trascurare le variazioni di energia cinetica e potenziale tra entrata ed uscita. In tal caso, con riferimento al dominio fluido di Fig. 1.4, la nuova forma analitica del bilancio diventa

$$\frac{dU}{d\theta} = \sum \dot{m}_e h_e - \sum \dot{m}_u h_u + q + \dot{q} + \dot{\phi} \quad (1.22)$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

Dopo alcune manipolazioni per far comparire il calore specifico a pressione costante nella derivata temporale al primo membro, si arriva all'espressione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho c_p t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t) = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \dot{q} + \dot{\phi} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (1.23)$$

Come si può vedere, l'equazione (1.23) ha una struttura abbastanza complessa. Poiché in questo Capitolo si privilegiano gli aspetti fisici rispetto agli sviluppi algebrici, si può limitare la discussione al caso di coordinate cartesiane bidimensionali e di fluido a proprietà termofisiche costanti. In tale situazione la (1.23) può venire espressa nella forma

$$\rho c_p \left( \frac{\partial t}{\partial \theta} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + \dot{q} + \dot{\phi} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (1.24)$$

dove il termine relativo all'azione delle forze d'attrito può essere scritto come

$$\dot{\phi} = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (1.25)$$

evidenziando la proporzionalità tra il lavoro delle forze di attrito ed il coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ . Come si è osservato più volte, il termine  $\dot{\phi}$  è trascurabile nella maggior parte delle situazioni di interesse pratico, ma può diventare importante nei processi di convezione all'interno di condotti nei quali si abbiano perdite di carico molto elevate, o nelle applicazioni ad alta velocità. Per queste ultime applicazioni, tuttavia, nel Capitolo 5 sarà necessario scrivere l'equazione dell'energia in una forma che tenga conto anche delle variazioni di energia cinetica tra entrata ed uscita del sistema.

### 1.3.2 Equazione dell'energia ed analisi numeriche

Dall'equazione dell'energia scritta in forma completa (1.23), si può facilmente tornare ad espressioni semplificate analoghe alla (1.16) ed alla (1.18) nelle quali, però, compaia il calore specifico a pressione costante nel termine di variazione temporale. Si ottengono così le espressioni

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho c_p t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t) = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) \quad (1.26)$$

e

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \theta} + \rho c_p \mathbf{w} \cdot \nabla t = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) \quad (1.27)$$

rispettivamente per la forma conservativa e quella non conservativa. Queste espressioni costituiscono un valido punto di partenza per le analisi numeriche in quanto

### 1.3. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

valgono, inalterate, sia per i gas sia per i liquidi. (Nei liquidi, ovviamente, il calore specifico a pressione costante  $c_p$  coincide con il calore specifico  $c$ ).

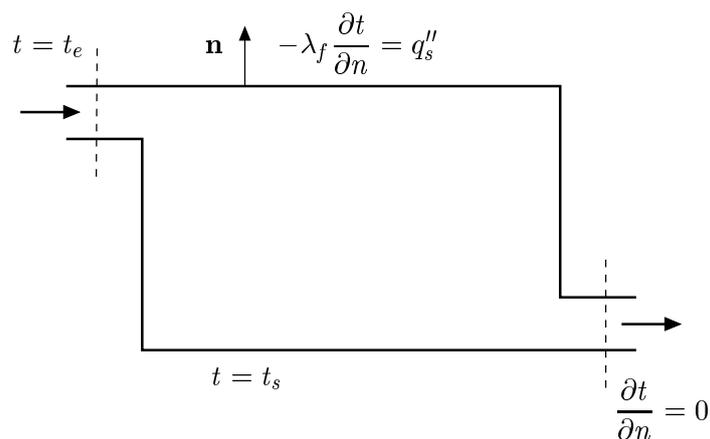
Nelle soluzioni con il metodo dei volumi finiti si preferisce l'espressione conservativa (1.26), mentre in quelle con il metodo degli elementi finiti si preferisce l'espressione non conservativa (1.27). Le ragioni di tali scelte si fondano più sull'esperienza che sulla scienza, e sono difficili da giustificare senza un esame approfondito delle metodologie di discretizzazione. Da un punto di vista qualitativo, tuttavia, si può affermare che le discretizzazioni basate sul metodo degli elementi finiti non garantiscono, in genere, la conservazione locale della massa. Di conseguenza, la forma non conservativa dell'equazione dell'energia consente d'ignorare contributi d'entalpia spuri, cioè provenienti da processo di discretizzazione numerica che comportano creazioni, o distruzioni, locali "fittizie" di massa.

#### 1.3.3 Condizioni al contorno ed iniziali per l'equazione dell'energia

Le condizioni al contorno più utilizzate per l'equazione dell'energia possono venir discusse con riferimento alla Fig. 1.5, nella quale è rappresentato un tipico dominio d'interesse pratico, con una sezione d'entrata ed una sezione d'uscita lontane da zone di ricircolazione.

All'entrata del fluido nel dominio, le temperature sono sempre note e quindi si hanno condizioni al contorno del primo tipo

$$t = t_e \quad (1.28)$$



**Figura 1.5:** Condizioni al contorno per l'equazione dell'energia.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

Sulle pareti solide di confine si hanno, di solito, condizioni al contorno del primo tipo con temperatura nota

$$t = t_s \quad (1.29)$$

ovvero condizioni del secondo tipo con flusso termico specifico imposto

$$-\lambda_f \frac{\partial t}{\partial n} = q_s'' \quad (1.30)$$

Ovviamente, nella (1.30) si fa riferimento alla conduttività termica del fluido e si considera il flusso termico specifico positivo quando esce dal dominio, in quanto la normale  $\mathbf{n}$  è orientata verso l'esterno.

Nella sezione d'uscita dal dominio si può assumere che la derivata normale sia nulla

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0 \quad (1.31)$$

se, come si raccomanda, la sezione d'uscita dal dominio computazionale è posta in una zona non soggetta a ricircolazione.

Nel caso si debba risolvere un problema in transitorio, infine, si può partire da un campo termico noto in base a misure o calcoli precedenti ovvero, in alternativa, partire dall'istante iniziale facendo riferimento a condizioni di temperatura uniformi in tutto il dominio di definizione.

### 1.3.4 Coefficiente di convezione

Una volta determinato il campo termico, è possibile trovare i valori dei coefficienti di convezione procedendo in maniera diversa a seconda che sia imposta la temperatura superficiale od il flusso termico specifico.

Quando è imposta la temperatura superficiale  $t_s$ , il flusso termico specifico alla parete non è noto a priori, ma può essere calcolato in base alla sua definizione. Quindi, in coerenza con la scelta di un flusso termico positivo nella direzione che va dal fluido alla parete, si ha

$$\alpha = \frac{q''}{t_f - t_s} = -\frac{\lambda_f}{t_f - t_s} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = \frac{\lambda_f}{t_s - t_f} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (1.32)$$

Nell'Eq. (1.32)  $\alpha$  è il coefficiente di convezione,  $t_f$  è la temperatura di riferimento per il fluido e la derivata alla parete è ricavata dai calcoli.

Quando, viceversa, è imposto il flusso termico specifico  $q'' = q_s''$ , ancora positivo nella direzione che va dal fluido alla parete, il coefficiente di convezione è valutato come

$$\alpha = \frac{q_s''}{t_f - t_s} \quad (1.33)$$

## 1.4. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

dove la temperatura  $t_s$  e, quindi, la differenza di temperatura  $(t_f - t_s)$ , sono ricavate dai calcoli.

Da tutte queste considerazioni si evince che il coefficiente di convezione non è una proprietà termofisica del fluido, ma può essere considerato, semmai, una “proprietà” del campo termico e, di conseguenza, anche del campo di moto, almeno nella misura in cui la derivata della temperatura alla parete, o la differenza di temperatura  $(t_f - t_s)$ , sono influenzate dal campo di moto.

## 1.4 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Solo pochi testi di Fisica Generale sottolineano che la seconda legge del moto di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d}{d\vartheta}(m\mathbf{w}) = m \frac{d\mathbf{w}}{d\vartheta} + \mathbf{w} \frac{dm}{d\vartheta} \quad (1.34)$$

equivale alla legge di Galileo

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{w}}{d\vartheta} \quad (1.35)$$

unicamente per i sistemi a massa costante. Se la massa contenuta nel sistema di riferimento varia nel tempo è necessario, infatti, ricorrere alla legge di Newton. Si consideri, ad esempio, la situazione di Fig. 1.6 assumendo, per semplicità, che il carrello possa scorrere orizzontalmente senza attriti e che la pressione di uscita del getto sia pari alla pressione atmosferica. A carrello bloccato, il primo termine al terzo membro della (1.34) si annulla, ma il secondo termine al terzo membro della (1.34) è diverso da zero poiché la massa di fluido contenuta nel serbatoio varia nel tempo. Pertanto, la spinta trasferita al blocco non è nulla ma è pari a

$$\mathbf{F} = \mathbf{w} \frac{dm}{d\vartheta} = \dot{m}\mathbf{w} \quad (1.36)$$

in base alla seconda legge di Newton.

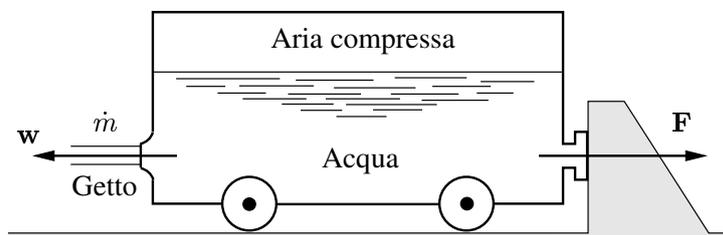


Figura 1.6: Spinta di un getto fluido.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

La seconda legge di Newton si adatta poi perfettamente al riferimento costituito da un sistema aperto con più entrate ed uscite, del tipo rappresentato in Fig. 1.7. Dall'applicazione della legge di Newton al sistema di figura si ottiene, infatti

$$\mathbf{F} = m \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{d\vartheta} + \sum \dot{m}_u \mathbf{w}_u - \sum \dot{m}_e \mathbf{w}_e \quad (1.37)$$

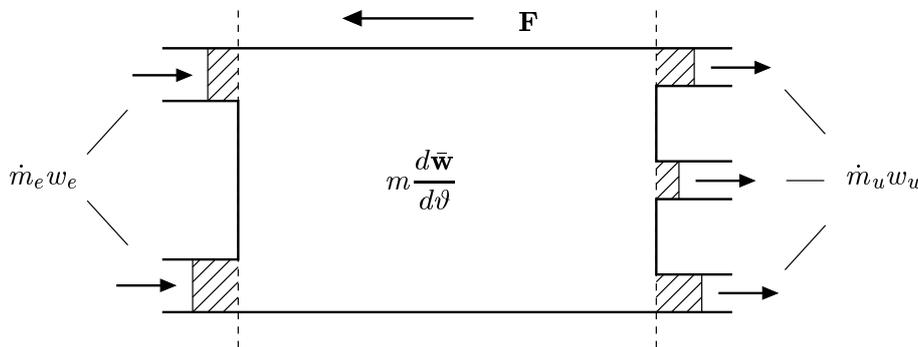
dove la barra denota il valore medio delle velocità ed i pedici  $e$  ed  $u$  distinguono l'entrata e l'uscita. Dalla (1.37), evidenziando al primo membro la variazione temporale nel volume di controllo e portando al secondo membro i flussi avvevivi e la risultante delle forze agenti sul volume stesso, si giunge immediatamente alla forma "analitica" del principio di conservazione della quantità di moto

$$m \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{d\vartheta} = \sum \dot{m}_e \mathbf{w}_e - \sum \dot{m}_u \mathbf{w}_u + \mathbf{F} \quad (1.38)$$

Successivamente, interpretando come "entrate" ed "uscite" i flussi di quantità di moto e come "fornitura" la risultante delle forze agenti, si arriva all'espressione generale

$$\text{variazione} = \text{entrate} - \text{uscite} + \text{fornitura}$$

che è simile a tutte le espressioni dei bilanci "contabili".



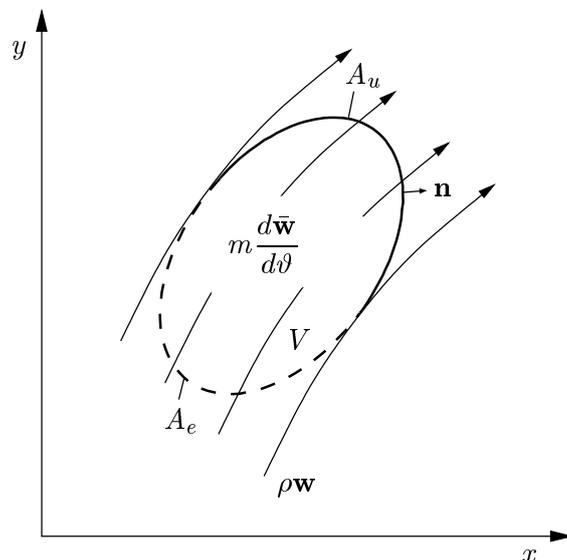
**Figura 1.7:** Conservazione della quantità di moto: macrobilancio.

### 1.4.1 Applicazione al moto dei fluidi

Nel caso del moto dei fluidi, il sistema aperto di riferimento è costituito da un generico dominio fluido di volume  $V$ , del tipo rappresentato in Fig. 1.8. In questa situazione, il primo membro della (1.38) può essere valutato come

$$m \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{d\vartheta} = m \left[ \frac{1}{m} \int_V \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \mathbf{w}) dV \right] = \int_V \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \mathbf{w}) dV \quad (1.39)$$

## 1.4. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO



**Figura 1.8:** Conservazione della quantità di moto: dominio di riferimento.

La differenza tra i flussi di quantità di moto entranti ed uscenti al secondo membro della (1.38), può essere calcolata integrando la distribuzione dei flussi specifici sull'intera superficie esterna  $A = A_e + A_u$ , ed applicando successivamente il teorema di Gauss

$$\sum \dot{m}_e \mathbf{w}_e - \sum \dot{m}_u \mathbf{w}_u = - \int_A \mathbf{w} (\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dA = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) dV \quad (1.40)$$

Nella (1.40), il segno negativo al secondo membro tiene conto dell'orientamento verso l'esterno della normale  $\mathbf{n}$  mentre, al terzo membro, il termine  $(\mathbf{w} \mathbf{w})$  indica il prodotto diadico del vettore  $\mathbf{w}$  per sé stesso il cui risultato è rappresentabile, come vedremo in Appendice, mediante una matrice quadrata  $(n \times n)$ , con  $n$  numero di componenti di  $\mathbf{w}$ . Poiché, in matematica, vengono definite "tensori" le matrici quadrate risultanti da operazioni che coinvolgano due vettori con lo stesso numero di componenti, si può anche dire che il risultato del prodotto diadico è un tensore.

Con riferimento alle componenti  $u$  e  $v$  della velocità, rispettivamente secondo gli assi  $x$  e  $y$  di un sistema di coordinate Cartesiane bidimensionali, la rappresentazione matriciale del prodotto diadico  $(\mathbf{w} \mathbf{w})$  è

$$\mathbf{w} \mathbf{w} \equiv \mathbf{w} \mathbf{w}^T = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} [ u \quad v ] = \begin{bmatrix} uu & uv \\ vu & vv \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

in quanto il risultato viene ottenuto moltiplicando, in base alla regola “righe per colonne”, il primo vettore per la trasposta del secondo. È appena il caso di ricordare che la rappresentazione matriciale del prodotto scalare  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$  avrebbe condotto alla moltiplicazione, “riga per colonna”, della trasposta del primo vettore per il secondo

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \equiv \mathbf{w}^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = u^2 + v^2 \quad (1.42)$$

Il prodotto misto vettore per tensore  $\nabla \cdot (\mathbf{w}\mathbf{w})$  ha come risultato un vettore di dimensione  $n$  le cui componenti si possono determinare facendo ancora riferimento alla rappresentazione matriciale. In coordinate Cartesiane bidimensionali, la rappresentazione matriciale può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{w}\mathbf{w}) &\equiv (\nabla^T (\mathbf{w}\mathbf{w}))^T = \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} uu & uv \\ vu & vv \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) & \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) \\ \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.43)$$

in quanto il risultato finale è la trasposta del prodotto “righe per colonne” della trasposta dell’operatore  $\nabla$  per la matrice  $\mathbf{w}\mathbf{w}$ .

La presenza dello scalare densità  $\rho$  produce effetti diversi sulla (1.43), a seconda che  $\rho$  vari o, come nel caso dei fluidi a comportamento incomprimibile, si possa considerare costante. Se  $\rho$  varia, si ha semplicemente

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{w}\mathbf{w}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) \end{Bmatrix} \quad (1.44)$$

Se invece  $\rho$  non varia, sviluppando la (1.43) e tenendo conto dell’equazione di continuità (1.7), si ottiene

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{w}\mathbf{w}) = \rho\mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w} + \rho\mathbf{w}\nabla \cdot \mathbf{w} = \rho\mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w} \quad (1.45)$$

Nella (1.45), il termine  $\nabla\mathbf{w}$  indica il prodotto diadico del vettore  $\nabla$  per il vettore  $\mathbf{w}$ , il cui risultato è un tensore rappresentabile mediante una matrice quadrata ( $n \times n$ ), con  $n$  numero di componenti dei due vettori. In coordinate Cartesiane

## 1.4. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

bidimensionali, infatti, si ottiene

$$\nabla \mathbf{w} \equiv \nabla \mathbf{w}^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} [ u \quad v ] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right] \quad (1.46)$$

Il termine  $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}$  indica, invece, il prodotto misto del vettore  $\mathbf{w}$  per il tensore  $\nabla \mathbf{w}$  ed ha, quindi, per risultato un vettore di dimensione  $n$ . In coordinate Cartesiane bidimensionali, infatti, procedendo in analogia alla (1.43) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} &\equiv (\mathbf{w}^T \nabla \mathbf{w})^T \\ &= \left( [ u \quad v ] \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right] \right)^T = \left\{ \begin{array}{c} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.47)$$

### 1.4.2 Forze agenti su un volume fluido

Le forze agenti su un generico volume fluido  $V$ , del tipo rappresentato in Fig. 1.8, sono di due tipi

- forze di massa proporzionali a  $\rho$  e  $V$  e
- forze di contatto applicate sulla superficie  $A$ .

Nell'analisi della convezione, di solito, le forze di massa si identificano con la sola forza di gravità, mentre tra le forze di contatto si usa distinguere la pressione (che, per sua natura, permane anche nel fluido in quiete), e le componenti "deviatoriche" rispetto alla pressione (che traggono origine dal movimento e sono legate, quindi, alle forze viscosi). Da questo punto di vista si può porre

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_A p \mathbf{n} dA + \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA \quad (1.48)$$

dove  $\mathbf{g}$  è l'accelerazione di gravità,  $\mathbf{n}$  è il vettore unitario ortogonale alla superficie  $A$  ed orientato verso l'esterno della superficie stessa,  $\mathbf{T}$  è il tensore degli sforzi viscosi ed  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  indica il prodotto misto di  $\mathbf{n}$  per  $\mathbf{T}$ . In coordinate Cartesiane bidimensionali, quindi, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} &\equiv (\mathbf{n}^T \mathbf{T})^T \\ &= \left( [ n_x \quad n_y ] \left[ \begin{array}{cc} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{array} \right] \right)^T = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.49)$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

dove, al solito, le componenti del vettore al terzo membro sono date dalla trasposta del prodotto righe per colonne della trasposta del vettore  $\mathbf{n}$  per la matrice associata al tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$ . Nella (1.49), le componenti del tensore degli sforzi sono contrassegnate da due pedici: il primo associato alla normale della superficie a cui lo sforzo si riferisce, ed il secondo associato alla direzione nella quale lo sforzo agisce. Pertanto  $\sigma_{xx}$  è uno sforzo pertinente ad una superficie ortogonale all'asse  $x$  e diretto come l'asse stesso, mentre  $\tau_{yx}$  è uno sforzo pertinente ad una superficie ortogonale all'asse  $y$  ma diretto come l'asse  $x$ . Di conseguenza  $\sigma_{xx}$  è uno sforzo diretto ortogonalmente alla superficie a cui appartiene, mentre  $\tau_{yx}$  è uno sforzo diretto tangenzialmente alla superficie a cui appartiene.

Applicando il teorema di Gauss al secondo e terzo integrale nella (1.48), si ottiene

$$-\int_A p \mathbf{n} dA + \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA = -\int_V \nabla p dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV \quad (1.50)$$

e, di conseguenza, l'espressione volumica completa delle forze agenti sul dominio fluido di riferimento è

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_A p \mathbf{n} dA + \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA = \int_V (\rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}) dV \quad (1.51)$$

Il termine  $(\nabla \cdot \mathbf{T})$ , che compare nelle Eq. (1.50) e (1.51), è ancora un prodotto misto vettore per tensore che, in coordinate Cartesiane bidimensionali, può essere espresso come

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &\equiv (\nabla^T \mathbf{T})^T \\ &= \left( \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{array} \right] \right)^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.52)$$

### 1.4.3 Equazioni di Navier

Se i termini dell'Eq. (1.38) vengono espressi in base alle relazioni sin qui ricavate e portati al primo membro, si ottiene

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{w}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + \nabla p - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \right] dV = 0 \quad (1.53)$$

Poiché nella (1.53) il volume di integrazione è arbitrario, deve necessariamente essere anche

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{w}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (1.54)$$

## 1.4. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Se però la densità non varia, il secondo termine al primo membro della (1.54) si può semplificare in base alla (1.45), in modo da arrivare alla espressione alternativa

$$\rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (1.55)$$

Le equazioni (1.54) ed (1.55) costituiscono, rispettivamente, la forma conservativa e quella non conservativa delle equazioni di Navier, cioè della seconda legge di Newton scritta in termini di componenti del tensore degli sforzi. Nell'ipotesi di fluidi a comportamento incomprimibile, rappresentazioni conservative e non conservative sono del tutto equivalenti sul piano algebrico e conducono alle stesse soluzioni analitiche. Nel caso delle soluzioni numeriche, tuttavia, si è già osservato che forme conservative e non conservative danno luogo a risultati diversi poiché, in generale, la rappresentazione numerica della divergenza non risulta identicamente uguale a zero in tutti i punti di calcolo.

### 1.4.4 Leggi di Stokes

Nei fluidi, gli sforzi viscosi si manifestano come resistenza interna ai cambiamenti di forma originati dal movimento relativo delle particelle. Le equazioni costitutive permettono di esprimere tali sforzi in funzione della viscosità e del campo di moto. Nell'ipotesi di fluidi Newtoniani a comportamento incomprimibile, ad esempio, valgono le leggi costitutive di Stokes scritte nella forma

$$\mathbf{T} = \mu [\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T] \quad (1.56)$$

dove l'apice  $T$  indica la trasposta del tensore  $\nabla \mathbf{w}$ . Il tensore  $\nabla \mathbf{w}$  è già stato esplicitato nella (1.46) ed, in base alla definizione, la sua trasposta

$$(\nabla \mathbf{w})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

viene ottenuta dal quarto membro della (1.46) attraverso un semplice scambio righe per colonne.

### 1.4.5 Equazioni di Navier-Stokes

Le leggi costitutive di Stokes (1.56) possono venir introdotte al secondo membro delle equazioni di Navier (1.54) ed (1.55) scritte, rispettivamente, in forma conservativa

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

e non conservativa. Si ottengono così le corrispondenti equazioni di Navier-Stokes conservative

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho \mathbf{w}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) = -\nabla p + \nabla \cdot \{ \mu [\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T] \} + \rho \mathbf{g} \quad (1.58)$$

e non conservative

$$\rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \vartheta} + \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\nabla p + \nabla \cdot \{ \mu [\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T] \} + \rho \mathbf{g} \quad (1.59)$$

Giunti a questo punto si può osservare che, nelle ipotesi di validità dell'equazione:  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  e della relazione:  $\mu = \text{cost}$ , risulta anche

$$\nabla \cdot \{ \mu [\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T] \} = \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w}) = \mu \nabla^2 \mathbf{w} \quad (1.60)$$

essendo

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{w})^T = 0 \quad (1.61)$$

come verificato nell'Esempio 1.1 dell'Appendice. Nel caso di viscosità dinamica non costante, l'utilizzo della (1.60) costituisce un'approssimazione, peraltro comunemente accettata nelle soluzioni numeriche. Ad essa, infatti, si farà riferimento nel seguito.

Nell'ipotesi di validità dell'uguaglianza tra i primi due membri della (1.60), si può esprimere il termine diffusivo  $\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w})$  procedendo al prodotto misto del vettore  $\nabla$  per il tensore  $(\mu \nabla \mathbf{w})$ . In coordinate Cartesiane bidimensionali, quindi, si ha

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w}) &\equiv (\nabla^T (\mu \nabla \mathbf{w}))^T = \left( \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right] \right)^T \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Per quanto riguarda la pressione, va osservato che, nella maggior parte dei casi pratici, non si è interessati a determinare la distribuzione delle pressioni effettive  $p$ , ma si preferisce fare riferimento alle pressioni  $\tilde{p}$  depurate della componente idrostatica (neutra rispetto al moto). A tal fine si usa operare la sostituzione

$$p = \tilde{p} - \rho_0 g H \quad (1.63)$$

## 1.4. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

dove  $\rho_0$  è una densità di riferimento,  $H$  è la distanza da un piano isolivello posto alla quota più bassa del dominio, misurata nella stessa direzione ma in verso opposto a  $\mathbf{g}$ . Di conseguenza,  $-\rho_0 g H$  è la componente idrostatica della pressione  $p$  mentre  $\tilde{p}$  è proprio la pressione depurata dalla componente idrostatica.

Nelle equazioni di Navier-Stokes (1.58) e (1.59), la sostituzione (1.63) consente di esprimere in forma modificata la differenza tra termine legato al gradiente di pressione e termine legato alle forze di massa. Si ha infatti

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = -\nabla \tilde{p} + \rho_0 g \nabla H + \rho \mathbf{g} = -\nabla \tilde{p} - (\rho_0 - \rho) \mathbf{g} \quad (1.64)$$

in quanto risulta  $g \nabla H = -\mathbf{g}$  dal momento che la componente idrostatica della pressione diminuisce nella stessa direzione ma in verso opposto a  $\mathbf{g}$ .

Nella valutazione del termine  $(\rho - \rho_0)$  al terzo membro della (1.64), si parte dalla considerazione che, nei fluidi incompressibili od a comportamento incompressibile, le variazioni di pressione non sono tali da indurre variazioni significative di densità. Successivamente, però, si procede in maniera diversa nelle situazioni di convezione forzata ed in quelle di convezione naturale.

Nei problemi di convezione forzata è ragionevole trascurare le variazioni di densità con la temperatura, in quanto esse sono pressoché ininfluenti sul campo di moto. Vale quindi l'approssimazione:  $\rho \cong \rho_0$  e dalla (1.64) si ottiene

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = -\nabla \tilde{p} \quad (1.65)$$

Il termine  $\rho \mathbf{g}$  viene così eliminato dalle equazioni del moto e, nella letteratura, l'utilizzo in tale contesto della pressione effettiva  $\tilde{p}$ , al posto della pressione fisica  $p$ , è così scontato da non essere nemmeno, il più delle volte, dichiarato in nomenclatura.

Nei problemi di convezione naturale, al contrario, non è possibile trascurare le variazioni di densità con la temperatura in quanto il movimento è indotto proprio da queste ultime. Tuttavia, con le differenze di temperatura non troppo elevate (rispetto alla temperatura assoluta) che si hanno nella maggior parte delle situazioni di interesse pratico, il termine  $(\rho - \rho_0)$  può essere linearizzato in base all'approssimazione di Boussinesq. A questo proposito si pone

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_0}{t - t_0} \quad (1.66)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione volumica e  $T$  è la temperatura assoluta. Con riferimento alla (1.66) si ha quindi

$$\rho_0 - \rho \cong \rho \beta (t - t_0) \quad (1.67)$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

e dalla (1.64) si ottiene

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = -\nabla \tilde{p} - \rho \beta (t - t_0) \mathbf{g} \quad (1.68)$$

Nei gas ideali, si ha  $\beta = 1/T$ , in quanto per essi vale l'equazione di stato  $p = \rho RT$ , mentre per gli altri fluidi  $\beta$  deve essere valutato sperimentalmente. A questo proposito, può essere interessante notare che, nei problemi di convezione forzata, trascurare le variazioni di densità con la temperatura equivale ad assumere  $\beta \cong 0$ . Con tale assunzione, la (1.68) acquista validità generale e può sempre essere sostituita nelle equazioni di Navier-Stokes (1.58) e (1.59) scritte tenendo conto della (1.60). Si ottengono così, rispettivamente, l'espressione conservativa

$$\rho \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \mathbf{w}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w}) - \rho \beta (t - t_0) \mathbf{g} \quad (1.69)$$

e l'espressione non conservativa

$$\rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \vartheta} + \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w}) - \rho \beta (t - t_0) \mathbf{g} \quad (1.70)$$

delle equazioni. In tali espressioni si distinguono, al primo membro, i termini di variazione temporale e di trasporto avvertivo ed, al secondo membro, il trasporto diffusivo (rappresentato dal termine che contiene la viscosità) ed i termini residuali di generazione (rappresentati dal gradiente di pressione e dalle forze di galleggiamento).

Come si è già osservato a proposito dell'equazione dell'energia, nelle soluzioni numeriche delle equazioni di Navier-Stokes si preferisce l'espressione conservativa quando si opera con il metodo dei volumi finiti, mentre si preferisce l'espressione non conservativa quando si opera con gli elementi finiti. Come si ricorderà, le ragioni di tale scelta si fondano sul fatto che, a differenza dei volumi finiti, gli elementi finiti non garantiscono, in genere, la conservazione locale della massa. Pertanto con gli elementi finiti la forma non conservativa conduce a risultati più accurati, in quanto ignora i contributi di quantità di moto spurie provenienti dai processi di discretizzazione numerica.

Nella pratica, come si è detto, si sottintende quasi sempre il riferimento alla pressione depurata dalla componente idrostatica, omettendo la tilde sopra il simbolo della pressione per non appesantire le notazioni. Con tale assunzione, le componenti secondo gli assi  $x$  ed  $y$  delle equazioni di Navier-Stokes bidimensionali si scrivono

## 1.4. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

nella forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \rho \beta(t - t_0)g_x; \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \rho \beta(t - t_0)g_y
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

con riferimento alla rappresentazione conservativa, o nella forma

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \rho \beta(t - t_0)g_x; \\
 \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \rho \beta(t - t_0)g_y
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

con riferimento alla rappresentazione non conservativa.

### 1.4.6 Condizioni al contorno ed iniziali per le equazioni di Navier-Stokes

Le condizioni al contorno più utilizzate per le equazioni di Navier-Stokes possono venir discusse con riferimento alla Fig. 1.9, nella quale è illustrato un tipico dominio bidimensionale con sezioni di entrata e di uscita allineate con gli assi cartesiani.

Sulle sezioni d'entrata del fluido nel dominio, le velocità sono note e si ha

$$u = u_e, \quad v = 0 \tag{1.73}$$

e

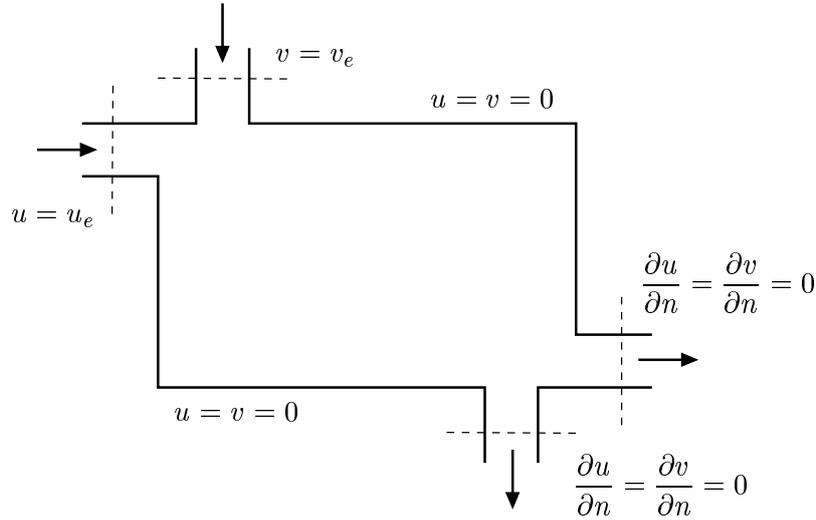
$$u = 0, \quad v = v_e \tag{1.74}$$

rispettivamente.

Sulle pareti solide di confine, la velocità è nulla in quanto il fluido è viscoso, e quindi risulta

$$u = v = 0 \tag{1.75}$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE



**Figura 1.9:** Condizioni al contorno per le equazioni di Navier-Stokes.

In generale si ha cura che le sezioni d'uscita dal dominio oggetto d'indagine non si trovino in zone soggette a ricircolazione e, di conseguenza, si può assumere che il fluido esca con derivate normali nulle

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (1.76)$$

da entrambe le sezioni.

Infine, nel caso si debba risolvere un problema in transitorio, si può far riferimento a condizioni iniziali di velocità uniforme in tutto il dominio di definizione.

### 1.4.7 Convezione forzata, naturale e mista

Nei problemi di convezione forzata, come si è detto, il termine di galleggiamento  $\rho\beta(t - t_0)\mathbf{g}$ , che compare nelle (1.69) e (1.70), viene generalmente trascurato. L'analisi dimensionale dimostra che ciò è veramente lecito quando si ha

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \ll 1 \quad (1.77)$$

dove

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(t_s - t_0)L^3}{\nu^2} \quad (1.78)$$

## 1.5. METODOLOGIE DI SOLUZIONE NUMERICA

è il numero di Grashof,

$$\text{Re} = \frac{|\mathbf{w}|L}{\mu} \quad (1.79)$$

è il numero di Reynolds,  $L$  è una lunghezza caratteristica di riferimento e  $|\mathbf{w}|$  è la velocità caratteristica del campo di moto forzato, cioè del campo indotto da agenti esterni come pompe o ventilatori.

Nei problemi di convezione naturale il campo di moto è indotto dalla spinta di galleggiamento  $\rho\beta(t - t_0)g$  interna. In tal caso, ovviamente, risulta

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \gg 1 \quad (1.80)$$

potendosi avere anche  $\text{Re} = 0$  in completa assenza di campo di moto forzato.

Nel caso di convezione mista, infine, risulta

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \cong 1 \quad (1.81)$$

e, nelle analisi, bisogna tener conto sia del campo di moto forzato sia del termine di galleggiamento.

Nel seguito, si illustreranno alcune metodologie di soluzione numerica per i problemi di convezione nei fluidi a comportamento incomprimibile, rimandando al Capitolo 5 la illustrazione dettagliata delle metodologie di soluzione per i fluidi comprimibili. Qui l'analisi sarà limitata alle procedure descrivibili in termini di equazioni differenziali, senza alcun riferimento alle tecniche di discretizzazione che saranno discusse, rispettivamente, nel Capitolo 2 per quanto riguarda i volumi finiti, e nel Capitolo 3 per quanto riguarda gli elementi finiti.

## 1.5 METODOLOGIE DI SOLUZIONE NUMERICA

Come si è già osservato, la soluzione numerica delle equazioni che governano la convezione nei fluidi incomprimibili è resa difficile dall'assenza di un'equazione in cui compaia la pressione come variabile principale. Ciò costringe ad investigare il ruolo svolto dalla pressione, ed il modo più efficace per comprendere questo ruolo è, probabilmente, quello di esaminare criticamente la formulazione che si ottiene eliminando la pressione dalle equazioni del moto. Nel caso di problemi bidimensionali, la pressione può essere facilmente eliminata riformulando le equazioni del moto in termini di funzione di corrente e vorticità. Purtroppo, la funzione di corrente esiste solo in due dimensioni e, quindi, la procedura di eliminazione non è facilmente estensibile

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

ai problemi tridimensionali che, di conseguenza, sono generalmente risolti nell'ambito delle variabili primitive. In tale contesto, come si vedrà meglio nel seguito, il successo degli algoritmi di soluzione è legato alla procedura seguita per determinare un campo di pressioni che, sostituito nelle equazioni del moto, conduca al rispetto della continuità.

### 1.5.1 Equazioni del moto in termini di funzione di corrente e vorticità

Come si è già osservato, nel caso di problemi bidimensionali è possibile eliminare la pressione dalle equazioni del moto, rinunciando alla formulazione in termini di variabili primitive (velocità e pressione), a favore di una formulazione in termini di funzione di corrente e vorticità. Ciò è reso possibile dal fatto che teoria ed esperienza dimostrano come la pressione, istante per istante, assuma valori tali da garantire il rispetto della continuità. Per eliminare la pressione bisogna quindi giungere, per altra via, al rispetto della continuità. In problemi bidimensionali ciò si ottiene, appunto, ricorrendo ad una funzione di corrente  $\psi$  definita in modo da descrivere un campo di moto che rispetti automaticamente la continuità. A tal fine, in coordinate Cartesiane bidimensionali si può porre

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.82)$$

e

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.83)$$

ottenendo così identicamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \equiv 0 \quad (1.84)$$

Le linee a  $\psi = \text{cost}$  sono linee di corrente in quanto sono tangenti, in ogni punto, al vettore velocità. Infatti, se  $ds$  è un vettore di lunghezza  $ds$  (misurato lungo una linea di corrente) ed orientato come  $\mathbf{w}$ , il prodotto vettoriale (indicato con  $\mathbf{x}$ ) tra  $\mathbf{w}$  e  $ds$  deve risultare identicamente uguale a zero. Di conseguenza, con riferimento al versore  $\mathbf{k}$  della normale al piano  $(x, y)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times ds &= \det \begin{bmatrix} u & v \\ dx & dy \end{bmatrix} \mathbf{k} = (u dy - v dx) \mathbf{k} = 0 \\ \Rightarrow u dy - v dx &= \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0 \end{aligned} \quad (1.85)$$

da cui si ricava l'assunto. Inoltre, la (1.85) dimostra che  $d\psi$  è un differenziale esatto, il cui integrale curvilineo dipende solo dai punti iniziale e finale.

## 1.5. METODOLOGIE DI SOLUZIONE NUMERICA

Per illustrare ulteriormente il significato fisico di  $\psi$ , si applichino le definizioni (1.82) e (1.83), procedendo in senso antiorario lungo un qualunque contorno del dominio. In questo modo si ha

$$u_n = \frac{\partial\psi}{\partial s} \quad (1.86)$$

e

$$u_s = -\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad (1.87)$$

rispettivamente per la componente normale e la componente tangenziale della velocità. Pertanto, in base alla (1.86), risulta

$$\psi = \psi_0 + \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\partial\psi}{\partial s} ds = \psi_0 + \int_{A(s)} u_n ds \quad (1.88)$$

Di conseguenza, ponendo  $\psi_0 = 0$  nella (1.88), si ricava che il valore della funzione di corrente, nella posizione  $s$  sul contorno, è pari alla portata volumetrica attraverso il contorno  $A(s)$  di profondità unitaria. L'Eq. (1.87), non utilizzata in questo contesto, verrà ripresa in esame nella discussione delle condizioni al contorno, contribuendo ulteriormente all'illustrazione del significato fisico di  $\psi$ .

In coordinate Cartesiane bidimensionali, la vorticità è generalmente definita come

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.89)$$

in modo da risultare pari a due volte la velocità di rotazione angolare del fluido nel punto considerato. Sostituendo nella definizione della vorticità (1.89) le definizioni (1.82) e (1.83) delle componenti di velocità espresse in termini di funzione di corrente, si ricava subito

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1.90)$$

cioè l'equazione differenziale che governa la distribuzione delle linee di corrente.

Se invece si parte dalle equazioni di Navier-Stokes (1.72), si può utilizzare la definizione (1.89) per ricavare l'equazione differenziale che governa la distribuzione della vorticità. Infatti, nell'ipotesi di proprietà termofisiche costanti, derivando la seconda delle (1.72) rispetto ad  $x$  e la prima rispetto ad  $y$ , e sottraendo poi membro a membro, si ottiene

$$\rho \frac{\partial\omega}{\partial t} + \rho u \frac{\partial\omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial\omega}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right) - \rho\beta \left( g_y \frac{\partial t}{\partial x} - g_x \frac{\partial t}{\partial y} \right) \quad (1.91)$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

L'Eq. (1.91) è un'equazione di trasporto, del tutto simile all'equazione dell'energia che governa la distribuzione della temperatura. Si distinguono, infatti, al primo membro i termini di variazione temporale e trasporto avvevativo, ed al secondo membro i termini di trasporto diffusivo e generazione.

Si noti, infine, che la pressione non compare in nessuna delle due equazioni (1.90) e (1.91). Purtuttavia le equazioni (1.90) e (1.91), insieme con le appropriate condizioni al contorno ed iniziali, consentono di calcolare il campo di moto. In tal modo, una volta determinato il campo di moto si può, come al solito, passare alla soluzione dell'equazione dell'energia per trovare anche il campo termico.

### 1.5.2 Condizioni al contorno per funzione di corrente e vorticità

La soluzione delle (1.90) e (1.91), al posto delle equazioni di continuità e di Navier-Stokes, conduce a risultati eccellenti nel caso di problemi bidimensionali. L'unica difficoltà riguarda l'imposizione delle condizioni al contorno in quanto si hanno, su ciascun contorno, due condizioni per la funzione di corrente e nessuna condizione, fisicamente significativa, per la vorticità. Per dare concretezza a tale affermazione, si possono esaminare, ad esempio, le difficoltà che si incontrano per imporre di condizioni al contorno, fisicamente significative, sulle pareti solide.

Una parete solida costituisce una linea di corrente e, di conseguenza, è generalmente noto il valore assunto dalla funzione di corrente in corrispondenza alla parete stessa. Ad esempio, sulle due pareti affacciate di un canale piano la funzione di corrente assumerà, su una parete, il valore di riferimento, tipicamente  $\psi_0 = 0$  e, sull'altra parete, il valore valutato in base alla (1.88) e corrispondente alla portata volumetrica che attraversa il canale stesso. Sulle pareti solide, però, è uguale a zero anche la componente tangenziale della velocità ed, in base alla (1.87), si deve imporre l'ulteriore condizione di gradiente nullo per la funzione di corrente. In compenso, per le pareti solide non esiste alcuna condizione al contorno per la vorticità che abbia un qualche significato fisico. Nelle soluzioni numeriche, quindi, si risolverà subito l'Eq. (1.90) rispetto a  $\psi$ , imponendo condizioni al contorno del primo tipo sulle pareti solide. Successivamente si ritornerà all'Eq. (1.90), interpretata come un'equazione per la vorticità alle pareti, e si risolverà di nuovo l'equazione stessa, questa volta rispetto ad  $\omega$  ed imponendo condizioni al contorno di gradiente nullo per la funzione di corrente.

### 1.5.3 Significato fisico della pressione

Oltre all'interesse pratico nel caso di problemi bidimensionali, la formulazione delle equazioni del moto in termini di funzione di corrente e vorticità ha notevole interesse concettuale. Infatti, dalle Eq. (1.90) e (1.91) si può dedurre, come più volte

## 1.6. SOLUZIONI IN VARIABILI PRIMITIVE

osservato, che la conoscenza del campo di pressione non è indispensabile per la determinazione del campo di moto. La giustificazione fisica è semplice se si accetta l'assunto che, nei fluidi incomprimibili, la pressione sia legata alla sola equazione di continuità. Pertanto, se la continuità è soddisfatta identicamente, grazie alla descrizione del campo di moto in termini di funzione di corrente, la variabile pressione può essere eliminata senza inconvenienti. Inoltre, dalle Eq. (1.90) e (1.91) si vede che gli effetti viscosi influenzano direttamente la distribuzione della vorticità, ma solo indirettamente, attraverso il termine di generazione, la distribuzione delle linee di corrente. Quindi, la componente rotazionale di un campo di moto non può essere influenzata dal gradiente di pressione e, di conseguenza, il gradiente di pressione è legato alla sola componente irrotazionale del campo stesso.

Considerazioni del tipo di quelle esposte più sopra saranno riprese nel seguito, quando si tratterà del significato fisico delle pressioni di "stima" e "correzione", utilizzate negli algoritmi di soluzione in variabili primitive (velocità e pressione). In quest'ultimo caso, come si vedrà meglio nel seguito, la difficoltà principale sarà, infatti, legata alla determinazione, per tentativi, di un campo di pressioni che conduca al rispetto della continuità. La situazione, invece, sarà diversa per i problemi di moto dei fluidi comprimibili, per i quali valgono le considerazioni del Capitolo 5 ed i cenni riportati nella Sezione che segue.

## 1.6 SOLUZIONI IN VARIABILI PRIMITIVE

Per un fluido comprimibile, le simulazioni numeriche in variabili primitive si basano su

- equazioni di Navier-Stokes, scritte nella forma conservativa (1.69) o non conservativa (1.70),
- equazione di continuità, scritta nella forma (1.5) e, necessariamente, anche su
- equazione dell'energia (in quanto densità, pressione e temperatura legate dall'equazione di stato dei gas).

Le relative metodologie di soluzione, e le difficoltà che s'incontrano nell'implementarle, saranno illustrate in dettaglio nel Capitolo 5. Qui basti dire che, una volta trovate le componenti della velocità attraverso la risoluzione delle equazioni del moto, si possono determinare il campo delle temperature, risolvendo l'equazione dell'energia, e la distribuzione delle densità risolvendo l'equazione di continuità (1.5). La conoscenza della temperatura e della densità consente poi il calcolo della pressione attraverso l'equazione di stato del gas. Pertanto, nei problemi di moto dei fluidi

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

comprimibili, le variabili primitive indipendenti sono le componenti della velocità, la densità e la temperatura, mentre la pressione è una variabile che dipende da densità e temperatura attraverso l'equazione di stato.

Nei problemi di convezione nei fluidi a comportamento incomprimibile, al contrario, l'equazione di continuità viene scritta nella forma (1.7) e, come si è detto più volte, non esiste alcuna equazione dove compaia una variabile principale legata direttamente alla pressione. Le considerazioni del paragrafo precedente e l'esperienza consentono solo di affermare che, nei fluidi incomprimibili, la pressione è la variabile che assume i valori necessari a "forzare" il rispetto della continuità. In passato, tale constatazione ha spinto molti ricercatori a ricavare un'equazione differenziale indipendente per la pressione, partendo dalle equazioni del moto e dall'equazione di continuità. L'equazione così ottenuta prende il nome di equazione di Poisson per la pressione.

### 1.6.1 Equazione di Poisson per la pressione

L'equazione di Poisson per la pressione viene ricavata manipolando le equazioni del moto e della continuità scritte per i fluidi incomprimibili. Purtroppo, come si vedrà tra poco, l'equazione di Poisson ha più interesse concettuale che pratico, in quanto non si presta ad essere agevolmente utilizzata direttamente nelle soluzioni numeriche. Pertanto, è sufficiente derivarla ponendosi in ipotesi abbastanza semplificative, in modo da alleggerire gli sviluppi algebrici. A questo fine si faccia riferimento, all'Eq. (1.70) assumendo che il termine di galleggiamento sia trascurabile e che la densità e la viscosità siano costanti. In tali ipotesi, l'applicazione della divergenza ai due membri dell'equazione risultante conduce all'espressione

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \vartheta} + \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) = \nabla \cdot [-\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w})] \quad (1.92)$$

riferita, al solito, alla pressione depurata dalla componente idrostatica. Dalla (1.92), imponendo che sia  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ , si ottiene l'equazione scalare di Poisson

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}) \quad (1.93)$$

in quanto si ha

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \vartheta} \right) = \rho \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{w})}{\partial \vartheta} = 0 \quad (1.94)$$

e, come verificato nell'Esempio 1.2 dell'Appendice, anche

$$\nabla \cdot [\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w})] = \mu \nabla \cdot (\nabla \cdot \nabla \mathbf{w}) = 0 \quad (1.95)$$

## 1.7. ALGORITMI PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

In coordinate Cartesianhe bidimensionali, inoltre, risulta

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}) = 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.96)$$

come verificato nell'Esempio 1.3 dell'Appendice e, di conseguenza, l'equazione (1.93) può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2\rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.97)$$

Poiché si è imposto  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  nel passaggio dalla (1.92) alla (1.93), il campo di pressione ricavato dall'equazione di Poisson porta o, per meglio dire, dovrebbe portare alla determinazione di un campo di moto che soddisfi l'equazione della continuità. L'uso dell'equazione di Poisson al posto dell'equazione di continuità è stato, come si è detto, il primo approccio numerico alla soluzione delle equazioni del moto dei fluidi incompressibili. Tale approccio, tuttavia, è stato abbandonato quasi completamente negli ultimi anni, per due motivi.

Il primo motivo è di carattere tecnico ed è legato alla difficoltà d'imporre condizioni al contorno corrette nella soluzione dell'equazione di Poisson. Le condizioni al contorno per l'equazione di Poisson, infatti, sono condizioni del secondo tipo, ed il gradiente di pressione da imporre sul contorno

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \nabla p \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \quad (1.98)$$

deve essere calcolato partendo dalle equazioni di Navier-Stokes: un compito tutt'altro che facile. Il secondo motivo è associato alla difficoltà di ottenere il rispetto della continuità attraverso il semplice impiego dell'equazione di Poisson. L'utilizzo dell'equazione di Poisson al posto dell'equazione di continuità, infatti, non è un procedimento diretto e, di conseguenza, non si è mai sicuri di quale forma discretizzata dell'equazione di continuità sia contenuta implicitamente nella versione discretizzata dell'equazione di Poisson. Pertanto gli algoritmi di soluzione moderni, che utilizzano le variabili primitive nella soluzione dei problemi di moto dei fluidi a comportamento incompressibile, fanno riferimento a versioni modificate dell'equazione originale di Poisson. Come vedremo nella sezione che segue, tali versioni modificate consentono d'imporre più direttamente il rispetto della continuità impiegando, nel contempo, condizioni al contorno facilmente implementabili.

## 1.7 ALGORITMI PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

Molti algoritmi per la determinazione numerica dei campi di moto nei fluidi incompressibili sono riferiti alle equazioni discretizzate ed, oltre ad essere di comprensione

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

abbastanza difficile, non possono venire discussi indipendentemente dalla tecnica utilizzata per la discretizzazione. Altri algoritmi, al contrario, oltre ad essere ugualmente accurati ed affidabili, sono stati sviluppati nel continuo e, di conseguenza, possono essere presentati come semplici procedure di approssimazione delle equazioni differenziali di partenza. In questo capitolo è sembrato opportuno descrivere un algoritmo ricavato nel continuo, al fine di facilitare la comprensione delle metodologie di soluzione numerica a chi non ha troppa familiarità con le tecniche di discretizzazione.

L'algoritmo illustrato nel seguito è stato ricavato per il metodo degli elementi finiti e, successivamente, è stato esteso anche al metodo dei volumi finiti. Mantenendo un approccio storico nella descrizione, si farà riferimento alla forma non conservativa (1.70) delle equazioni del moto, tipica degli elementi finiti, limitandosi a notare che l'estensione alla forma conservativa (1.69), caratteristica dei volumi finiti, non presenta alcuna difficoltà. Inoltre, si partirà dalle equazioni del moto e dell'energia già discretizzate rispetto al tempo con la tecnica delle differenze finite. Sia nel metodo degli elementi finiti sia nel metodo dei volumi finiti, infatti, si impiegano le differenze finite per la discretizzazione temporale. Pertanto, la principale differenza tra la procedura discussa nel seguito e le procedure tradizionali è data dal fatto che qui la discretizzazione temporale precede, e non segue, la discretizzazione spaziale.

### 1.7.1 Equazioni del campo termofluidodinamico

Come si è detto, i diversi passi della soluzione sono ricavati nel continuo, senza bisogno di fare riferimento alle metodologie di discretizzazione spaziale. La procedura di calcolo ha, tuttavia, molti aspetti in comune con altri metodi sviluppati per le equazioni discretizzate, come il metodo SIMPLE di Patankar e Spalding ed il metodo dei passi frazionari di Glowinski. Il punto di partenza, ad ogni nuovo passo temporale, è la stima delle pressioni da utilizzare nella soluzione delle equazioni del moto. Se la distribuzione delle pressioni fosse conosciuta in anticipo, infatti, sarebbe possibile risolvere le equazioni di Navier-Stokes senza particolari difficoltà. Poiché la pressione non è nota a priori, per i calcoli del passo temporale  $(n + 1)$  può essere utilizzata una pressione di stima  $p^*$  assunta pari, in ogni punto, alla pressione del passo precedente  $n$  (cioè:  $p^* = p^n$  per  $n > 1$ ), od uguale a zero nella situazione iniziale (cioè:  $p = 0$  per  $n = 0$ ). In questo modo, si può pensare che il gradiente di pressione sia la somma di una componente stimata (\*) e di una componente di correzione ('), scrivendo

$$\nabla p = \nabla p^* + \nabla p' \quad (1.99)$$

Successivamente si può ipotizzare che, nella discretizzazione temporale della (1.70) scritta omettendo la tilde, anche l'accelerazione possa venire scissa in due compo-

## 1.7. ALGORITMI PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

enti: la prima associata al gradiente di stima ed utilizzata nell'equazione

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\mathbf{w}^* - \mathbf{w}^n}{\Delta\vartheta} + \rho \mathbf{w}^n \cdot \nabla [\gamma \mathbf{w}^* + (1 - \gamma) \mathbf{w}^n] \\ &= \mu \nabla^2 [\gamma \mathbf{w}^* + (1 - \gamma) \mathbf{w}^n] - \nabla p^* - \rho \beta (t^n - t_0) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.100)$$

e la seconda associata al gradiente di correzione ed utilizzata nell'equazione

$$\rho \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^*}{\Delta\vartheta} = \rho \frac{\mathbf{w}'}{\Delta\vartheta} = -\nabla p' \quad (1.101)$$

Attraverso la (1.100), il gradiente di stima conduce al calcolo di un campo di velocità di stima  $\mathbf{w}^*$  mentre, attraverso la (1.101), il gradiente di correzione conduce al calcolo di un campo di velocità di correzione  $\mathbf{w}'$ . La logica che presiede alla discretizzazione temporale della (1.70) attraverso i due passi di calcolo (1.100) e (1.101) emergerà meglio dalle considerazioni successive. Per il momento basti osservare che, alla fine del passo temporale, si ottiene una stima dell'accelerazione complessiva in quanto si ha, evidentemente

$$\rho \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta\vartheta} = \rho \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^*}{\Delta\vartheta} + \rho \frac{\mathbf{w}^* - \mathbf{w}^n}{\Delta\vartheta} \quad (1.102)$$

Nell'Eq. (1.100), la velocità  $\mathbf{w}^n$  che moltiplica il nabla nel contributo avvevivo e la temperatura  $t^n$  nel termine di galleggiamento sono linearizzate, cioè trasformate in coefficienti valutabili all'istante  $n$  in maniera esplicita, ovvero senza bisogno di iterazioni. Sempre nell'Eq. (1.100), le derivate della velocità nel contributo avvevivo e nel contributo diffusivo sono valutate come medie pesate dei valori assunti all'inizio ed alla fine del passo di calcolo. Al peso  $\gamma$  devono essere assegnati valori compresi tra 0 ed 1, in base allo schema d'integrazione temporale prescelto. Così si ottengono, in particolare, lo schema esplicito per  $\gamma = 0$ , lo schema di Crank-Nicolson per  $\gamma = 1/2$  e lo schema implicito per  $\gamma = 1$ .

La scelta di  $\gamma$  influenza sia la stabilità sia l'accuratezza dell'algoritmo. Lo schema implicito è il più stabile e, quindi, consente l'utilizzo di passi temporali più elevati, ma a prezzo di una minore accuratezza rispetto allo schema di Crank-Nicolson che, pure, è ragionevolmente stabile. Lo schema esplicito è il più economico in termini di tempi di calcolo ma, come l'implicito, non è molto accurato ed, a differenza dell'implicito, tende a diventare instabile con passi temporali abbastanza ridotti, conducendo facilmente a soluzioni oscillanti con ampiezza sempre maggiore.

Le velocità  $\mathbf{w}^*$ , risultanti dalla soluzione della (1.100), tengono conto della componente rotazionale del campo di moto in quanto, come si è osservato a proposito della formulazione  $(\psi, \omega)$ , la componente rotazionale non dipende dal gradiente di pressione. Le velocità  $\mathbf{w}^*$ , però, non rispettano la continuità, in quanto il rispetto della

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

continuità è legato al gradiente di pressione attraverso la componente irrotazionale del campo di moto. Il rispetto della continuità, quindi, deve essere assicurato, necessariamente, dalla soluzione della (1.101). D'altra parte, nella soluzione della (1.101) il rispetto della continuità deve essere anche, in qualche modo, forzato imponendo che alla fine del passo  $(n + 1)$  si abbia

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} = 0 \quad (1.103)$$

Passando alla divergenza dell'Eq. (1.101), ed imponendo che alla fine del passo  $(n + 1)$  valga la (1.103) in forza dell'azione di  $\nabla p'$ , si ottiene

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta\vartheta} \nabla \cdot \mathbf{w}^* \quad (1.104)$$

cioè l'equazione di Poisson modificata per il calcolo della pressione di correzione  $p'$ .

Giunti alla fine del passo d'integrazione temporale  $(n + 1)$  si può utilizzare  $p'$ , ottenuto dalla Eq. (1.104), per calcolare il campo di pressione

$$p^{n+1} = p^* + p' \quad (1.105)$$

e  $\mathbf{w}'$ , ottenuto dall'Eq. (1.101) scritta nella forma

$$\mathbf{w}' = -\frac{\Delta\vartheta}{\rho} \nabla p' \quad (1.106)$$

per calcolare il campo di velocità

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^* + \mathbf{w}' \quad (1.107)$$

Una volta che i campi di velocità e di pressione siano stati calcolati, si può passare alla determinazione del campo di temperatura, risolvendo l'equazione dell'energia. A tale proposito, utilizzando lo stesso algoritmo impiegato per la (1.100), si può scrivere l'equazione discretizzata rispetto al tempo nella forma

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{t^{n+1} - t^n}{\Delta\vartheta} + \rho c_p \mathbf{w}^n \cdot \nabla [\gamma t^{n+1} + (1 - \gamma)t^n] \\ = \lambda \nabla^2 [\gamma t^{n+1} + (1 - \gamma)t^n] \end{aligned} \quad (1.108)$$

che è suscettibile di soluzione immediata.

**1.7.2 Condizioni al contorno per la soluzione numerica**

Le condizioni al contorno per la soluzione numerica dei campi di velocità e temperatura non variano rispetto a quelle già illustrate per le equazioni differenziali non discretizzate. Così, le condizioni al contorno per l'equazione dell'energia sono date ancora dalle (1.28) - (1.31). Analogamente, le condizioni al contorno per le equazioni di Navier-Stokes sono date ancora dalle (1.73) - (1.76), e si applicano sia alle velocità vere e proprie sia alle velocità stimate.

Di conseguenza, con riferimento alla Fig. 1.10 ed alle condizioni al contorno per le velocità vere e proprie, si ha

$$u = u^* = u_e; \quad v = v^* = 0 \tag{1.109}$$

all'entrata orizzontale del fluido nel dominio,

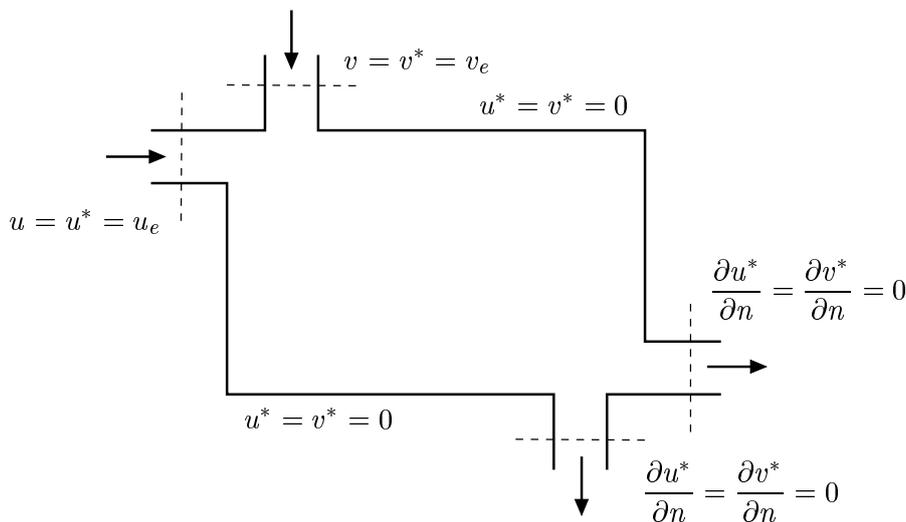
$$u = u^* = 0; \quad v = v^* = v_e \tag{1.110}$$

all'entrata verticale del fluido nel dominio,

$$u = v = u^* = v^* = 0 \tag{1.111}$$

sulle pareti solide di confine dove le velocità sono nulle, e

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial v^*}{\partial n} = 0 \tag{1.112}$$



**Figura 1.10:** Condizioni al contorno per le velocità stimate.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

all'uscita dal dominio.

La situazione cambia, invece, per le condizioni al contorno relative al campo delle pressioni di correzione. Le condizioni al contorno per l'equazione di Poisson modificata, infatti, rimangono del secondo tipo, ma devono essere calcolate in modo coerente alla definizione delle pressioni di correzione. Dall'Eq. (1.101) si ricava che dove le velocità sono note deve essere

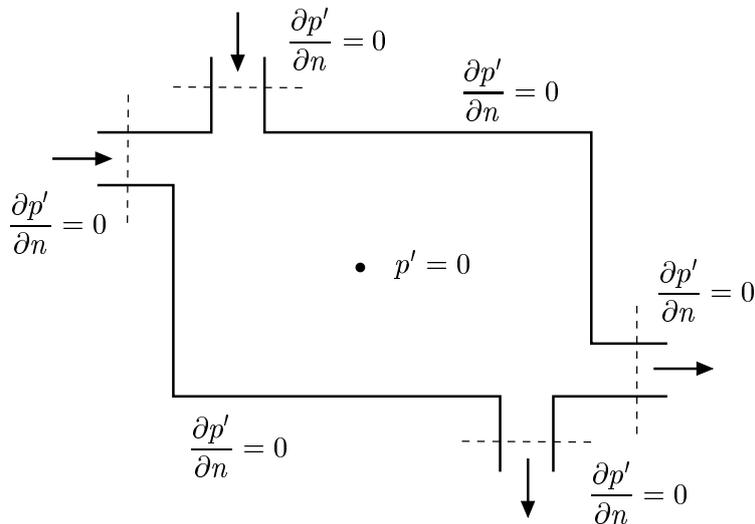
$$\nabla p' \cdot \mathbf{n} = -\rho \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^*}{\Delta\vartheta} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.113)$$

in quanto  $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^*$ . Pertanto, come indicato in Fig. 1.11, si ha

$$\nabla p' \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial p'}{\partial n} = 0 \quad (1.114)$$

sia sulle sezioni d'entrata, dove le velocità sono imposte, sia sulle pareti solide, dove le velocità sono nulle.

Sulle sezioni d'uscita è ancora possibile utilizzare la condizione al contorno (1.114), purché si forzi il rispetto del bilancio complessivo delle portate. Ciò si ottiene calcolando le portate all'ingresso, mediante integrazione delle distribuzioni note di velocità, e correggendo (in pratica scalando), la distribuzione delle velocità stimate, in modo da far tornare il bilancio complessivo delle portate. Una volta corretta, la distribuzione delle velocità stimate è utilizzata per il calcolo della divergenza al secondo membro dell'Eq. (1.104).



**Figura 1.11:** Condizioni al contorno per le pressioni di correzione.

## 1.7. ALGORITMI PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

Ovviamente, le sole condizioni al contorno del secondo tipo non sono sufficienti a determinare il livello delle pressioni di correzione, se non a meno di una costante additiva. Di conseguenza, al fine di eliminare l'ambiguità e fissare il livello di riferimento, occorre utilizzare anche la condizione del primo tipo

$$p' = 0 \quad (1.115)$$

in almeno un punto, scelto arbitrariamente nel dominio di calcolo come indicato in Fig. 1.11.

### 1.7.3 Significato fisico delle pressioni di stima e di correzione

Come si è già osservato in precedenza, la funzione di corrente non può essere definita in spazi tridimensionali. Al contrario, anche in tre dimensioni può essere definito un potenziale di velocità, purché il flusso sia irrotazionale. Supponiamo allora di voler cercare un campo irrotazionale di velocità di correzione per il quale esista un potenziale  $\phi$  che consenta il calcolo delle diverse componenti. In coordinate Cartesiane bidimensionali, ad esempio, si avrà

$$u' = -\frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad v' = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (1.116)$$

ovvero, con notazione vettoriale

$$\mathbf{w}' = -\nabla\phi \quad (1.117)$$

Sostituendo la (1.117) nella (1.101), passando alla divergenza, ed imponendo che, grazie alla correzione effettuata, alla fine del passo  $(n+1)$  sia soddisfatta l'equazione di continuità  $\nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} = 0$ , si ottiene

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \mathbf{w}^* \quad (1.118)$$

cioè un'equazione di Poisson modificata per il calcolo del potenziale di correzione  $\phi$ . Poiché l'Eq. (1.118) e l'Eq. (1.104) sono del tutto simili, la pressione di correzione  $p'$ , opportunamente scalata, può essere vista come la funzione potenziale  $\phi$  del campo di moto irrotazionale di correzione. Si può affermare, quindi, che sia la pressione di correzione  $p'$  sia il potenziale  $\phi$  del campo irrotazionale delle velocità di correzione, proiettano il campo delle velocità di stima  $\mathbf{w}^*$  (che non rispetta la continuità), in un campo di velocità  $\mathbf{w}^{n+1}$  (che rispetta la continuità).

### 1.8 CONVEZIONE TURBOLENTA

Le equazioni ricavate nei paragrafi precedenti hanno validità generale ed, in linea di principio, sono utilizzabili per tutti i problemi di convezione. Giunti a questo punto, però, conviene distinguere tra regimi di moto laminare e turbolento. Nel regime laminare, le perturbazioni tendono a smorzarsi e le particelle di fluido si muovono ordinatamente. Di conseguenza, il flusso può essere idealmente suddiviso in “lamine” adiacenti, che conservano la propria individualità spazio-temporale e si prestano ad essere modellate con l’impiego di griglie spazio-temporali non troppo fitte.

Il regime laminare, tuttavia, non si mantiene in tutte le situazioni di moto. Nel caso della convezione forzata, il passaggio dal regime laminare al regime turbolento avviene in corrispondenza a valori “critici” del numero di Reynolds, dipendenti dalla geometria del problema in esame. Analogamente, nel caso della convezione naturale la transizione tra regime laminare e regime turbolento avviene in corrispondenza a valori “critici” del numero di Grashof, dipendenti ancora dalla geometria del problema in esame.

Nel regime turbolento, le perturbazioni tendono ad amplificarsi e le particelle di fluido percorrono traiettorie così disordinate e variabili così rapidamente da rendere molto difficoltosa la determinazione puntuale, istante per istante, dei campi di velocità e di temperatura. Le osservazioni sperimentali, infatti, dimostrano la presenza di vortici in continua formazione, scomparsa ed aggregazione. Le dimensioni dei vortici più grandi sono confrontabili con le dimensioni del dominio, mentre le dimensioni dei vortici più piccoli sono dell’ordine dei millimetri. Analogamente, le fluttuazioni di velocità indotte dai vortici più grandi sono caratterizzate da periodi di diversi ordini di grandezza maggiori rispetto alle fluttuazioni di velocità indotte dai vortici più piccoli. Di conseguenza, le simulazioni dirette della turbolenza devono essere basate su moltissimi punti di calcolo per la discretizzazione spaziale, al fine di modellare i vortici più piccoli anche nei domini relativamente grandi. Analogamente, le simulazioni dirette devono usare intervalli molto ridotti per l’integrazione temporale, al fine di modellare le perturbazioni di più breve periodo.

Non sorprende, quindi, che le risorse di calcolo attualmente disponibili non consentano l’utilizzazione di simulazioni dirette per le applicazioni ingegneristiche. Per tali applicazioni, si preferisce ricorrere a descrizioni medie, temporali o spaziali, del campo termofluidodinamico, basate su griglie non troppo fitte e su un numero ragionevole di intervalli temporali. Tali descrizioni consentono, infatti, di “filtrare” le fluttuazioni locali ed a periodo più piccolo, senza però eliminare le variazioni del campo di moto che interessano zone più estese e risultano, quindi, più lente.

Come si vedrà meglio nel Capitolo 4, al fine di ottenere una descrizione “filtrata” dei fenomeni, utile ai fini pratici, è opportuno esprimere le variabili che compaiono

## 1.8. CONVEZIONE TURBOLENTE

nelle equazioni relative al campo termofluidodinamico in termini di somme di componenti medie e componenti fluttuanti. In questo modo, l'applicazione delle regole di combinazione delle componenti medie e fluttuanti consente di arrivare ad equazioni della continuità, dell'energia e di Navier-Stokes riferite ai soli valori medi di velocità, pressione e temperatura.

Il procedimento non è esente da complicazioni in quanto solo dall'equazione di continuità, riferita ai valori medi si ottiene un'espressione completamente analoga a quella di partenza. Al contrario, nelle equazioni di Navier-Stokes e nell'equazione dell'energia, riferite ai valori medi, i termini associati alle fluttuazioni vanno a modificare i coefficienti di trasporto, aumentando gli effetti della viscosità dinamica molecolare e della conduttività termica molecolare. Di conseguenza, per le equazioni mediate si parla di sforzi specifici totali e flussi termici specifici totali, intesi come somma di una componente molecolare e di una componente legata al mescolamento turbolento.

In sostanza tutto accade come se, nel caso del moto turbolento, le leggi costitutive di Stokes potessero venire scritte nella forma generalizzata

$$\mathbf{T}_{tot} = (\mu + \mu_t) [\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T] = \rho(\nu + \nu_t) [\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T] \quad (1.119)$$

dove  $\mathbf{w}$  rappresenta il vettore velocità media, mentre  $\mu$  e  $\nu$  sono, rispettivamente, la viscosità dinamica molecolare e la viscosità cinematica molecolare, e  $\mu_t$  e  $\nu_t$  sono, rispettivamente, la viscosità dinamica turbolenta e la viscosità cinematica turbolenta. Ovviamente, la viscosità dinamica molecolare e la diffusività cinematica molecolare sono proprietà del fluido, mentre la diffusività dinamica turbolenta e la diffusività cinematica turbolenta dipendono dal campo di moto.

Analogamente, si ammette che la legge costitutiva della trasmissione del calore per conduzione, cioè il postulato di Fourier, possa venire scritta nella forma generalizzata

$$\mathbf{q}_{tot}'' = -(\lambda + \lambda_t) \nabla t = -\rho c_p (a + a_t) \nabla t \quad (1.120)$$

dove  $t$  rappresenta la temperatura media, mentre  $\lambda$  ed  $a$  sono, rispettivamente, la conduttività termica molecolare e la diffusività termica molecolare, e  $\lambda_t$  ed  $a_t$  sono, rispettivamente, la conduttività termica turbolenta e la diffusività termica turbolenta. Ovviamente, la conduttività termica molecolare e la diffusività termica molecolare sono proprietà del fluido, mentre la conduttività termica turbolenta e la diffusività termica turbolenta dipendono dal campo di moto.

La diffusività cinematica turbolenta e la diffusività termica turbolenta non sono indipendenti tra loro. Entrambe sono legate, infatti, alle fluttuazioni della velocità e costituiscono, quindi, manifestazioni diverse dello stesso fenomeno vorticoso.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

Questa affermazione, di tipo intuitivo, è confermata dall'esperienza in quanto, nella maggior parte dei casi pratici, si ha

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{a_t} \cong 1 \quad (1.121)$$

dove  $\text{Pr}_t$  è detto numero di Prandtl turbolento.

La ricerca delle relazioni necessarie a determinare la diffusività cinematica turbolenta e l'omologa diffusività termica turbolenta è chiamata "formulazione dei modelli di turbolenza" e verrà trattata nel Capitolo 4. Una volta determinate la diffusività cinematica turbolenta e la diffusività termica turbolenta, le equazioni medie temporali di Navier-Stokes e dell'energia si presentano come le omologhe equazioni in regime laminare, solo con la diffusività variabile in maniera complessa da punto a punto. Pertanto, le metodologie di soluzione numerica impiegate per il regime laminare possono essere utilizzate, con poche modifiche, anche per il regime turbolento.

### 1.9 SOMMARIO

In questo capitolo sono stati trattati i problemi connessi alla determinazione del campo termico e del campo di moto nei processi di convezione.

- Per arrivare all'equazione differenziale alle derivate parziali che governa la distribuzione della temperatura nei mezzi fluidi, si sono utilizzati i principi di conservazione della massa e dell'energia, oltre alle equazioni costitutive che legano la distribuzione dei flussi termici specifici alle temperature.
- Per risolvere l'equazione dell'energia è richiesta la conoscenza del campo di moto e, di conseguenza, la determinazione del campo di moto costituisce parte integrante delle analisi di convezione.
- Per arrivare alle equazioni differenziali alle derivate parziali di Navier, valide per tutti i fluidi, si è partiti dal principio di conservazione della quantità di moto e si sono espresse in maniera opportuna le forze agenti su un generico volume fluido.
- Si è poi tenuto conto delle leggi costitutive di Stokes che, nei fluidi newtoniani, legano la distribuzione degli sforzi viscosi alle velocità di deformazione.
- Sostituendo le leggi di Stokes nelle equazioni di Navier, si sono ottenute le equazioni di Navier-Stokes, nelle quali gli sforzi sono espressi unicamente in termini di gradienti della velocità e di proprietà fisiche del fluido.

- Al fine di definire il ruolo della pressione nel moto dei fluidi incomprimibili, si sono introdotte le equazioni del moto scritte in termini di funzione di corrente e vorticità e si è ricavata l'equazione di Poisson per la pressione.
- Si è illustrato un algoritmo, sviluppato nel continuo, adatto alla soluzione numerica dei problemi di convezione, qualunque sia la tecnica di discretizzazione spaziale impiegata. Tale algoritmo si basa su modificazioni intuitive delle equazioni del moto, e può essere considerato una vera e propria procedura d'approssimazione delle equazioni del moto.
- Dopo aver scritto le equazioni che governano il campo termofluidodinamico, si sono discusse in dettaglio le condizioni al contorno da impiegare con le equazioni di Poisson modificate, ed il significato fisico delle pressioni di stima e di correzione.
- Nel regime turbolento, si è fatto riferimento alle equazioni mediate del campo termico e del campo di moto, in modo da escludere dalle analisi le fluttuazioni connesse all'apparire ed allo scomparire caotico di perturbazioni locali di breve periodo. In questo modo, però, si sono introdotte le variabili aggiuntive rappresentate dalla viscosità cinematica turbolenta e dalla diffusività termica turbolenta. Tali variabili devono essere determinate in base ad opportuni modelli di turbolenza.
- In ultima analisi, la soluzione delle equazioni del moto in variabili primitive, velocità e pressione, consiste nella determinazione di tutte le incognite, ovvero: componenti di velocità, pressione e, nel regime turbolento, anche viscosità cinematica turbolenta. Le equazioni disponibili sono: l'equazione di continuità, le equazioni di Navier-Stokes ed, in regime turbolento, il modello prescelto per il calcolo della viscosità cinematica turbolenta.
- Analogamente, la soluzione dell'equazione dell'energia consiste nella determinazione delle temperature ed, in regime turbolento, anche della diffusività termica turbolenta. Le equazioni disponibili sono l'equazione dell'energia stessa ed, in regime turbolento, una relazione tra diffusività termica turbolenta e diffusività cinematica turbolenta.

## 1.10 APPENDICE

In questo capitolo, le espressioni compatte delle equazioni di conservazione e trasporto sono state scritte con notazione vettoriale. Per chi si occupa in prevalenza di elementi finiti, tuttavia, le notazioni matriciali risultano, per necessità, più familiari

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

(in quanto tipiche di quelle tecniche di discretizzazione) mentre, al contrario, le notazioni vettoriali appaiono, talvolta, poco chiare a causa, ad esempio, della gran varietà di simboli adottati in letteratura per descriverle. D'altra parte, le notazioni vettoriali hanno il pregio dell'estrema sinteticità e, di conseguenza, si prestano meglio delle notazioni matriciali alla scrittura delle equazioni che governano i processi.

Al fine di conciliare le esigenze, ugualmente importanti, di chiarezza e sintesi, in questa Appendice si sono richiamate in dettaglio tutte le rappresentazioni matriciali delle operazioni vettoriali a cui si è fatto riferimento nel testo, seguendo un percorso logico che va dalle più semplici alle più complesse. Ciò ha comportato, inevitabilmente, alcune ripetizioni delle quali ci scusiamo.

### 1.10.1 Convenzioni e regole

Nelle rappresentazioni matriciali, un vettore  $\mathbf{w}$  va trattato come una matrice di una sola colonna scritta nella forma

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.122)$$

mentre la trasposta  $\mathbf{w}^T$  dello stesso vettore va trattata come una matrice di una sola riga scritta nella forma

$$\mathbf{w}^T = [ u \quad v ] \quad (1.123)$$

- Prodotto scalare  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$

Attese le convenzioni (1.122) e (1.123), la rappresentazione matriciale del prodotto scalare di un vettore per se stesso è

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \equiv \mathbf{w}^T \mathbf{w} = [ u \quad v ] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = u^2 + v^2 \quad (1.124)$$

e, come deve essere, ha per risultato uno scalare.

- Prodotto diadico  $\mathbf{w}\mathbf{w}$

Per contro, la rappresentazione matriciale del prodotto diadico di un vettore per se stesso è

$$\mathbf{w}\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}\mathbf{w}^T = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} [ u \quad v ] = \begin{bmatrix} uu & uv \\ vu & vv \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

e, come deve essere, ha per risultato un tensore (ovvero una matrice quadrata ottenibile attraverso un'operazione su due vettori).

- Prodotto misto  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  di un vettore  $\mathbf{n}$  per un tensore  $\mathbf{T}$

Più complesso da rappresentare in forma matriciale è il prodotto misto di un vettore per un tensore, dal quale si ottiene per risultato un vettore. Si faccia riferimento, ad esempio, al prodotto misto  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  del vettore normale ad una superficie

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (1.126)$$

per il tensore degli sforzi agenti sulla superficie stessa

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

La rappresentazione matriciale di tale prodotto è

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} &\equiv (\mathbf{n}^T \mathbf{T})^T = \left( \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{yx} & n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{Bmatrix} n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{yx} \\ n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.128)$$

e, come deve essere, ha per risultato un vettore.

### 1.10.2 Operatore nabra

L'operatore nabra  $\nabla$  ricorre con grande frequenza nelle espressioni compatte delle equazioni di conservazione e trasporto. Esso può venire considerato un vettore e, come tale, essere rappresentato mediante la matrice di una sola colonna

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.129)$$

- Prodotto  $\nabla t$

Il prodotto  $\nabla t$ , dove  $t$  è una funzione scalare (come, ad esempio, la temperatura), va trattato come prodotto di un vettore per uno scalare. Il risultato è un vettore

$$\nabla t = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} t = \begin{Bmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.130)$$

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

che coincide, a meno del verso, con il gradiente della funzione scalare.

Dalla definizione di divergenza di un campo vettoriale e dall'applicazione delle regole enunciate nel paragrafo precedente, scaturiscono alcuni risultati importanti.

- Prodotto scalare  $\nabla \cdot \mathbf{w}$

Dalla regola (1.124) si deduce che il prodotto scalare del vettore nabla per il vettore velocità può essere rappresentato nella forma matriciale

$$\nabla \cdot \mathbf{w} \equiv \nabla^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.131)$$

e, di conseguenza, ha per risultato uno scalare.

- Prodotto scalare  $\nabla \cdot \nabla$

Ancora dalla regola (1.124) si deduce che il prodotto scalare del vettore divergenza per se stesso può essere rappresentato nella forma matriciale

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^T \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2 \quad (1.132)$$

e, di conseguenza, ha per risultato l'operatore scalare  $\nabla^2$ , comunemente definito "laplaciano".

- Prodotto diadico  $\nabla \mathbf{w}$

Dalla regola (1.125), si deduce che il prodotto diadico del vettore divergenza per il vettore velocità può essere rappresentato nella forma matriciale

$$\nabla \mathbf{w} \equiv \nabla \mathbf{w}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} [ u \quad v ] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

e, di conseguenza, ha per risultato un tensore.

- Prodotto misto  $\nabla \cdot \mathbf{T}$

Dalla regola (1.128), si deduce che il prodotto misto del vettore divergenza per

il tensore degli sforzi può essere rappresentato nella forma matriciale

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{T} &\equiv (\nabla^T \mathbf{T})^T = \left( \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{array} \right] \right)^T \\
 &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{array} \right]^T \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{1.134}$$

e, di conseguenza, ha per risultato un vettore.

- Prodotto misto  $\nabla \cdot (\mathbf{w}\mathbf{w})$

Ancora dalla regola (1.128) si deduce che il prodotto misto del vettore divergenza per il tensore originato dal prodotto diadico del vettore velocità per se stesso può essere rappresentata nella forma matriciale

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mathbf{w}\mathbf{w}) &\equiv (\nabla^T (\mathbf{w}\mathbf{w}))^T = \left( \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} uu & uv \\ vu & vv \end{array} \right] \right)^T \\
 &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} & \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \end{array} \right]^T \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \\ \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{1.135}$$

e, di conseguenza, ha per risultato un vettore.

- Prodotto misto  $\mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{w})$

Sempre dalla regola (1.128) si deduce che il prodotto misto del vettore velocità per il tensore originato dal prodotto diadico della divergenza per il vettore

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

velocità può essere rappresentata nella forma matriciale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{w}) &\equiv (\mathbf{w}^T (\nabla \mathbf{w}))^T = \left( \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.136}
 \end{aligned}$$

e, di conseguenza, ha per risultato un vettore.

- Prodotto misto  $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{w})$

Dalla regola (1.128), infine, si deduce che il prodotto misto della divergenza per il tensore originato dal prodotto diadico della divergenza per il vettore velocità può essere rappresentata nella forma matriciale

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla \mathbf{w}) &\equiv (\nabla^T (\nabla \mathbf{w}))^T = \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \tag{1.137}
 \end{aligned}$$

e, di conseguenza, ha per risultato un vettore.

**Esempio 1.1** Con riferimento ai risultati sin qui ottenuti si verifichi che, nelle ipotesi di validità della relazione:  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ , si ha:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{w})^T = 0$$

**Soluzione**

Dalla (1.133) si ricava la rappresentazione matriciale del prodotto diadico

$$\nabla \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

e, di conseguenza, la rappresentazione matriciale della trasposta del prodotto diadico viene ottenuta dalla relazione precedente attraverso un semplice scambio righe per colonne

$$(\nabla \mathbf{w})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Con riferimento all'espressione di  $(\nabla \mathbf{w})^T$  ed alla relazione (1.137), si ricava subito

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{w})^T &= \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si noti che, nel passaggio dalla trasposta della matrice riga del terzo membro al vettore colonna del quarto membro, si è invertito l'ordine di derivazione delle derivate miste, in quanto è ragionevole assumere che le derivate seconde delle velocità siano funzioni continue.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

**Esempio 1.2** Con riferimento ai risultati sin qui ottenuti si verifichi che, nelle ipotesi di validità della relazione:  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  e di viscosità costante, si ha:

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{w} = 0$$

### Soluzione

Se la viscosità è costante, dalla (1.62) si ha

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

e di conseguenza risulta

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \cdot \nabla \mathbf{w}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si noti che, anche in questo caso, nel passaggio dal secondo al terzo membro si è invertito l'ordine di derivazione.

**Esempio 1.3** Con riferimento ai risultati sin qui ottenuti si verifichi che, nelle ipotesi di validità della relazione:  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ , si ha:

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}) = 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

### Soluzione

Si noti che, nelle ipotesi poste, risulta

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

e, dalla (1.47), si ottiene

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Di conseguenza risulta

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Si noti che, nel passaggio dal secondo al terzo membro, si sono invertiti gli ordini di derivazione e si è utilizzata la relazione:  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ .

## 1.11 NOMENCLATURA

$a$	diffusività termica
$c$	calore specifico
$c_p$	calore specifico a pressione costante
$c_v$	calore specifico a volume costante
$\mathbf{f}$	tensore degli sforzi
$\mathbf{F}$	forza
$\mathbf{g}$	vettore accelerazione di gravità
$Gr$	numero di Grashof
$h$	entalpia specifica
$H$	altezza
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	versori degli assi di riferimento Cartesiani
$\mathbf{J}''$	vettore flusso specifico convettivo
$L$	lunghezza di riferimento
$m$	massa
$\dot{m}$	portata di massa
$\mathbf{n}$	normale alla superficie orientata verso l'esterno
$n_x, n_y$	coseni direttori di $\mathbf{n}$
$p$	pressione
$\tilde{p}$	(spesso solo $p$ ) pressione depurata dalla componente idrostatica
$Pr$	numero di Prandtl
$q$	flusso termico
$q''$	flusso termico specifico
$\mathbf{q}''$	vettore flusso termico specifico
$\dot{q}$	potenza termica generata per unità di volume
$R$	costante dei gas
$Re$	numero di Reynolds
$t$	temperatura relativa
$T$	temperatura assoluta

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

$u, v$	componenti Cartesiane del vettore velocità
$U$	energia interna
$\hat{u}$	energia interna specifica
$V$	volume
$\mathbf{w}$	vettore velocità
$x, y, z$	coordinate Cartesiane
$\alpha$	coefficiente di convezione
$\beta$	coefficiente di dilatazione volumica
$\gamma$	fattore di pesata temporale
$\Delta\vartheta$	passo di tempo
$\phi$	potenziale di velocità
$\dot{\phi}$	lavoro delle forze di attrito per unità di volume
$\vartheta$	tempo
$\lambda$	conducibilità termica
$\mu$	viscosità dinamica
$\nu$	viscosità cinematica
$\rho$	densità
$\sigma$	sforzo normale
$\tau$	sforzo tangenziale
$\psi$	funzione di corrente
$\omega$	vorticità
<b>Pedici</b>	
$e$	entrata
$f$	fluido
$n$	direzione normale
$p$	pressione costante
$s$	direzione tangenziale
$t$	turbolento
$u$	uscita
$v$	volume costante
$x, y, z$	in direzione $x, y, z$
$0$	riferimento
<b>Apici</b>	
$n$	numero dei passi temporali
$T$	trasposta
$\bar{z}$	valore medio della variabile $z$
$z'$	valore di correzione della variabile $z$
$z^*$	valore di tentativo della variabile $z$

## 1.12 BIBLIOGRAFIA

- Bird, R.B., Stewart, W.E. e Lightfoot, E.N. (1960), *Transport Phenomena*, Wiley, New York.
- Chorin, A.J. e Marsden, J.E. (1993), *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- Comini, G. e Del Giudice, S. (1982), Finite-Element Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 5, pp. 463-478.
- Comini, G. e Del Giudice, S. (1985), A  $(k,\epsilon)$  Model of Turbulent Flow, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 133-147.
- Comini, G. e Del Giudice, S. (1987), Pressure-Velocity Coupling in Incompressible Fluid Flow, in *Annual Review of Numerical Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Vol. 1, (Edito da Chawla, T.H.), pp. 33-46, Hemisphere, Washington, D.C.
- Comini, G. e Del Giudice, S. (1988), Parabolic Systems: Finite Element Method, in *Handbook of Numerical Heat Transfer*, (Edito da Minkowycz, W.J., Sparrow, E.M., Schneider, G.E. e Pletcher, R.H.), pp. 155-181, Wiley, New York.
- Comini, G., Del Giudice, S. e Nonino, C. (1994), *Finite Element Analysis in Heat Transfer*, Taylor&Francis, Washington, D.C.
- Comini, G., Minkowycz, W.J. e Shyy, W. (1997), General Algorithms for the Finite Element Solution of Incompressible Flow Problems Using Primitive Variables, in *Advances in Numerical Heat Transfer*, Vol. 1, (Edito da Minkowycz, W.J. e Sparrow, E.M.), pp. 137-169, Taylor&Francis, Washington, D.C.
- Comini, G. e Cortella, G. (2000), Streamfunction-Vorticity Formulation of Incompressible Flow and Heat Transfer Problems, in *Computational Analysis of Convection Heat Transfer*, (Edito da Sundén, B. e Comini, G.), pp. 35-70, WIT, Southampton, U.K.
- Comini, G. e Cortella, G. (2005), *Fondamenti di Trasmissione del Calore*, SGE, Padova.
- Croce, G., Comini, G. e Shyy, W. (2000), Incompressible Flow and Heat Transfer Computations Using a Continuous Pressure Equations and Nonstaggered Grids, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 38, pp. 291-307.
- Ferziger, J.H. e Peric, M. (1999), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlino.

## 1. EQUAZIONI DELLA CONVEZIONE

---

- Fox, R.W. e McDonald, A.T. (1994), *Introduction to Fluid Mechanics*, Wiley, New York.
- Glowinski, R. (1984), *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer, Berlino.
- Gresho, P.M. e Sani, R.L. (1998), *Incompressible Flow and the Finite Element Method*, Wiley, Chichester, U.K.
- Nonino, C. e Comini, G. (1997), An Equal-Order Velocity-Pressure Algorithm for Incompressible Thermal Flows. Part 1: Formulation, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 32, pp. 1-15.
- Nonino, C. (2003), A Simple Pressure Stabilization for a SIMPLE-like Equal-Order FEM Algorithm, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 44, pp. 61-81.
- Patankar, S.V. e Spalding, D.B. (1972), A Calculation Procedure for Heat Mass and Momentum Heat Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1806.
- Patankar, S.V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D.C.
- Roache, P.J. (1982), *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M.
- Rodi, W. (1980), *Turbulence Models and Their Application to Hydraulics*, International Association for Hydraulic Research, Delft, Olanda.
- Schlichting, H. (1979), *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York.

## Capitolo 2

# Convezione nei fluidi incomprimibili: analisi ai volumi finiti

E. Nobile

### 2.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo verrà illustrato il metodo dei volumi finiti, limitatamente all'analisi numerica della convezione nei fluidi incomprimibili. In particolare, verranno dapprima esaminate in dettaglio le metodologie fondamentali nella soluzione della generica equazione di conservazione (della quantità di moto, dell'energia *etc*), passando successivamente all'analisi del problema termofluidodinamico completo, comprensivo quindi dell'equazione di conservazione della massa.

Saranno considerate dapprima griglie di tipo Cartesiano in domini bidimensionali, accennando alle modifiche necessarie per il caso più generale di griglie Cartesiane in problemi tridimensionali. Il caso monodimensionale, di interesse per alcune applicazioni, è particolarmente semplice, e quindi la sua derivazione è lasciata al lettore. Visto il carattere introduttivo della trattazione, il metodo dei volumi finiti per geometrie complesse verrà trattato, con riferimento alle griglie non strutturate, limitatamente al caso della generica equazione di trasporto.

Il metodo dei volumi finiti, che nel seguito per brevità indicheremo anche con FVM (da Finite Volume Method), è talvolta chiamato metodo dei volumi di controllo (Control Volume Method), e, meno frequentemente, Central Integration Method. Nel metodo dei volumi finiti le equazioni algebriche sono ottenute esprimendo, in forma integrale, l'equazione di bilancio su ciascun volume di controllo (o cella), ottenendo

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

così tante equazioni algebriche quanti sono i volumi di controllo con i quali è stato suddiviso il dominio di interesse. Si tratta di un metodo particolarmente popolare, soprattutto nell'ambito della termofluidodinamica computazionale, come comprovato dal fatto che esso costituisce l'approccio adottato in numerosi prodotti di CFD (Computational Fluid Dynamics) commerciali. Tale popolarità deriva, come si vedrà, dalla semplicità e soprattutto dalla chiara corrispondenza fisica fra il metodo stesso ed i principi di conservazione. Ciò ha contribuito a rendere il FVM spesso il metodo più adottato per introdurre, in modo *indolore*, l'approccio numerico nello studio della trasmissione del calore e della termofluidodinamica. L'intrinseca semplicità e corrispondenza fisica del metodo, peraltro, presenta alcuni vantaggi molto importanti, ma anche dei limiti affatto trascurabili, in particolare per alcune tipologie di applicazioni.

### 2.2 L'EQUAZIONE DI TRASPORTO

Abbiamo visto nel Capitolo 1, trattando delle equazioni della convezione, che tutte le equazioni di conservazione hanno una struttura simile, con la doverosa eccezione dell'equazione di conservazione della massa, equazione (1.5), sulla quale torneremo nel seguito. Per comodità, riportiamo qui nuovamente l'equazione dell'energia (1.26) in forma conservativa, completa dell'eventuale generazione interna di calore:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho c_p t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} c_p t) = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \dot{q} \quad (2.1)$$

e quella di conservazione della quantità di moto (1.69), sempre in forma conservativa:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \mathbf{w}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w}) - \rho \beta (t - t_0) \mathbf{g} \quad (2.2)$$

dove, in linea con la pratica corrente, nella (2.2) è stata omessa la tilde sopra il simbolo della pressione, sottintendendo il riferimento alla pressione depurata dalla componente idrostatica.

Dalla osservazione di queste due equazioni – peraltro analoghe nella forma a molte altre, quali la conservazione delle specie chimiche, l'equazione di trasporto dell'energia cinetica turbolenta *etc* – si nota che possono venire scritte nella forma generale:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + s \quad (2.3)$$

o, in altre parole:

$$\text{Accumulo} + \text{Convezione} = \text{Diffusione} + \text{Sorgente}$$

dove, nella (2.3),  $\phi$  è un generico scalare (es. temperatura, componente di velocità, concentrazione), ed il simbolo  $\Gamma$  rappresenta la proprietà di trasporto molecolare per lo scalare stesso.

Va anche osservato che non necessariamente tutti i flussi diffusivi possono venire rappresentati come *gradiente* della variabile relativa. In tali casi, come si vedrà nel seguito, tutto o parte del flusso diffusivo verrà espresso come sorgente, costituendo quindi un contributo al termine  $s$ .

Ad esempio, nel caso dell'equazione dell'energia (2.1) per fluidi incomprimibili con calore specifico  $c$  costante,  $\phi$  rappresenta l'entalpia specifica  $ct$ ,  $\Gamma$  è dato da  $\lambda/c$ , ed il termine sorgente,  $s$ , include l'eventuale generazione interna di calore. Per ciò che riguarda la quantità di moto, poiché questa è una grandezza vettoriale, vanno considerate le equazioni di conservazione delle sue componenti (scalari) che, nel caso di coordinate Cartesiane bidimensionali, sono espresse, sempre in forma conservativa, dalle (1.71). Con tale premessa, per l'equazione della quantità di moto,  $\phi$  rappresenta la componente di velocità,  $\Gamma$  è la viscosità dinamica  $\mu$  ed il termine sorgente include, oltre al gradiente di pressione, anche le forze di galleggiamento, se presenti, ed eventuali altri campi di forze.

Sulla base di questa osservazione sarà sufficiente considerare dapprima la soluzione della generica equazione di trasporto (2.3), per passare successivamente alla soluzione delle equazioni di Navier-Stokes e di continuità. In tale fase, si assumeranno noti il campo delle velocità  $w$ , le proprietà termofisiche  $\rho$  e  $\Gamma$ , ed il termine sorgente  $s$ . Nel caso in cui il campo delle velocità sia incognito, come accade per le equazioni di Navier-Stokes, il problema diventa più complesso, avendo da risolvere equazioni accoppiate non lineari, e verrà trattato al punto 2.7. In pratica si vedrà che la procedura descritta per un generico scalare  $\phi$  non differisce molto da quella adottata nel caso in cui questo rappresenti proprio una delle componenti della velocità. Infatti, anche nel caso di procedura di calcolo di tipo implicito, il processo iterativo fissa i valori della velocità, nei termini convettivi non lineari, all'iterazione precedente, mentre nel caso di integrazione temporale di tipo esplicito il termine convettivo viene opportunamente linearizzato utilizzando valori di velocità combinazione di quelli, già noti, agli istanti precedenti.

## 2.3 L'IDEA DI BASE

L'idea alla base del metodo dei volumi finiti è quella di utilizzare la formulazione integrale, o *finita*, dell'equazione di conservazione (2.3), scritta per un generico *volume*

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

di controllo  $V$ :

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) - s \right] dV = 0 \quad (2.4)$$

L'applicazione del teorema di Gauss, con  $A$  superficie del volume  $V$ , consente poi di esprimere la (2.4) come:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) dV + \int_A \rho \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V s dV \quad (2.5)$$

ed in forma più compatta:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) dV + \int_A \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} dA = \int_V s dV \quad (2.6)$$

dove, in analogia con quanto visto nel Capitolo 1 (v. equazione (1.13)), con  $\mathbf{J}''$  indichiamo il vettore *flusso specifico* della variabile  $\phi$ , comprensivo del flusso convettivo,  $\mathbf{J}''_c$ , e diffusivo,  $\mathbf{J}''_d$ , e quindi  $J'' = \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n}$  rappresenta la componente del flusso in direzione normale alla superficie:

$$\mathbf{J}'' = \mathbf{J}''_c - \mathbf{J}''_d = \rho \phi \mathbf{w} - \Gamma \nabla \phi \quad (2.7)$$

$$J'' = \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} = \rho \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \quad (2.8)$$

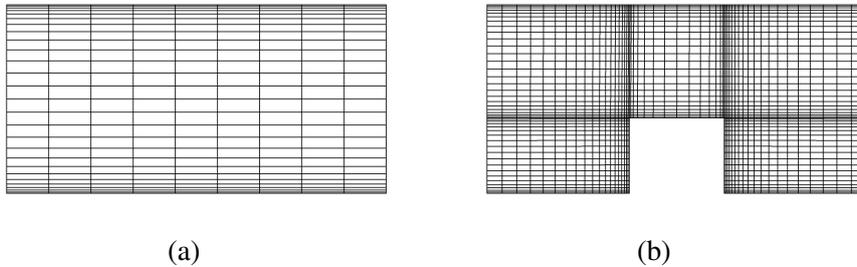
A questo punto, osservando la (2.5), appare evidente che abbiamo rifatto, in senso inverso, il percorso utilizzato per ricavare le espressioni differenziali delle equazioni di conservazione. Ci si potrebbe chiedere, quindi, se tale processo poteva essere evitato, utilizzando dall'inizio le equazioni di conservazione scritte nella loro formulazione generale macroscopica. Tale approccio, che evita di utilizzare la formulazione differenziale e ricava *direttamente* le equazioni discretizzate partendo dalla formulazione *finita*, è stato proposto con il nome di *Metodo delle Celle*, a cui si rimanda per ulteriori informazioni.

### 2.3.1 La griglia di calcolo

Prima di procedere alla descrizione delle griglie di calcolo considerate in questo capitolo, procediamo alla distinzione delle diverse tipologie di griglie adottate, con il metodo dei volumi finiti, per la discretizzazione spaziale.

### Griglie strutturate Cartesiane

In figura 2.1 sono riportati due esempi di griglie strutturate Cartesiane. Si tratta di griglie costituite da famiglie, mutuamente ortogonali, di rette parallele. Ciò consente di numerare, e quindi individuare, con numeri consecutivi le linee di ciascuna famiglia o, nel caso dei volumi finiti, le *celle* definite da tali linee. Usualmente ciò avviene mediante un set di due indici  $(i, j)$  in due dimensioni, o di tre indici  $(i, j, k)$  in tre dimensioni. La flessibilità geometrica è molto limitata sebbene, come rappresentato in figura 2.1-b, l'uso di più *blocchi* contigui consenta di trattare domini costituiti dall'unione di rettangoli, in due dimensioni, o di parallelepipedi in tre dimensioni. I metodi di calcolo basati su tali griglie sono i più semplici da implementare, ed anche i più efficienti dal punto di vista computazionale.

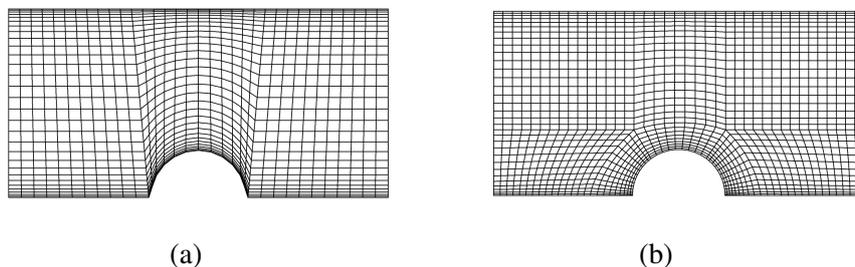


**Figura 2.1:** Griglie strutturate Cartesiane: (a) monoblocco; (b) multiblocco.

### Griglie strutturate curvilinee

Le griglie strutturate curvilinee sono costituite da famiglie di linee curvilinee, nelle quali ciascuna linea di una famiglia non interseca mai una linea della stessa famiglia, ed interseca una sola volta le linee delle altre famiglie. Dal punto di vista logico sono identiche alle griglie Cartesiane, sebbene la non-ortogonalità introduca maggiori complessità nell'implementazione, e quindi maggiori costi computazionali. Come illustrato nell'esempio di figura 2.2-a, esse sono caratterizzate da maggiore flessibilità geometrica rispetto alle precedenti, ed infatti è possibile notare che un solo *blocco* è sufficiente a descrivere un dominio che non può venire discretizzato attraverso griglie Cartesiane. La flessibilità geometrica, e la qualità della griglia (cfr. punto 2.9), aumenta utilizzando più blocchi contigui, come illustrato, per il medesimo dominio, in figura 2.2-b. Sino ad alcuni anni fa, erano disponibili codici commerciali basati esclusivamente su tali griglie, ma attualmente i moderni programmi di CFD industriale sono tutti basati su griglie non strutturate. Esiste una variante, più economica ed in generale anche più accurata, in cui le famiglie di linee sono mutuamente ortogonali, ma essa è meno flessibile dal punto di vista geometrico.

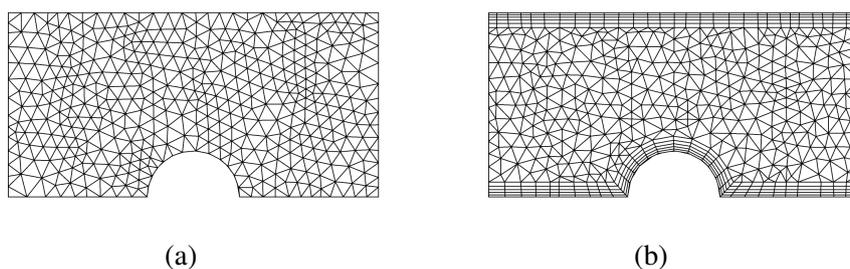
## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI



**Figura 2.2:** Griglie strutturate curvilinee: (a) monoblocco; (b) multiblocco.

### Griglie non-strutturate

Sono le griglie più flessibili, e quindi in generale le più adatte a trattare le geometrie complesse di interesse industriale. La griglia non è più definita da famiglie di linee, ma piuttosto il dominio è suddiviso in elementi, o celle, di forma arbitraria, tipicamente triangoli o quadrilateri in 2D, come illustrato in figura 2.3 e tetraedri ed esaedri in 3D. Oltre alla flessibilità geometrica, il vantaggio di tali griglie è costituito dalla facilità con la quale è possibile addensare la griglia nelle zone di interesse, anche in modo automatico durante il processo di soluzione (*griglie adattive*). Lo svantaggio principale è costituito dalla maggiore complessità nell'implementazione e dal maggiore onere computazionale. La flessibilità e l'accuratezza delle griglie non strutturate, come si vedrà nel seguito (cfr. 2.9.11), aumenta con l'adozione di *griglie ibride*, griglie cioè nelle quali in prossimità delle pareti solide si utilizzano rettangoli, in 2D, e prismi o esaedri in 3D. Un esempio di griglia ibrida è riportato in figura 2.3-b.



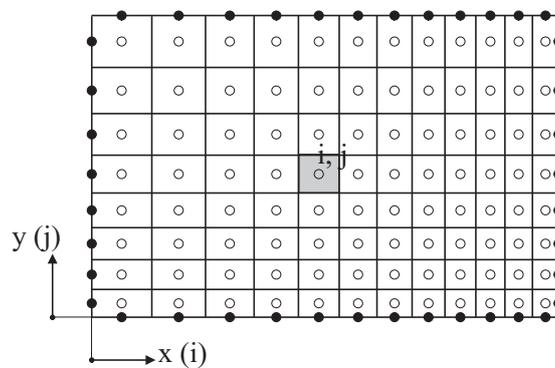
**Figura 2.3:** Griglie non strutturate: (a) a triangoli; (b) ibrida.

Nel seguito ci limiteremo a considerare dapprima geometrie di tipo semplice, cioè rettangoli in due dimensioni e parallelepipedi in tre dimensioni, descritti per mezzo di griglie strutturate Cartesiane. Successivamente, al punto 2.9, verranno affrontate,

nei loro aspetti fondamentali, le griglie non strutturate.

### 2.3.2 Griglie Cartesiane per il metodo dei volumi finiti

Nel metodo dei volumi finiti il dominio viene quindi suddiviso in un numero finito di volumi di controllo (VC per brevità nel seguito), facendo uso di una griglia di calcolo di tipo Cartesiano, come illustrato in figura 2.4 nel caso bidimensionale.



**Figura 2.4:** Griglia di calcolo.

È opportuno notare che la griglia, in contrasto con il metodo delle Differenze Finite, definisce le *facce* dei VC, e non i *nodi* sui quali verranno definite le grandezze incognite. Come rappresentato in figura 2.4, l'approccio più comune è quello di posizionare i nodi, sui quali sono collocate le variabili incognite, nei centri dei VC, sebbene esiste anche un'altra variante, meno comune ed utilizzabile solo per griglie strutturate, che consiste nell'individuare dapprima la posizione dei nodi, e successivamente posizionare, ad uguale distanza da questi, le facce dei VC. Il vantaggio del primo approccio è l'accuratezza maggiore (secondo ordine) nell'utilizzare il valore nodale quale *media* per il relativo VC, poiché il nodo si trova proprio nel *centro* della cella. Viceversa, nel secondo approccio, risulta più accurata la valutazione delle derivate prime sulle facce dei VC (vedi punto 2.4.3). In figura (2.4) i nodi al centro dei VC sono indicati con 'o', mentre i nodi sui quali vengono applicate le condizioni al contorno sono rappresentati dal simbolo '•'. Data la maggiore popolarità del primo metodo, e la sua naturale estensione alle griglie non strutturate, questo verrà utilizzato nel corso di tutto il capitolo.

## 2.4 DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE

L'equazione di conservazione (2.5), scritta in forma integrale, può venire applicata a qualunque volume di controllo arbitrario, ed in particolare ad ogni VC. Infatti, sommando le equazioni ottenute per tutti i VC che costituiscono l'intero dominio di calcolo, si ottiene nuovamente l'equazione di conservazione *globale* per tutto il dominio, poiché i flussi su ciascuna faccia dei VC si cancellano, dato che vengono valutati con segno diverso nei due VC adiacenti. Tale proprietà, naturalmente, si verifica solo se la procedura di valutazione dei flussi sulle facce è *univoca*, cioè non varia se la faccia è considerata pertinente ad uno o all'altro dei due VC a cui appartiene. Sebbene tale proprietà, chiamata talvolta *proprietà telescopica*, sembri ovvia, è utile ricordare che, nel caso di griglie non strutturate arbitrarie *co-locate*, è necessario adottare alcuni stratagemmi per rispettare tale importante requisito, che costituisce la base, ed il vantaggio principale, del metodo dei volumi finiti.

La discretizzazione con il metodo dei volumi finiti, al fine di ottenere un'equazione algebrica per ogni VC, richiede di approssimare numericamente gli integrali di superficie e di volume che appaiono nell'equazione (2.5). Inoltre sarà necessario anche adottare delle opportune tecniche di interpolazione, per esprimere il valore di alcune grandezze in punti diversi da quelli in cui sono collocate. Vediamo quindi nel dettaglio tali tecniche, limitandoci per ora a considerare il caso stazionario, per il quale l'equazione (2.5) si semplifica nella:

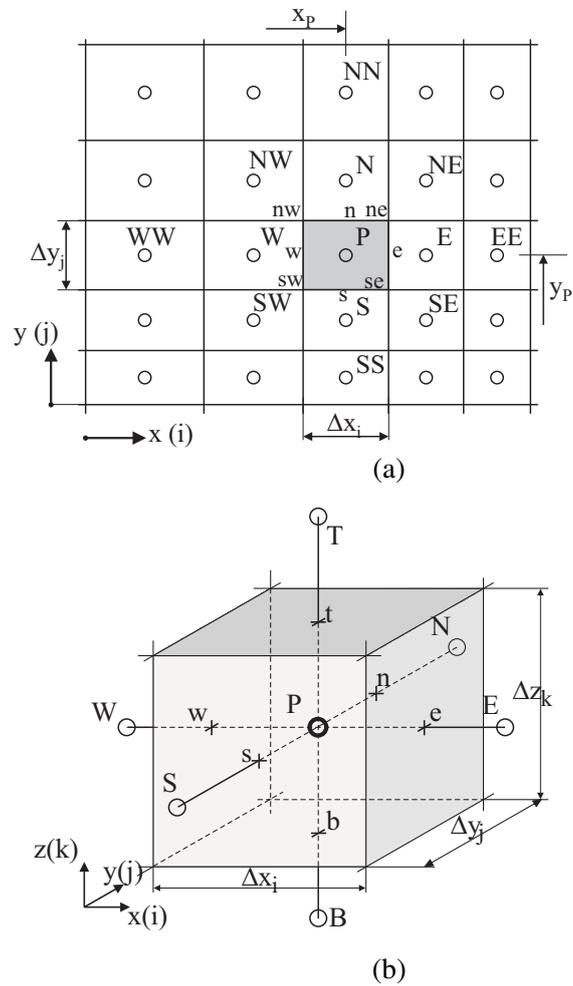
$$\int_A \rho \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_A \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_V s \, dV \quad (2.9)$$

### 2.4.1 Integrali di superficie

In figura 2.5 sono rappresentati due tipici VC ottenuti, rispettivamente nel caso bidimensionale (2D) e tridimensionale (3D), da una griglia Cartesiana, assieme alla notazione che sarà adottata nel seguito. Nel caso bidimensionale, figura 2.5-a, la superficie del VC è costituita da quattro facce, individuate con le lettere minuscole  $e$ ,  $w$ ,  $n$ ,  $s$ , indicative dell'orientamento della normale esterna della faccia. Analogamente, nel caso tridimensionale le sei facce sono indicate con  $e$ ,  $w$ ,  $n$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $b$ . I vertici dei VC sono indicati, per semplicità di rappresentazione grafica solo nel caso 2D, con le lettere minuscole corrispondenti alle due facce (tre nel caso 3D) che individuano il vertice, ad esempio  $ne$  indica il vertice individuato dalle facce  $n$  ed  $e$ . Il nodo del VC in esame è indicato con  $P$ , mentre i nodi delle celle adiacenti, con l'ovvio significato, sono indicati con  $E$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $T$  e  $B$ . I nodi dei VC più distanti sono indicati, ad esempio, con  $EE$ ,  $NW$  etc.

È inoltre opportuno osservare che il caso 2D può essere visto come un particolare caso 3D nel quale le variabili non dipendono da  $z$ . Nel seguito, per semplicità di

## 2.4. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE



**Figura 2.5:** Volume di controllo per griglie Cartesiane: (a) bidimensionale; (b) tridimensionale.

notazione, focalizzeremo la nostra attenzione sul caso 2D, dato che l'estensione al caso 3D, per griglie Cartesiane, è particolarmente semplice.

Il flusso netto attraverso il contorno del VC è dato dalla somma degli integrali del

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

flusso su tutte le facce che costituiscono il VC:

$$\begin{aligned}\int_A \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} \, dA &= \sum_k \int_{A_k} \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} \, dA \\ &= \sum_k \int_{A_k} \mathbf{J}''_c \cdot \mathbf{n} \, dA - \sum_k \int_{A_k} \mathbf{J}''_d \cdot \mathbf{n} \, dA\end{aligned}\quad (2.10)$$

Al fine di garantire la conservatività a livello di VC (conservatività *locale*) ed a livello dell'intero dominio (conservatività *globale*), è di fondamentale importanza che non vi sia sovrapposizione fra i VC: ogni faccia appartiene ad un VC, se giace sul contorno del dominio, o a due VC se si trova all'interno del dominio. Tale proprietà, apparentemente ovvia, va tuttavia garantita anche nei casi più complessi, ad esempio griglie mobili (*sliding grids*) utilizzate nella simulazione non stazionaria di turbomacchine.

Nel seguito sarà sufficiente considerare, con riferimento all'equazione (2.10), solo una faccia, quella indicata con  $e$  in figura (2.5-a); espressioni analoghe si ricavano per le altre con opportune sostituzioni degli indici. Per calcolare l'integrale di superficie espresso dalla (2.10) sulla faccia  $e$  in modo esatto, sarebbe necessario conoscere il valore della funzione integranda ( $\mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n}$ ) su ogni punto della faccia. Ciò non è possibile, poiché la variabile  $\phi$ , e quindi i flussi ad essa associati, sono noti solo nei nodi (centri dei VC); per tale ragione è necessario introdurre due approssimazioni:

1. L'integrale è espresso in funzione di uno o più valori della variabile sulla faccia del VC;
2. I valori della variabile sulla faccia del VC sono approssimati per mezzo dei valori nodali della variabile.

Rimandando alla sezione 2.4.3 per la determinazione approssimata delle variabili sulle facce dei volumi di controllo in funzione dei valori nodali, vediamo come possano venire valutati gli integrali.

La più semplice approssimazione è basata sulla regola del punto medio: l'integrale è approssimato con il prodotto della funzione integranda valutata al centro della faccia (che approssima il valore medio della funzione sulla faccia) e l'area di quest'ultima:

$$F_e = \int_{A_e} \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} \, dA = \overline{J''}_e A_e = \overline{J''}_e \Delta y_j \approx J''_e \Delta y_j \quad (2.11)$$

Si può dimostrare che l'approssimazione così ottenuta – supponendo di conoscere il valore di  $J''$  nel punto medio di  $e$  – è del secondo ordine, cioè l'errore commesso,

## 2.4. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE

se la suddivisione del dominio è sufficientemente fine, si riduce con il quadrato della dimensione della faccia del VC,  $(\Delta y)^2$ . Un'altra possibilità è quella di utilizzare la regola dei trapezi, che fornisce anch'essa un'approssimazione del secondo ordine:

$$F_e = \int_{A_e} \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} \, dA \approx \frac{\Delta y_j}{2} (J''_{ne} + J''_{se}) \quad (2.12)$$

In questo caso, però, è necessario conoscere il valore della funzione integranda nei due vertici della faccia. Inoltre, l'errore di troncamento è maggiore di quello fornito dalla più semplice formula del punto medio.

Per ottenere approssimazioni di ordine più elevato, è necessario conoscere la funzione integranda in più punti. Ad esempio, usando la formula di Simpson, si ottiene:

$$F_e = \int_{A_e} \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} \, dA \approx \frac{\Delta y_j}{6} (J''_{ne} + 4J''_e + J''_{se}) \quad (2.13)$$

Nella (2.13) è necessario conoscere  $J''$  in tre punti: il centro della faccia  $e$ , e i due vertici  $ne$  e  $se$ . L'uso della (2.13), al fine di aumentare l'ordine e quindi l'accuratezza della discretizzazione, va associato ad analoghe espressioni di ordine elevato per la determinazione approssimata delle variabili sulle facce, come verrà illustrato nei paragrafi successivi.

### 2.4.2 Integrali di volume

Per alcuni dei termini nell'equazione di conservazione (2.5) – variazione temporale e sorgente – è necessario integrare sul *volume* del VC. L'approssimazione più semplice dell'integrale è data dal prodotto del valore medio della funzione integranda, assunto pari al valore al centro del VC, per il volume del VC stesso. Ad esempio, nel caso del termine sorgente:

$$S_P = \int_V s \, dV = \bar{s} \Delta V \approx s_P \Delta V \quad (2.14)$$

che nel caso bidimensionale si esprime come:

$$S_P \approx s_P \Delta x_i \Delta y_j \quad (2.15)$$

dove  $s_P$  è il valore di  $s$  al centro del VC. Tale quantità è agevole da valutare, poiché tutte le variabili sono definite al centro del VC, e quindi non è necessario effettuare alcuna interpolazione. L'approssimazione data dalla (2.14) è esatta se  $s$  è costante o

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

varia linearmente all'interno del VC. Altrimenti si può dimostrare che è affetta da un errore del secondo ordine.

Come già visto per gli integrali di superficie, per ottenere approssimazioni di ordine più elevato è necessario conoscere il valore di  $s$  in più punti, diversi dai centri dei VC. Ad esempio, un'approssimazione del quarto ordine può essere ottenuta supponendo che l'andamento di  $s$ , all'interno del VC, possa venire descritto da un polinomio del quarto ordine:

$$s(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2 \quad (2.16)$$

I valori dei coefficienti  $a_i$  vengono ottenuti imponendo che la funzione interpolante fornisca esattamente i valori di  $s$  nei nove punti  $P$ ,  $nw$ ,  $w$ ,  $sw$ ,  $s$ ,  $se$ ,  $e$ ,  $ne$  e  $n$ . I valori di  $s$  sulle facce vengono coerentemente valutati utilizzando polinomi di ordine elevato, almeno cubico (v. punto 2.4.3). Valutando i coefficienti secondo le modalità viste, si ricava che solo quattro sono diversi da zero, e nel caso generale di griglie non-uniformi, cioè griglie Cartesiane nelle quali le dimensioni dei VC non sono costanti, l'integrale diventa:

$$S_P = \int_V s \, dV \approx \Delta x_i \Delta y_j \left[ a_0 + \frac{a_3}{12} (\Delta x_i)^2 + \frac{a_4}{12} (\Delta y_j)^2 + \frac{a_8}{144} (\Delta x_i)^2 (\Delta y_j)^2 \right] \quad (2.17)$$

Nel caso di griglie uniformi, per le quali  $\Delta x_i \equiv \Delta x$  e  $\Delta y_j \equiv \Delta y$ , l'espressione diventa:

$$S_P = \int_V s \, dV \approx \frac{\Delta x \Delta y}{36} \left[ 16 s_P + 4 s_s + 4 s_n + 4 s_w + 4 s_e + s_{ne} + s_{se} + s_{nw} + s_{sw} \right] \quad (2.18)$$

È interessante notare che l'approssimazione del quarto ordine degli integrali in due dimensioni, può essere utilizzata per valutare gli integrali di superficie in tre dimensioni. Ovviamente formulazioni di ordine elevato degli integrali si possono ricavare, in modo analogo, anche in tre dimensioni, sebbene le espressioni siano più complesse.

### Alcune osservazioni sull'integrazione del termine sorgente

Il termine sorgente  $s$  nell'equazione (2.6), come già visto, può essere interpretato come la generazione interna di calore per l'equazione dell'energia, la generazione

dell'energia cinetica turbolenta nell'equazione di trasporto di questa grandezza, *etc.* Nel caso dell'equazione della quantità di moto  $s$  include il gradiente di pressione, l'eventuale contributo di campi di forze (es. forze di galleggiamento in convezione naturale), e talvolta i contributi dei termini viscosi che non possono venire introdotti come flusso diffusivo. In altre parole, il termine sorgente va interpretato come un *tuttofare*, nel quale inserire tutti quei termini – in alcuni casi anche complessi, come in alcuni modelli di turbolenza (cfr. Cap. 4) – che non possono venire inseriti negli altri contributi.

Se il termine  $s_P$ , ad esempio nella (2.14), è noto, non ci sono difficoltà. Se invece il termine dipende dalla variabile stessa,  $\phi$ , è necessario linearizzarlo usando una relazione del tipo:

$$s_P = s_P^{rhs} + s_P^{lhs} \phi_P \quad (2.19)$$

dove  $s_P^{lhs}$  è il coefficiente che moltiplica  $\phi_P$ , e pertanto contribuirà alla matrice dei coefficienti (*lhs* - left hand side), mentre  $s_P^{rhs}$  è la parte di  $s_P$  che non dipende esplicitamente da  $\phi_P$ , e quindi andrà sommato al vettore dei termini noti (*rhs* - right hand side). L'individuazione della migliore linearizzazione dipende dall'effettiva relazione funzionale  $s_P = s_P(\phi_P)$ , e costituisce spesso un aspetto *critico* in numerose situazioni, da cui può dipendere il successo (convergenza) o insuccesso (divergenza) del calcolo. A tal fine, è sufficiente ricordare che è buona prassi adottare una linearizzazione, eq. (2.19), che fornisca  $s_P^{lhs} < 0$  e  $s_P^{rhs} > 0$ : ciò da luogo ad un aumento del peso della diagonale principale, e di conseguenza migliore convergenza nell'uso di algoritmi iterativi per la soluzione del sistema di equazioni.

### 2.4.3 Tecniche di interpolazione

Come già visto la valutazione degli integrali richiede di conoscere il valore delle variabili in posizioni diverse (centri o vertici delle facce) da quelle in cui esse sono definite (centri dei VC). La funzione integranda, indicata con  $\mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n}$ , è il prodotto di diverse variabili, e/o gradienti delle stesse:  $J_c'' = \rho \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  per il flusso convettivo, e  $J_d'' = \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$  per il flusso diffusivo. Per calcolare il valore dei flussi, assumendo noti il campo delle velocità e le proprietà termofisiche, è necessario individuare il valore di  $\phi$  e la componente del gradiente normale alla faccia del VC, su uno o più punti di quest'ultima. Tali quantità sono inoltre richieste, come visto, anche per calcolare gli integrali di volume. Per ottenere tali informazioni è necessario quindi ricorrere ad interpolazioni, e distinguiamo fra componente normale del gradiente (flusso diffusivo) e valore della variabile (flusso convettivo).

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

### Flusso Diffusivo

Il flusso diffusivo viene usualmente valutato ipotizzando una variazione lineare della variabile fra i nodi:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_{e,PE} + \phi_P (1 - \lambda_{e,PE}) \quad (2.20)$$

dove  $\lambda_{e,PE}$  è il coefficiente di interpolazione:

$$\lambda_{e,PE} = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (2.21)$$

Si può dimostrare che l'equazione (2.20) è accurata al secondo ordine, cioè l'errore commesso è proporzionale al quadrato della dimensione della griglia, anche per griglie non uniformi. Si tratta dello schema del secondo ordine più semplice, e corrisponde al cosiddetto schema alle differenze centrali nel metodo delle differenze finite (da cui l'acronimo CDS – Central Difference Scheme). La componente del gradiente normale alla faccia viene quindi approssimata con la:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (2.22)$$

L'approssimazione (2.22) è anch'essa del secondo ordine, ma solo per griglie uniformi (o per griglie *cell-centered* nelle quali la faccia  $e$  si trovi ad uguale distanza da  $P$  ed  $E$ ). Per griglie non uniformi l'accuratezza formale diventa del primo ordine, ma si può tuttavia dimostrare che, se il fattore di espansione della griglia,  $\Delta x_i/\Delta x_{i+1}$ , non si discosta molto dall'unità, l'accuratezza del second'ordine è preservata.

Schemi più accurati si possono ottenere utilizzando interpolazioni di ordine più elevato. Ad esempio, per ottenere un'accuratezza del quarto ordine da usarsi con l'integrazione di Simpson, eq. (2.13), è necessario adottare un polinomio del terzo ordine:

$$\phi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (2.23)$$

dove i quattro coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  vanno determinati imponendo che, con riferimento alla faccia  $e$ , il polinomio passi per i nodi  $W$ ,  $P$ ,  $E$  e  $EE$  (v. figura 2.5-a). L'espressione della componente del gradiente normale alla faccia si ottiene derivando la (2.23):

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = b + 2cx + 3dx^2 \quad (2.24)$$

Limitandoci per semplicità al caso di griglie uniformi, si ottiene la seguente espressione:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{27\phi_E - 27\phi_P + \phi_W - \phi_{EE}}{24\Delta x} \quad (2.25)$$

## 2.4. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE

La (2.25) è talvolta chiamata schema alle differenze centrali del quarto ordine. È tuttavia opportuno, a questo punto, osservare che:

- Nella pratica applicativa e industriale un'accuratezza pari al secondo ordine è in genere ritenuta adeguata e pertanto, per i flussi diffusivi, viene usualmente adottata tale semplice approssimazione;
- L'utilizzo di schemi di ordine più elevato comporta un aumento dell'onere computazionale, sebbene la maggiore accuratezza permetta di utilizzare griglie più rade. Ciò a causa della maggiore dimensione della *molecola di calcolo*, cioè dei VC coinvolti nell'espressione (si confronti la (2.25) con la (2.22));
- Gli schemi di ordine più elevato sono più *sensibili* ad eventuali fenomeni di instabilità, sono cioè in generale *meno robusti*;
- Il maggiore onere computazionale per gli schemi di ordine elevato, e la minore robustezza, possono venire in parte alleviati ricorrendo alla *correzione differita*, vedi punto 2.4.4;
- Le approssimazioni di ordine più elevato non garantiscono necessariamente una soluzione più accurata: questa si ottiene solo quando la griglia è *sufficientemente fine* per catturare in maniera adeguata la soluzione. Per determinare quando ciò accade è necessario ricorrere in modo sistematico al *raffinamento della griglia*, cioè effettuare il calcolo su due o più griglie via via più fini. Tale pratica è però difficile da seguire – per ragioni di costi e tempi – in problemi industriali, caratterizzati spesso da geometrie e modelli fisici complessi.

Per la valutazione del flusso diffusivo, è talvolta necessario approssimare il valore della diffusività  $\Gamma_e$  sulla faccia del VC in presenza di variazioni spaziali di tale proprietà. Un possibile approccio è quello di utilizzare per  $\Gamma_e$  la seguente espressione:

$$\Gamma_e = \left[ \frac{\lambda_{e,PE}}{\Gamma_P} + \frac{(1 - \lambda_{e,PE})}{\Gamma_E} \right]^{-1} \quad (2.26)$$

Questa è stata ottenuta, in analogia con la conduzione termica monodimensionale, considerando il flusso della variabile attraverso una parete a due strati, con diffusività pari rispettivamente a  $\Gamma_P$  e  $\Gamma_E$ , fra  $P$  ed  $E$ . È utile osservare che, nel caso di griglia uniforme, la (2.26) si semplifica nella:

$$\Gamma_e = \frac{2\Gamma_E\Gamma_P}{\Gamma_E + \Gamma_P} \quad (2.27)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

cioè la diffusività è pari alla *media armonica* di  $\Gamma_P$  e  $\Gamma_E$ , anziché alla *media aritmetica*, che sarebbe fornita da un'interpolazione lineare  $\Gamma_e = \lambda_{e,PE}\Gamma_E + (1 - \lambda_{e,PE})\Gamma_P$ .

In conclusione, il flusso diffusivo specifico sulla faccia  $e$  del VC, e analogamente per tutte le altre facce, verrà espresso come:

$$J''_{d,e} = (\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n})_e = \Gamma_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (2.28)$$

### Flusso Convettivo

Per la valutazione del flusso convettivo si possono adottare interpolazioni di vario tipo che, per le ragioni esposte più avanti, possono o meno coincidere con quelle adottate per la valutazione del flusso diffusivo. Ricordiamo che il flusso convettivo specifico per la faccia  $e$  del VC è espresso dalla:

$$J''_{c,e} = (\rho \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e = \rho \phi_e u_e \quad (2.29)$$

dove  $u_e$  rappresenta la componente di velocità normale alla faccia  $e$ , ed è assunta nota.

La strategia più semplice per la determinazione di  $\phi_e$  è basata nuovamente sull'interpolazione lineare (2.20), che riportiamo nuovamente per convenienza:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_{e,PE} + \phi_P (1 - \lambda_{e,PE}) \quad (2.30)$$

dove i coefficienti di interpolazione sono dati dalla (2.21). Come già anticipato tale espressione ha un'accuratezza del second'ordine, ritenuta adeguata nella gran parte dei casi. Inoltre si può dimostrare che lo schema CDS presenta un'altra importante proprietà, cioè l'assenza di *diffusione numerica* che, come si vedrà, rappresenta il problema principale di molti schemi per il trattamento dei flussi convettivi. Per tale ragione, nonostante la sua semplicità, è spesso utilizzato in analisi di flussi turbolenti con metodi LES e DNS (vedi Cap. 4). Tuttavia, l'utilizzo di tale schema, in particolare per problemi applicativi caratterizzati da valori elevati del numero di Reynolds, può dar luogo a oscillazioni numeriche e/o instabilità, che lo rendono quindi inutilizzabile. Per tale ragione sono stati sviluppati alcuni schemi che non presentano tale inconveniente. Il più semplice è il cosiddetto schema *upwind* o UDS (Upwind Difference Scheme), così chiamato poiché si assume il valore di  $\phi$  sulla faccia uguale a quello del nodo *a monte*:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{se } (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{se } (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

## 2.4. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE

Lo schema UDS garantisce l'assenza di oscillazioni, ma introduce però una rilevante diffusione numerica, che va ad aggiungersi al flusso diffusivo vero e proprio, con conseguente alterazione della soluzione. Infatti, nell'ipotesi  $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e > 0$ , l'espansione in serie di Taylor nell'intorno di  $P$  fornisce:

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + \dots \quad (2.32)$$

da cui risulta che lo schema UDS contiene solo il primo termine a destra della (2.32), e quindi ha un'accuratezza del primo ordine, mentre l'errore di troncamento (secondo termine a destra) ricorda proprio l'espressione (2.28) del flusso diffusivo. Ricordando la (2.29), risulta quindi che lo schema UDS introduce un falso flusso diffusivo dato dalla:

$$J''_{Num} = \Gamma_{Num} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P \quad \text{con} \quad \Gamma_{Num} = \rho u_e \frac{\Delta x_P}{2} \quad (2.33)$$

La diffusione artificiale, indotta dallo schema UDS, aumenta inoltre nei casi in cui le linee di corrente non siano allineate alla griglia. Può addirittura accadere che, per problemi con elevato numero di Reynolds e limitata risoluzione spaziale, il valore della diffusione numerica superi quello reale, con l'inevitabile risultato che il numero di Reynolds effettivo sia di molto inferiore a quello desiderato. Ci si dovrebbe quindi chiedere come mai lo schema UDS (o il suo cugino HY - Hybrid, nel quale si utilizza lo schema CDS nei casi in cui il flusso convettivo sia modesto, passando all'UDS negli altri casi) sia così diffuso nei prodotti CFD commerciali. Oltre a ragioni di semplicità ed assenza di oscillazioni, che fornisce maggiori garanzie di ottenere una prima soluzione (approssimata) del problema, il suo utilizzo si rivela particolarmente conveniente in alcuni casi:

1. Avviamento della simulazione nei casi difficili, continuando poi con schemi più accurati;
2. Utilizzo con schemi di ordine più elevato in modalità *correzione differita*.

Schemi convettivi di ordine più elevato si ottengono, in analogia a quanto visto per i flussi diffusivi, utilizzando funzioni più complesse per descrivere l'andamento della variabile. Vediamone due dei più diffusi.

- Lo schema UDS del secondo ordine, detto anche SOUDS (Second Order Upwind Difference Scheme), o LUDS (Linear Upwind Difference Scheme):

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + [\lambda_{e,PW} (\phi_W - \phi_P)] & \text{se } (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \phi_E + [\lambda_{e,EE} (\phi_{EE} - \phi_E)] & \text{se } (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

dove i fattori di interpolazione sono definiti ancora dalle:

$$\lambda_{e,PW} = \frac{x_e - x_P}{x_W - x_P}; \quad \lambda_{e,EE} = \frac{x_e - x_E}{x_{EE} - x_E} \quad (2.35)$$

È immediato verificare, ad esempio nel caso  $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e > 0$ , che la (2.34) può interpretarsi come un'estensione (al secondo ordine) dello schema UDS originale (2.31), nella quale la stima di  $\phi_e$  è corretta sulla base del valore, anch'esso stimato, a monte del gradiente di  $\phi$ , moltiplicato per la distanza fra  $P$  e la faccia  $e$ :

$$\phi_e = \phi_P + \frac{\phi_W - \phi_P}{x_W - x_P} (x_e - x_P) \quad (2.36)$$

- Lo schema QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics), utilizza un'interpolazione quadratica per la valutazione di  $\phi_e$ , facendo uso di due nodi a monte ed un nodo a valle:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + [\gamma_{1e}\phi_W - (\gamma_{1e} + \gamma_{2e})\phi_P + \gamma_{2e}\phi_E] & \text{se } (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \phi_E + [\gamma_{3e}\phi_P - (\gamma_{3e} + \gamma_{4e})\phi_E + \gamma_{4e}\phi_{EE}] & \text{se } (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

con:

$$\begin{aligned} \gamma_{1e} &= \lambda_{e,EW} \lambda_{e,PW} & \gamma_{2e} &= \lambda_{e,PE} \lambda_{e,WE} \\ \gamma_{3e} &= \lambda_{e,EP} \lambda_{e,EEP} & \gamma_{4e} &= \lambda_{e,PEE} \lambda_{e,EEE} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Sebbene più robusti dello schema CDS, e nel contempo più accurati dello schema UDS, gli schemi ora visti possono comunque dar luogo ad oscillazioni non-fisiche della soluzione.

Per rendere più stabili, e privi di oscillazioni, gli schemi ora visti ed altri di ordine ancora più elevato, esistono numerosi sistemi, che possono venire raggruppati in due classi: *flux blending methods* e *composite flux limiter methods*. Rimandando alla letteratura per informazioni più dettagliate, è utile ricordare che, su tali basi, sono stati sviluppati alcuni schemi di ordine elevato (e dai nomi ancor più suggestivi...), quali SHARP (Simple High-Accuracy Resolution Program), SMART (Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport), NIRVANA (Nonoscillatory, Integrally Reconstructed Volume-Averaged Numerical Advection) *etc.* Tali schemi, peraltro, oltre a dar luogo comunque ad una certa diffusione numerica (sebbene molto inferiore allo schema UDS) presentano una serie di svantaggi:

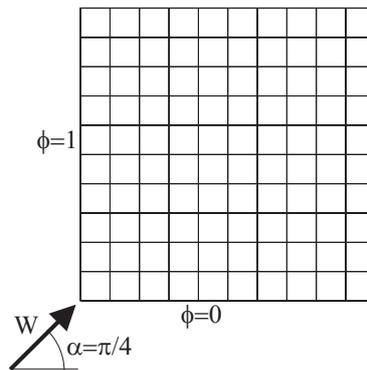
- La notevole dimensione della molecola di calcolo, a meno di non utilizzare la *correzione differita*, aumenta l'onere computazionale, ed inoltre rende difficoltoso l'introduzione delle condizioni al contorno;

- È difficile estendere tali schemi al caso di griglie non strutturate.

A scopo illustrativo, confrontiamo il comportamento di alcuni degli schemi visti su un semplice test, quello del trasporto bidimensionale puramente convettivo di uno scalare (ad esempio la temperatura), con un campo di moto assegnato e costante, inclinato di un angolo  $\alpha = \pi/4$  rispetto alla griglia. Le condizioni al contorno sono indicate in figura 2.6, e l'equazione di trasporto considerata è  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \phi) = 0$ , che si traduce nella:

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

In tale caso, mancando del tutto la diffusione, il *gradino* presente nel profilo di  $\phi$

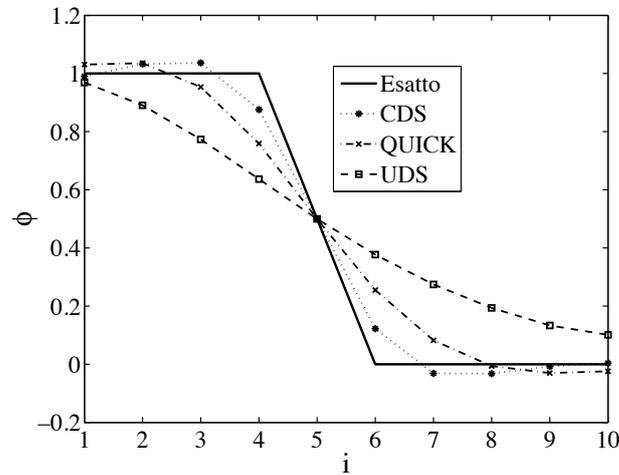


**Figura 2.6:** Condizioni al contorno e campo di moto nel problema dello scalino.

all'ingresso, dovrebbe venire trasportato, senza alcuna diffusione, indefinitamente ed inalterato. Ma, come anticipato, la presenza di diffusione artificiale, ed eventuali oscillazioni, alterano sensibilmente il risultato.

La figura 2.7 riporta il profilo ottenuto, con vari schemi, utilizzando una griglia  $10 \times 10$ . I profili, ottenuti in prossimità di una sezione orizzontale posta a metà altezza, sono confrontati con il profilo *esatto*, cioè quello più accurato ottenibile con la griglia utilizzata. Dall'esame della figura si può notare che lo schema UDS, sebbene non dia luogo a oscillazioni, altera completamente il profilo, a seguito della diffusività numerica che lo caratterizza. Lo schema CDS, viceversa, preserva in modo accettabile il profilo (si osservi che è stata utilizzata una griglia particolarmente rada), ma introduce delle oscillazioni di carattere numerico. Lo schema QUICK, infine, ha un comportamento intermedio fra UDS e CDS.

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI



**Figura 2.7:** Profilo di  $\phi$  ottenuto nel problema dello scalino, con vari schemi, su una griglia uniforme  $10 \times 10$ .

### 2.4.4 Correzione differita

Come visto, l'utilizzo di schemi di ordine elevato per le interpolazioni e per le integrazioni, conduce a *molecole di calcolo* di rilevante dimensione, con conseguente incremento dell'onere computazionale e della memoria richiesta. Viceversa, l'uso di schemi semplici è talvolta insufficiente a fornire l'accuratezza richiesta. Una possibile soluzione – peraltro adottata in numerosi programmi commerciali – è quella di utilizzare, secondo una procedura iterativa, uno schema di ordine basso in modo implicito (*lhs* - left hand side), e portare nel termine *sorgente* (*rhs* - right hand side) la differenza, valutata all'iterazione precedente, fra il valore ottenuto con uno schema di ordine elevato e quello ottenuto con lo schema di ordine più basso. Indicando con  $k$  l'iterazione  $k$ -esima si ha:

$$\phi_e^k = \underbrace{\phi_e^{ob,k}}_{lhs} + \underbrace{[\phi_e^{oe,k-1} - \phi_e^{ob,k-1}]}_{rhs} \quad (2.39)$$

dove *ob* indica uno schema di *ordine basso*, ad esempio UDS, e *oe* uno schema di *ordine elevato*, ad esempio QUICK. Ovviamente, a convergenza raggiunta,  $\phi_e^{ob,k} \cong \phi_e^{ob,k-1}$  e quindi il risultato sarà quello corrispondente allo schema di ordine elevato. È proprio seguendo tale approccio che sono state formulate le espressioni per lo schema SOUDS (2.34), e per lo schema QUICK (2.37). In tal modo, oltre a mantenere basso il costo computazionale, migliora la convergenza e si riduce la possibilità di oscillazioni non fisiche della soluzione.

Tale procedura, nota come correzione differita (*deferred correction*), o ritardata, presenta lo svantaggio di richiedere delle iterazioni, ma ciò non rappresenta un problema nei problemi termofluidodinamici per i quali, come si vedrà, è generalmente richiesta una procedura di tipo iterativo o, in modo equivalente, di integrazione temporale.

### 2.4.5 Equazione algebrica finale

Sulla base di quanto visto, in problemi bidimensionali l'equazione algebrica per il nodo (VC) P è:

$$A_P\phi_P + A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S = S_P \quad (2.40)$$

ed analogamente nei problemi tridimensionali:

$$A_P\phi_P + A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + A_T\phi_T + A_B\phi_B = S_P \quad (2.41)$$

Le espressioni da utilizzarsi per i coefficienti  $A_P$ ,  $A_E$ ,  $A_W$  etc. dipendono dagli schemi adottati per i termini convettivo e diffusivo, e dalle relazioni usate per la valutazione degli integrali. Sempre con riferimento al caso del trasporto bidimensionale in regime stazionario, l'uso dello schema CDS del 2° ordine per i flussi convettivo e diffusivo, e dell'integrazione secondo la (2.11), fornisce le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \dot{m}_e &= \rho u_e \Delta y_j; & \dot{m}_w &= \rho u_w \Delta y_j \\ \dot{m}_n &= \rho v_n \Delta x_i; & \dot{m}_s &= \rho v_s \Delta x_i \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} A_E^c &= \dot{m}_e \lambda_{e,PE}; & A_W^c &= -\dot{m}_w \lambda_{w,PW} \\ A_N^c &= \dot{m}_n \lambda_{n,PN}; & A_S^c &= -\dot{m}_s \lambda_{s,PS} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} A_E^d &= -\frac{\Gamma_e \Delta y_j}{x_E - x_P}; & A_W^d &= -\frac{\Gamma_w \Delta y_j}{x_P - x_W} \\ A_N^d &= -\frac{\Gamma_n \Delta x_i}{y_N - y_P}; & A_S^d &= -\frac{\Gamma_s \Delta x_i}{y_P - y_S} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} A_E &= A_E^c + A_E^d; & A_W &= A_W^c + A_W^d \\ A_N &= A_N^c + A_N^d; & A_S &= A_S^c + A_S^d \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$A_P = -(A_E + A_W + A_N + A_S) - s_P^{lhs} \Delta x_i \Delta y_j \quad (2.46)$$

$$S_P = s_P^{rhs} \Delta x_i \Delta y_j \quad (2.47)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

Seguendo una tradizione ormai consolidata, è talvolta conveniente esprimere le (2.40) e (2.41) nella forma compatta:

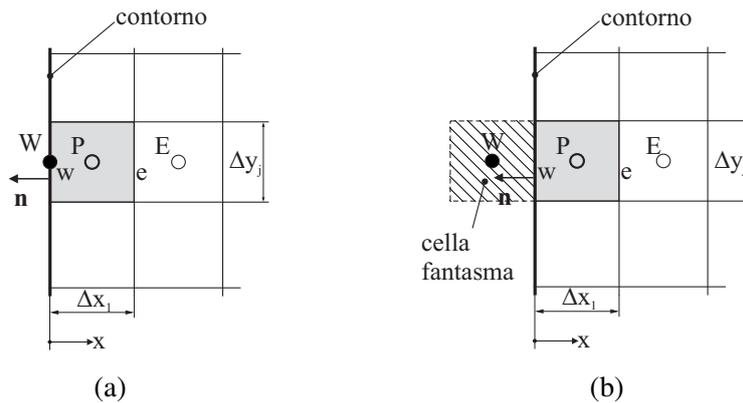
$$A_P \phi_P + \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb} = S_P \quad (2.48)$$

dove con  $nb$  (da *neighbor*) si intende che la sommatoria va estesa ai VC adiacenti, tipicamente quattro in problemi 2D, e sei nei casi 3D (è agevole verificare che, nel caso monodimensionale, la sommatoria include solo i due VC adiacenti).

### 2.4.6 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno vanno applicate prima di assemblare, e successivamente risolvere, il sistema di equazioni risultante dall'applicazione della (2.48) a ciascun VC. Rimanendo nel campo delle griglie Cartesiane, o più in generale *strutturate*, è utile notare che sono possibili due diversi approcci, come schematizzato in figura 2.8:

1. Nel primo approccio, corrispondente alla griglia rappresentata in figura 2.8-a, al generico nodo sul contorno non è associato nessun VC o, in altri termini, corrisponde un VC di volume nullo (o VC di superficie);
2. Nel secondo caso, illustrato in figura 2.8-b, si utilizza una *cella (VC) fantasma* (ghost cell), che non ha nessun significato fisico, ma agevola l'imposizione delle condizioni al contorno.



**Figura 2.8:** Formulazione delle condizioni al contorno: (a) nodo sul contorno; (b) cella fantasma.

Va tuttavia osservato che il metodo 2, sebbene presenti talvolta alcuni vantaggi, non si presta a venire utilizzato con griglie non strutturate. Vediamo comunque, a titolo di esempio, l'imposizione di una condizione al contorno *convettiva* con l'approccio di tipo 1, e la condizione al contorno di Dirichlet, valore imposto, con il metodo 2.

### Condizione al contorno convettiva - metodo 1

La condizione al contorno convettiva può venire espressa come:

$$\mathbf{n} \cdot \Gamma \nabla \phi + \alpha (\phi_{BC} - \phi_{\infty}) = 0 \quad (2.49)$$

dove, come al solito,  $\mathbf{n}$  è il versore, normale alla superficie del contorno e rivolto verso l'esterno,  $\alpha$  è il coefficiente di scambio termico convettivo e  $\phi_{\infty}$  il valore indisturbato (esterno) di  $\phi$ . La (2.49) può essere scritta come:

$$-\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha \phi_{BC} = \alpha \phi_{\infty} \quad (2.50)$$

ed in termini discreti:

$$-\Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_1/2} + \alpha \phi_W = \alpha \phi_{\infty} \quad (2.51)$$

da cui:

$$\phi_W = \phi_P \underbrace{\left[ \frac{2\Gamma}{2\Gamma + \alpha \Delta x_1} \right]}_{C_{lhs}} + \underbrace{\left[ \frac{\alpha \Delta x_1}{2\Gamma + \alpha \Delta x_1} \phi_{\infty} \right]}_{C_{rhs}} \quad (2.52)$$

Sostituendo infine la (2.52) nella (2.40) si ottiene l'equazione algebrica per la cella  $P$ :

$$\underbrace{(A_P + A_W C_{lhs})}_{A_P} \phi_P + A_E \phi_E + A_N \phi_N + A_S \phi_S = \underbrace{(S_P - A_W C_{rhs})}_{S_P} \quad (2.53)$$

Com'era logico attendersi, nell'equazione così modificata non appare più il contributo  $A_W \phi_W$ .

### Condizione al contorno di Dirichlet - metodo 2

È la condizione al contorno più semplice, e corrisponde, nel caso dell'equazione dell'energia, al valore imposto della temperatura. Detto  $\phi_{BC}$  il valore assegnato, e

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

tenendo conto che, secondo il metodo 2, il contorno si trova a metà strada fra il nodo  $P$  ed il nodo *fantasma*  $W$ , si ha:

$$\phi_{BC} = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \quad (2.54)$$

da cui:

$$\phi_W = 2\phi_{BC} - \phi_P \quad (2.55)$$

che sostituita nella 2.40 fornisce l'equazione algebrica *contenente* la condizione al contorno desiderata:

$$\underbrace{(A_P - A_W)}_{A_P} \phi_P + A_E \phi_E + A_N \phi_N + A_S \phi_S = \underbrace{(S_P - 2 A_W \phi_{BC})}_{S_P} \quad (2.56)$$

È utile infine osservare che, con schemi di ordine elevato, anche la formulazione delle condizioni al contorno va fatta, volendo mantenere l'ordine di accuratezza su tutto il dominio, utilizzando formule, di interpolazione ed integrazione, dello stesso tipo.

## 2.5 INTEGRAZIONE TEMPORALE

Estendiamo al caso non stazionario i concetti appena visti, ed a tale scopo riscriviamo, per comodità, l'equazione di trasporto nella formulazione generale temporale:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + s \quad (2.57)$$

In perfetta analogia con il metodo degli elementi finiti (cfr. Cap. 3), anche con il metodo dei volumi finiti si utilizzano tecniche di integrazione nel tempo del tipo alle *differenze finite*, suddividendo l'intero dominio temporale d'interesse  $\vartheta$  in un certo numero di intervalli temporali  $\Delta \vartheta$ . L'integrazione temporale avviene *marciando* nel tempo, e quindi ricavando la soluzione approssimata della (2.57) ad intervalli successivi, nota la condizione *iniziale* al tempo  $\vartheta = \vartheta_0$ , e le condizioni al contorno in ciascun istante successivo  $\vartheta = l \Delta \vartheta$ , con  $l = 1, \dots, n, n + 1, \dots$

L'equazione (2.57) può essere scritta nella forma compatta:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) = \mathcal{F}(\vartheta, \phi(\vartheta)) \quad (2.58)$$

con:

$$\mathcal{F} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{w} \phi) + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + s \quad (2.59)$$

## 2.5. INTEGRAZIONE TEMPORALE

La (2.58) ricorda da vicino la forma delle equazioni differenziali ordinarie ai valori iniziali, e pertanto è possibile riferirsi a queste ultime per descrivere l'essenza dei vari metodi di integrazione temporale.

Consideriamo, a tal fine, un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, assieme alla condizione iniziale al tempo  $\vartheta_0$ :

$$\frac{d\phi(\vartheta)}{d\vartheta} = f(\vartheta, \phi(\vartheta)) \quad \text{con} \quad \phi(\vartheta_0) = \phi^0 \quad (2.60)$$

Si desidera determinare  $\phi$  dopo un intervallo  $\Delta\vartheta$  dall'istante iniziale, ottenendo così  $\phi^1$  all'istante  $\vartheta_1 = \vartheta_0 + \Delta\vartheta$ ; successivamente si determinerà  $\phi^2$  all'istante  $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta$  e così via. Nel modo più semplice, integrando la (2.60) fra  $\vartheta_n$  e  $\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \Delta\vartheta$ :

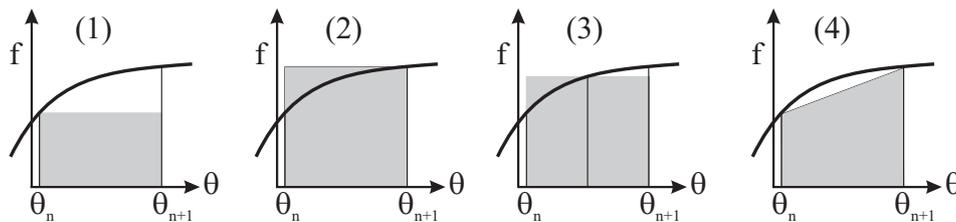
$$\int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n+1}} \frac{d\phi(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta = \phi^{n+1} - \phi^n = \int_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n+1}} f(\vartheta, \phi(\vartheta)) d\vartheta \quad (2.61)$$

dove  $\phi^{n+1} = \phi(\vartheta_{n+1})$ .

L'espressione (2.61) è esatta, tuttavia il termine a destra non può venire valutato senza conoscere la soluzione al nuovo istante, ed è quindi necessario approssimarla. Vediamo in breve i metodi più comuni.

### Metodi base

Le quattro procedure di approssimazione più semplici sono illustrate in figura 2.9.



**Figura 2.9:** Approssimazione dell'integrale nella (2.61): (1) - metodo di Eulero esplicito; (2) - metodo di Eulero implicito; (3) - metodo del punto medio; (4) - metodo di Crank-Nicolson.

#### 1. Metodo di Eulero esplicito:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(\vartheta_n, \phi^n) \Delta\vartheta \quad (2.62)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

---

2. Metodo di Eulero implicito:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(\vartheta_{n+1}, \phi^{n+1}) \Delta\vartheta \quad (2.63)$$

3. Metodo del punto medio:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f\left(\vartheta_{n+1/2}, \phi^{n+1/2}\right) \Delta\vartheta \quad (2.64)$$

4. Metodo di Crank-Nicolson :

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} [f(\vartheta_n, \phi^n) + f(\vartheta_{n+1}, \phi^{n+1})] \Delta\vartheta \quad (2.65)$$

Tutti questi metodi, con l'eventuale esclusione del metodo (3), sono detti *a due livelli*, perchè è coinvolta la variabile in soli due istanti di tempo. Con l'esclusione dello schema (1), tutti gli altri metodi richiedono la conoscenza della funzione incognita ad istanti diversi da  $\vartheta_n$ , per il quale è nota, e quindi è in genere necessario procedere ad ulteriori approssimazioni e/o iterazioni. Per tale ragione il metodo (1) è detto *esplicito*, mentre gli altri appartengono alla classe dei metodi *impliciti*. Il metodo (1) quindi, come tutti i metodi espliciti, è più economico e semplice da implementare, ma non può essere utilizzato per valori di  $\Delta\vartheta$  superiori ad un valore limite, detto limite di stabilità. Si può dimostrare che, nel caso in esame, il limite di stabilità per il metodo di Eulero esplicito è dato dalla:

$$\left| \Delta\vartheta \frac{\partial f(\vartheta, \phi)}{\partial \phi} \right| < 2 \quad (2.66)$$

I metodi impliciti sono più costosi, ma in genere sono incondizionatamente stabili, cioè possono venire utilizzati con intervalli di integrazione arbitrari. Da ciò deriva l'opportunità di utilizzare metodi impliciti per fenomeni la cui scala temporale di interesse sia ben maggiore del limite di stabilità per i metodi espliciti, e viceversa risulta conveniente utilizzare i più economici - per passo di tempo - metodi espliciti qualora il sistema sia caratterizzato da scale temporali dello stesso ordine di grandezza dei limiti di stabilità.

I metodi (1) e (2) hanno un'accuratezza temporale del prim'ordine, cioè l'errore, anche qua per passi di tempo sufficientemente piccoli, varia con  $\Delta\vartheta$ , mentre i metodi (3) e (4) hanno un'accuratezza del second'ordine, cioè l'errore è proporzionale a  $(\Delta\vartheta)^2$ . Si può inoltre dimostrare che, con metodi a due livelli, l'accuratezza può essere, al più, del second'ordine.

**Metodi multilivello e metodi predictor-corrector**

Per ottenere metodi di ordine più elevato, è necessario utilizzare l'informazione in più di due livelli. Questi livelli possono essere scelti fra gli istanti di tempo già considerati, e per i quali la soluzione è disponibile, oppure punti compresi proprio fra  $\vartheta_n$  e  $\vartheta_{n+1}$  ed usati ai soli fini del calcolo. Nel primo caso si ottengono i cosiddetti metodi *multilivello* (multipoint), e nel secondo i metodi di *Runge-Kutta*.

Limitando l'attenzione ai metodi di interesse per le equazioni alle derivate parziali, al primo gruppo appartengono i metodi espliciti di *Adams-Bashfort*:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} [3 f(\vartheta_n, \phi^n) - f(\vartheta_{n-1}, \phi^{n-1})] \Delta\vartheta \quad (2.67)$$

accurato al second'ordine, mentre la:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{12} [23 f(\vartheta_n, \phi^n) \\ - 16 f(\vartheta_{n-1}, \phi^{n-1}) + 5 f(\vartheta_{n-2}, \phi^{n-2})] \Delta\vartheta \end{aligned} \quad (2.68)$$

fornisce un'accuratezza del terz'ordine. I metodi di Adams-Bashfort, come tutti i metodi multilivello, presentano lo svantaggio di richiedere la conoscenza della soluzione in più istanti, fatto che crea qualche problema alla *partenza*, poiché la soluzione è in genere nota al solo istante iniziale.

I metodi di Runge-Kutta, anch'essi espliciti, trovano scarso utilizzo con il metodo dei Volumi Finiti per fluidi incomprimibili, con l'eccezione di applicazioni particolari, quali la simulazione diretta e LES di flussi turbolenti (cfr. Cap. 4). A solo scopo esemplificativo, si riporta qua il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine:

$$\begin{aligned} \phi_{n+1/2}^* &= \phi^n + \frac{\Delta\vartheta}{2} f(\vartheta_n, \phi^n) \\ \phi_{n+1/2}^{**} &= \phi^n + \frac{\Delta\vartheta}{2} f(\vartheta_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^*) \\ \phi_{n+1}^* &= \phi^n + \Delta\vartheta f(\vartheta_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^{**}) \\ \phi^{n+1} &= \phi^n + \frac{\Delta\vartheta}{6} [f(\vartheta_n, \phi^n) + 2 f(\vartheta_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^*) + \\ &\quad 2 f(\vartheta_{n+1/2}, \phi_{n+1/2}^{**}) + f(\vartheta_{n+1}, \phi_{n+1}^*)] \end{aligned} \quad (2.69)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

### Applicazione alla generica equazione di trasporto

Consideriamo ancora l'equazione di trasporto, scritta nella forma compatta (2.58). Osservando che la funzione  $\mathcal{F}(\vartheta, \phi(\vartheta))$  rappresenta la somma dei contributi convettivo, diffusivo e sorgente, va da sè che possiamo utilizzare qualunque dei metodi di integrazione temporale già visti. A scopo illustrativo, vediamo come viene modificata l'equazione algebrica finale (2.40), sempre nel caso bidimensionale, utilizzando il più semplice metodo di Eulero implicito del prim'ordine, e lo schema CDS per i flussi diffusivo e convettivo:

$$A_P \phi_P^{n+1} + A_E \phi_E^{n+1} + A_W \phi_W^{n+1} + A_N \phi_N^{n+1} + A_S \phi_S^{n+1} = S_P \quad (2.70)$$

In forma compatta:

$$A_P \phi_P^{n+1} + \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb}^{n+1} = S_P \quad (2.71)$$

con:

$$\begin{aligned} \dot{m}_e &= \rho u_e \Delta y_j; & \dot{m}_w &= \rho u_w \Delta y_j \\ \dot{m}_n &= \rho v_n \Delta x_i; & \dot{m}_s &= \rho v_s \Delta x_i \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} A_E^c &= \dot{m}_e \lambda_{e,PE}; & A_W^c &= -\dot{m}_w \lambda_{w,PW} \\ A_N^c &= \dot{m}_n \lambda_{n,PN}; & A_S^c &= -\dot{m}_s \lambda_{s,PS} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} A_E^d &= -\frac{\Gamma_e \Delta y_j}{x_E - x_P}; & A_W^d &= -\frac{\Gamma_w \Delta y_j}{x_P - x_W} \\ A_N^d &= -\frac{\Gamma_n \Delta x_i}{y_N - y_P}; & A_S^d &= -\frac{\Gamma_s \Delta x_i}{y_P - y_S} \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} A_E &= A_E^c + A_E^d; & A_W &= A_W^c + A_W^d \\ A_N &= A_N^c + A_N^d; & A_S &= A_S^c + A_S^d \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$A_P = \frac{\rho}{\Delta \vartheta} \Delta x_i \Delta y_j - (A_E + A_W + A_N + A_S) - s_P^{lhs} \Delta x_i \Delta y_j \quad (2.76)$$

$$S_P = \left( s_P^{rhs} + \frac{\rho \phi^n}{\Delta \vartheta} \right) \Delta x_i \Delta y_j \quad (2.77)$$

L'equazione (2.70) è analoga alla (2.40), e quindi richiede la soluzione di un sistema di equazioni ad ogni passo di tempo. Si può anche notare che il termine non-stazionario aumenta il peso del coefficiente  $A_P$  corrispondente al VC considerato. Ciò corrisponde ad *aggiungere peso* alla diagonale principale del sistema di equazioni, favorendo così la convergenza nel caso si utilizzino metodi iterativi per la sua

soluzione. Da tale osservazione discende l'opportunità di utilizzare, in problemi stazionari *difficili*, la forma non-stazionaria delle equazioni: la soluzione viene ottenuta marciando nel tempo ed arrestandosi quando questa raggiunge, con una certa tolleranza, il corrispondente valore asintotico per  $\vartheta \rightarrow \infty$ . Viceversa, l'uso di schemi espliciti, anche di tipo multilivello e predictor-corrector, non richiede la soluzione di sistemi di equazioni, ma il passo di integrazione temporale è limitato, come già accennato, da opportuni criteri di stabilità.

### Metodi particolari

Esistono altri schemi di integrazione temporale, ciascuno indirizzato ad applicazioni particolari o caratterizzato da particolari vantaggi. Ad esempio, si può pensare di valutare gli integrali della (2.61) attraverso i *valori medi* nell'intervallo di integrazione. Così operando, si può costruire uno schema implicito del second'ordine, su tre livelli, integrando nell'intervallo  $\Delta\vartheta$  centrato attorno a  $\vartheta_{n+1}$ , cioè fra  $\vartheta_{n+1} - \Delta\vartheta/2$  e  $\vartheta_{n+1} + \Delta\vartheta/2$ . La derivata rispetto al tempo a  $\vartheta_{n+1}$  viene inoltre approssimata differenziando una parabola passante per la soluzione valutata ai tre istanti  $\vartheta_{n-1}$ ,  $\vartheta_n$  e  $\vartheta_{n+1}$ :

$$\left(\frac{d\phi}{d\vartheta}\right)^{n+1} \approx \frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{2\Delta\vartheta} \quad (2.78)$$

Si ottiene il seguente schema, definito schema di Eulero implicito del secondo ordine, o schema Gear :

$$\phi^{n+1} = \frac{4}{3}\phi^n - \frac{1}{3}\phi^{n-1} + \frac{2}{3}f(\vartheta_{n+1}, \phi^{n+1})\Delta\vartheta \quad (2.79)$$

Tale schema, seppure lievemente meno accurato dello schema implicito di Crank-Nicolson, presenta caratteristiche di stabilità maggiore per problemi non lineari, e costo comparabile allo schema implicito di Eulero del prim'ordine.

In casi particolari può essere conveniente utilizzare metodi *misti*, combinazione dei metodi prima descritti. È questo il caso, ad esempio, di simulazioni di tipo LES e DNS (cfr. Cap. 4) su geometrie semplici, per le quali l'elevata dinamica, e quindi la presenza di piccole scale temporali, dello stesso ordine di grandezza del limite di stabilità del termine convettivo, suggerisce l'utilizzo di un metodo misto esplicito-implicito, rispettivamente per il flusso convettivo e per il flusso diffusivo. L'uso di metodi completamente espliciti, sebbene utilizzati, può condurre ad un limite del passo di tempo eccessivamente restrittivo, e quindi oneroso.

Un approccio abbastanza comune è l'utilizzo di uno schema di Adams-Bashfort del second'ordine, eq. (2.67), per il termine convettivo, e uno schema implicito a tre

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

livelli del second'ordine, eq. (2.79), per il contributo diffusivo:

$$\frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{1}{2} (3\nabla \cdot (\rho\mathbf{w}\phi^n) - \nabla \cdot (\rho\mathbf{w}\phi^{n-1})) + (\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi))^{n+1} + s^{n+1} \quad (2.80)$$

Un altro schema semi-implicito comune consiste nell'uso di Runge-Kutta per i termini convettivi, e Crank-Nicolson o Gear per i contributi diffusivi.

### 2.6 METODI DI SOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Con l'esclusione dei metodi puramente espliciti per problemi non-stazionari, si è visto che la discretizzazione, per problemi stazionari (2.40) e non-stazionari (2.70), da luogo ad un sistema di equazioni lineari.

Il sistema di equazioni è ottenuto considerando le equazioni per tutti i VC interni, e le equazioni per i VC sul contorno, come ad esempio le (2.53) e (2.56). In forma compatta:

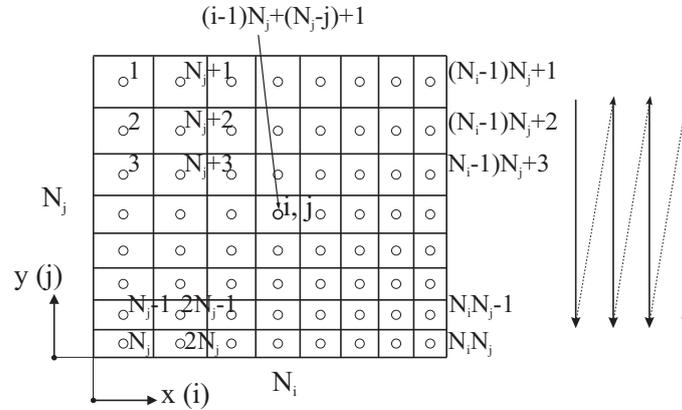
$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{S} \quad (2.81)$$

dove  $\mathbf{A}$  è la matrice dei coefficienti,  $\Phi$  è il vettore delle incognite, e  $\mathbf{S}$  il vettore dei termini noti:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  è *sparsa*, intendendo con ciò che il numero dei coefficienti non nulli, per ogni equazione, è limitato: ciò può essere visto immediatamente ricordando la (2.48), per la quale la sommatoria è estesa ai soli VC adiacenti. Quindi, per griglie strutturate, il numero di coefficienti diversi da zero è, per ogni riga della  $\mathbf{A}$ , in genere pari a 5 in due dimensioni, e 7 in tre dimensioni. La disposizione degli elementi non nulli, all'interno della matrice  $\mathbf{A}$ , dipende dalla modalità di numerazione delle incognite. L'approccio più comune, per griglie strutturate, è quello di utilizzare la numerazione lessicografica, illustrata in figura 2.10.

Con tale numerazione, ad esempio per un problema bidimensionale con  $N_j = 3$  ed  $N_i = 4$ , la struttura della matrice  $\mathbf{A}$  è la seguente:



**Figura 2.10:** Numerazione lessicografica delle incognite per griglie strutturate bidimensionali.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} A_{P1} & A_{S1} \\ A_{N2} & A_{P2} & A_{S2} \\ & A_{N3} & A_{P3} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{E1} \\ A_{E2} \\ A_{E3} \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} A_{W4} \\ & A_{W5} \\ & & A_{W6} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{P4} & A_{S4} \\ A_{N5} & A_{P5} & A_{S5} \\ & A_{N6} & A_{P6} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{E4} \\ A_{E5} \\ A_{E6} \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} A_{W7} \\ & A_{W8} \\ & & A_{W9} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{P7} & A_{S7} \\ A_{N8} & A_{P8} & A_{S8} \\ & A_{N9} & A_{P9} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{E7} \\ A_{E8} \\ A_{E9} \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} A_{W10} \\ & A_{W11} \\ & & A_{W12} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{P10} & A_{S10} \\ A_{N11} & A_{P11} & A_{S11} \\ & A_{N12} & A_{P12} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{A}$ , osservando che sono stati riportati solo i coefficienti non nulli, possiede una struttura *polidiagonale*, detta anche *diagonale a blocchi* o *tridiagonale a blocchi* (interpretando ciascun blocco come un elemento). È facile verificare che nel caso monodimensionale la matrice è proprio di tipo *tridiagonale*, cioè sono non-nulle solo la diagonale principale e le due diagonali adiacenti, mentre nel caso 3D vi sono altre due diagonali, relative ai coefficienti  $A_T$  e  $A_B$ . Vista la struttura della matrice, si può osservare che:

- Poiché la matrice è sparsa, non è necessario memorizzare l'intera matrice.

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

---

- Per tali matrici esistono efficienti algoritmi di soluzione di tipo *iterativo* e, per casi particolari, anche *diretto*.
- La struttura della matrice non cambia – alcuni termini sono trattati in modalità *correzione differita* - lavorando con griglie curvilinee.
- La struttura della matrice si conserva, all'interno di ciascun blocco, anche per griglie strutturate multiblocco.

Va inoltre osservato che la struttura della matrice, sempre sparsa, cambia utilizzando griglie non strutturate, ed in tal caso si ricorre spesso, nell'ambito della termofluidodinamica computazionale, a metodi di soluzione di tipo iterativo. Rimandando ai testi specializzati per una rassegna completa delle modalità di soluzione dei sistemi di equazioni algebriche, accenniamo brevemente ad alcuni metodi, distinguendo fra metodi *diretti* e metodi *iterativi*. Nei primi la soluzione è ottenuta in un numero predeterminato di operazioni, funzione del numero di incognite, mentre nei secondi, nei quali la soluzione è ottenuta attraverso iterazioni successive partendo da un valore *di tentativo*, il numero di operazioni non è predeterminabile, ma dipende da diversi fattori.

### 2.6.1 Metodi diretti

#### Eliminazione di Gauss

Fra i metodi diretti il più semplice è il metodo di Gauss. Indichiamo con  $N$  il numero totale delle incognite, e quindi delle equazioni, pari rispettivamente a  $N_i \times N_j$  per problemi bidimensionali e  $N_i \times N_j \times N_k$  per il caso tridimensionale, dove  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  rappresentano il numero di celle lungo le tre direzioni coordinate.

L'idea è di eliminare  $A_{21}$  dalla matrice  $\mathbf{A}$ , riportata in (2.82), cioè rimpiazzarlo con uno zero. Ciò si ottiene moltiplicando la prima equazione (prima riga della matrice) per  $A_{21}/A_{11}$  e sottraendola dalla seconda equazione. In questo processo, anche tutti gli altri elementi della seconda riga risulteranno modificati, così come il secondo elemento  $S_2$  del termine noto. Poi si moltiplica la prima equazione per  $A_{31}/A_{11}$  e la si sottrae dalla terza. Si procede così per tutti gli altri elementi della prima colonna della matrice:

$$\begin{aligned} A'_{ij} &= A_{ij} - \frac{A_{i1}}{A_{11}} A_{1j} \\ S'_i &= S_i - \frac{A_{i1}}{A_{11}} S_1 \end{aligned} \quad i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.83)$$

dove nella (2.83) i pedici  $i$  e  $j$  indicano, rispettivamente, la riga e la colonna della matrice, il segno “=” significa *sostituisci*, e l’apice “’” sta ad indicare coefficienti modificati. Dopo questo primo passaggio la matrice, nella quale per chiarezza si sono indicati anche i termini nulli, è così modificata:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A'_{N2} & \dots & A'_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Risulta quindi che nessuna delle equazioni  $2, 3, \dots, N$  contiene la la variabile  $\phi_1$ . Si passa quindi ad eliminare la variabile  $\phi_2$  da questo sistema ridotto, nello stesso modo, e si continua quindi per le colonne  $3, 4, \dots, N - 1$ . In termini generali:

$$\begin{aligned} A'_{ij} &= A'_{ij} - \frac{A'_{ik}}{A'_{kk}} A_{kj} \\ S'_i &= S'_i - \frac{A'_{ik}}{A'_{kk}} S'_k \end{aligned} \quad k = 1, \dots, N - 1, i = k + 1, \dots, N, j = k, \dots, N \quad (2.85)$$

Nella (2.85) i fattori  $A'_{ik}/A'_{kk}$  sono detti *moltiplicatori*, o coefficienti moltiplicativi, e la matrice risultante  $\mathbf{U}$  è in forma triangolare superiore:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ 0 & A'_{22} & \dots & A'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}' = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S'_2 \\ \vdots \\ S'_N \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

A questo punto il sistema così modificato è facilmente risolto: osservando che:

$$\phi_N = \frac{S'_N}{A'_{NN}} \quad (2.87)$$

è sufficiente procedere all’indietro:

$$\phi_i = \frac{S'_i - \sum_{j=i+1}^N A'_{ij} \phi_j}{A'_{ii}} \quad i = N - 1, \dots, 1 \quad (2.88)$$

La sequenza di operazioni che, partendo dalla matrice triangolare superiore, fornisce i valori delle incognite, è detta *sostituzione all’indietro* (backsubstitution). Si può dimostrare che, per  $N$  sufficientemente grande, il numero totale di operazioni richieste

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

dal metodo di Gauss è proporzionale a  $N^3/3$ , sebbene la fase di sostituzione all'indietro richiede  $N^2/2$  operazioni, ed è quindi molto meno costosa. Il costo elevato, in termini di numero di operazioni per  $N$  grande, dell'algoritmo di Gauss, giustifica la ricerca di metodi più economici per la soluzione dei sistemi di equazioni, ed infatti esso trova scarso utilizzo, in questa forma, nei problemi di termofluidodinamica computazionale.

### Decomposizione LU

Fra le varianti più interessanti del metodo di Gauss vi è la decomposizione LU (da *Lower-Upper*). Ricordando che l'inversa di una matrice triangolare inferiore è anch'essa una matrice triangolare inferiore, l'idea, che non si dimostra, alla base di tale metodo è di trasformare, o più propriamente *fattorizzare*, la matrice  $\mathbf{A}$  nel prodotto di una matrice triangolare superiore  $\mathbf{U}$  ed una matrice triangolare inferiore  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (2.89)$$

Per rendere la fattorizzazione unica, si impone che gli elementi diagonali della matrice  $\mathbf{L}$ ,  $L_{ii}$ , siano unitari (o, in modo equivalente, siano unitari gli elementi diagonali  $U_{ii}$  della matrice  $\mathbf{U}$ ). È possibile dimostrare che la matrice  $\mathbf{U}$  è proprio la (2.86) ottenuta nella fase di eliminazione in avanti del metodo di Gauss, mentre gli elementi della matrice  $\mathbf{L}$  sono i coefficienti moltiplicativi,  $A_{ji}/A_{ii}$ , utilizzati in tale fase. Ciò consente, in pratica, di ottenere la fattorizzazione (2.89) attraverso una piccola modifica dell'algoritmo di Gauss.

La fattorizzazione LU consente di ottenere la soluzione del sistema di partenza in due passi. Definito:

$$\mathbf{U} \Phi = \mathbf{Y} \quad (2.90)$$

l'equazione di partenza (2.81) diventa:

$$\mathbf{L} \mathbf{Y} = \mathbf{S} \quad (2.91)$$

La soluzione, in sequenza, delle (2.91) e (2.90) consente di risolvere il problema.

L'importanza del metodo di decomposizione LU deriva da due considerazioni:

1. A differenza del metodo di Gauss, la fattorizzazione non richiede la conoscenza del vettore  $\mathbf{S}$  dei termini noti. In tal modo se, come spesso accade (ad

esempio con alcuni metodi per problemi non stazionari), è necessario risolvere più volte lo stesso sistema, ma con diversi vettori dei termini noti, è sufficiente eseguire la fattorizzazione una volta soltanto, con notevole risparmio.

2. La decomposizione LU – o sue varianti – costituisce la base di alcuni dei migliori metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari.

È utile aggiungere che esistono numerose varianti del metodo, rivolte a casi di particolare interesse nella termofluidodinamica computazionale, quali matrici simmetriche, matrici sparse *etc.*

### Metodi particolari

Vi sono casi speciali di sistemi lineari, per i quali esistono algoritmi di soluzione estremamente efficaci, in termini di operazioni e quindi tempo di CPU, e di memoria richiesta. Si tratta di metodi, tuttavia, limitati a geometrie semplici, e quindi di interesse per attività di ricerca di tipo fondamentale, piuttosto che per la soluzione di problemi applicativi. La loro efficienza, inoltre, si manifesta soprattutto per soluzioni ripetute del medesimo sistema con differenti termini noti.

Alcuni di questi sono particolarmente semplici, quali i metodi per la soluzione di sistemi tridiagonali o sistemi tridiagonali ciclici, mentre gli altri sono piuttosto complessi. Per tale ragione, rimandando alla letteratura per maggiori informazioni, ci limitiamo solo ad elencare quelli di maggiore interesse nella termofluidodinamica computazionale, ed i relativi costi in termini di operazioni.

- Algoritmi per sistemi tridiagonali e tridiagonali ciclici: esistono numerose varianti (Thomas, Temperton, *etc.*). Per tutti il numero di operazioni scala linearmente con il numero di incognite  $N$ , anziché con  $N^3$ , come nell'eliminazione di Gauss. Per questa ragione, oltre al semplice caso monodimensionale, il basso costo di soluzione di sistemi tridiagonali costituisce la base per la soluzione, secondo un approccio iterativo, di problemi multidimensionali.
- Algoritmi per griglie Cartesiane (ed anche cilindriche e sferiche) 2D e 3D *uniformi*: sono basati su metodi FFT (Fast Fourier Transform) e di riduzione ciclica. Si tratta di algoritmi particolarmente efficienti, ed il numero di operazioni, escludendo la fase di fattorizzazione, è dell'ordine di  $N \times (\ln_2 N)$ .
- Algoritmi per griglie Cartesiane (ed anche cilindriche e sferiche) 2D e 3D *non uniformi*: fra questi si cita il metodo basato sulla decomposizione matriciale (*Matrix Decomposition*), per il quale il numero di operazioni, per la sola fase di soluzione, varia, per  $N$  grande, con  $N^{4/3}$ .

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

### 2.6.2 Metodi iterativi

L'utilizzo di metodi iterativi, cioè metodi per i quali il numero esatto di operazioni non è noto a priori, è giustificato dalle seguenti osservazioni:

- Con il metodo LU, sebbene la matrice  $\mathbf{A}$  sia sparsa, le matrici  $\mathbf{L}$  ed  $\mathbf{U}$  sono in generale *piene*, e quindi la memoria richiesta è rilevante.
- Gli errori dovuti alla discretizzazione sono usualmente ben superiori agli errori di arrotondamento accumulati, con i metodi diretti, nel processo di soluzione del sistema.
- In numerosi problemi applicativi è necessario risolvere sistemi di rilevante dimensione, per i quali un metodo diretto richiederebbe una quantità di memoria non disponibile.

Per queste ragioni, nei programmi CFD commerciali (cfr. Cap. 7) la soluzione dei sistemi di equazioni è ottenuta ricorrendo, ormai esclusivamente, a metodi di tipo iterativo. L'idea alla base dei metodi iterativi consiste nel partire da una soluzione di tentativo, e di migliorarla sino al livello desiderato. Se il costo computazionale della singola iterazione è basso, ed il numero di iterazioni necessarie è modesto, i metodi iterativi possono essere più economici dei metodi diretti *standard*. Inoltre, la minor memoria richiesta dai metodi iterativi consente di affrontare problemi di maggior complessità, o di migliorare l'accuratezza a seguito di una discretizzazione più fine.

Considerando il sistema di equazioni dato dalla (2.81), possiamo affermare che dopo  $n$  iterazioni avremo una soluzione approssimata  $\Phi^n$ , che non soddisfa l'equazione in modo esatto: ciò significa che vi sarà un residuo  $\mathbf{r}^n$ :

$$\mathbf{A}\Phi^n = \mathbf{S} - \mathbf{r}^n \quad (2.92)$$

Sottraendo la (2.92) dalla (2.81) si ottiene una relazione fra l'*errore di convergenza*  $\epsilon^n$ , definito dalla:

$$\epsilon^n = \Phi - \Phi^n \quad (2.93)$$

ed il residuo:

$$\mathbf{A}\epsilon^n = \mathbf{r}^n \quad (2.94)$$

Ovviamente l'obiettivo di un metodo iterativo è quello di diminuire, sino a zero, il residuo, ed in tal caso anche l'errore di convergenza va a zero. Un tipico schema iterativo può essere scritto come:

$$\mathbf{M}\Phi^{n+1} = \mathbf{N}\Phi^n + \mathbf{B} \quad (2.95)$$

Per qualunque metodo iterativo la soluzione, a convergenza avvenuta, deve soddisfare l'equazione (2.81). A convergenza, inoltre,  $\Phi^{n+1} = \Phi$ , da cui:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{S} \quad (2.96)$$

o, più in generale:

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{S} \quad (2.97)$$

dove  $\mathbf{P}$  è una matrice (non singolare) di *precondizionamento*. Una versione alternativa della (2.95) si ottiene sottraendo  $\mathbf{M}\Phi^n$  da quest'ultima:

$$\mathbf{M} (\Phi^{n+1} - \Phi^n) = \mathbf{B} - (\mathbf{M} - \mathbf{N}) \Phi^n \quad \text{o} \quad \mathbf{M} \delta^n = \mathbf{r}^n \quad (2.98)$$

dove  $\delta^n = \Phi^{n+1} - \Phi^n$  è la *correzione*, o aggiornamento, e rappresenta un'approssimazione dell'errore di convergenza.

Un metodo iterativo è tanto più efficace quanto più economica è la soluzione del sistema (2.95), o (2.98), e quanto più rapida è la convergenza, cioè minore il numero di iterazioni necessarie. Si può dimostrare che la velocità di convergenza è funzione del *raggio spettrale*  $\lambda_1$ , definito come il modulo dell'autovalore massimo della matrice  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ . In particolare, un'espressione approssimata del numero di iterazioni necessario è dato dalla:

$$n \approx \frac{\ln \left( \frac{\delta}{a_1} \right)}{\ln \lambda_1} \quad (2.99)$$

dove  $a_1$  è una costante e  $\delta$  è la tolleranza richiesta per l'errore di convergenza. Dalla (2.99) si può notare che, per  $\lambda_1$  prossimo all'unità, la convergenza può risultare molto lenta.

Vediamo una breve rassegna dei metodi iterativi più comuni.

### Metodi di base

- *Metodo di Jacobi*. Si tratta del metodo più semplice, per il quale  $\mathbf{M}$  è una matrice diagonale, i cui elementi sono proprio gli elementi della diagonale principale di  $\mathbf{A}$ . Utilizzando la notazione geografica il metodo può essere espresso dalla:

$$\phi_P^{n+1} = \frac{S_P - A_E \phi_E^n - A_W \phi_W^n - A_N \phi_N^n - A_S \phi_S^n}{A_P} \quad (2.100)$$

Si può dimostrare che il numero di iterazioni richiesto è proporzionale al quadrato del numero di VC in una direzione. È quindi un metodo piuttosto lento, e perciò di scarsa utilità.

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

- *Metodo di sovrarilassamento* o *SOR (Successive Over-Relaxation)*. In questo metodo la matrice  $\mathbf{M}$  è costituita dalla porzione triangolare inferiore della matrice  $\mathbf{A}$ . Se ogni iterazione, seguendo l'ordine lessicografico (fig. 2.10), procede ad esempio lungo le colonne della griglia, partendo dall'angolo in alto a sinistra, il metodo può essere efficacemente espresso dalla:

$$\phi_P^{n+1} = (1 - \omega) \phi_P^n + \omega \frac{S_P - A_E \phi_E^n - A_W \phi_W^{n+1} - A_N \phi_N^{n+1} - A_S \phi_S^n}{A_P} \quad (2.101)$$

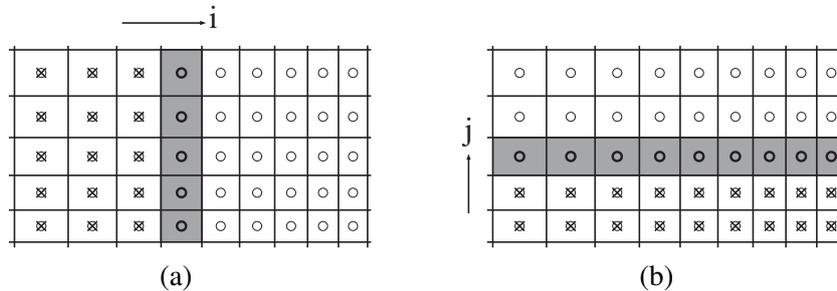
dove  $\omega$  è il fattore di sovrarilassamento, maggiore dell'unità, necessario per accelerare la convergenza. Sebbene il valore *ottimale* di  $\omega$  varia da caso a caso, è solitamente compreso nell'intervallo (1.5 – 1.85). Il metodo SOR è decisamente più efficiente del metodo di Jacobi poiché, a differenza di quest'ultimo, con il SOR si utilizzano i *valori nuovi* – all'iterazione attuale – delle variabili non appena questi si rendono disponibili. La semplicità del metodo e le prestazioni accettabili, fanno sì che venga ancora utilizzato.

- *Metodo di Gauss-Seidel*. Il metodo di Gauss-Seidel corrisponde alla (2.101) con  $\omega = 1$ , e quindi la sua efficienza è inferiore al SOR.
- *Metodo di sovrarilassamento per linee* o *SLOR (Successive Line Over-Relaxation)*. Si tratta di una variante del SOR, nel quale però vengono aggiornate simultaneamente le variabili corrispondenti ad un'intera linea – riga o colonna – di VC. La matrice di iterazione  $\mathbf{M}$  è costituita da un sottoinsieme della  $\mathbf{A}$ , relativo ai soli coefficienti delle variabili sulla linea in esame. Come illustrato in figura 2.11, nella quale il simbolo  $\otimes$  indica le variabili già aggiornate nel corso dell'iterazione, si può procedere per righe e/o per colonne, o eventualmente alternando le due modalità.

Supponendo di procedere per colonne, e per valori di  $i$  crescenti, si può scrivere la seguente equazione per il generico VC della colonna:

$$A_P \phi_{i,j}^{n+1} + A_N \phi_{i,j+1}^{n+1} + A_S \phi_{i,j-1}^{n+1} = [S_P - A_E \phi_{i+1,j}^n - A_W \phi_{i-1,j}^{n+1}] \quad (2.102)$$

dove si è utilizzato il set di indici  $i,j$  per le variabili, ed i termini relativi alle altre colonne sono stati portati a destra nel termine noto. È facile vedere che l'insieme delle equazioni (2.102) per tutti i VC della colonna  $i$  costituisce un sistema tridiagonale, risolvibile in modo semplice e, soprattutto, economico.



**Figura 2.11:** Sovrarilassamento per linee (SLOR): (a) - per colonne; (b) - per righe. Con “O” sono indicate le variabili in corso di aggiornamento, con “⊗” le variabili già aggiornate e con “○” quelle da aggiornare.

Anche per il metodo SLOR è possibile introdurre un opportuno coefficiente di sovrarilassamento  $\omega$ , per migliorare la velocità di convergenza, che è comunque superiore al metodo SOR.

È infine utile ricordare che, per i metodi base ora visti applicati a griglie strutturate, non è necessario memorizzare l'intera matrice dei coefficienti,  $\mathbf{A}$ , nella forma canonica (2.82), ma risulta più efficiente memorizzare i coefficienti in matrici o vettori (arrays) di dimensioni pari a quella della griglia. Ad esempio, in problemi bi-dimensionali,  $A_P(N_i \times N_j)$ ,  $A_E(N_i \times N_j)$  etc, oppure  $A_P(N_i, N_j)$ ,  $A_E(N_i, N_j)$  etc.

### Cenni sui metodi basati sul gradiente

I metodi basati sul gradiente - la cui derivazione è alquanto complessa - trovano fondamento nel fatto che è possibile minimizzare una funzione, rispetto a più direzioni, lavorando su una direzione alla volta. Questi metodi, particolarmente efficienti e per questo utilizzati in numerosi programmi commerciali, possono venire classificati in funzione del tipo di sistemi (matrici) lineari a cui si rivolgono:

1. *Sistemi simmetrici.* Questi risultano tipicamente dall'equazione di Poisson della correzione di pressione, o della pressione, e nei problemi di Stokes, cioè flussi puramente diffusivi. Fra i metodi più comuni per tali sistemi si citano CG (Conjugate Gradient) e ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient).
2. *Sistemi non simmetrici.* Sistemi non simmetrici risultano tipicamente dalle equazioni di trasporto, e per questi si utilizzano, a titolo di esempio, BCG (BiConjugate Gradient), CGS (Conjugate Gradient Squared), CGSTAB (CGS Stabilized) e GMRES (Generalized Minimal Residual).

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

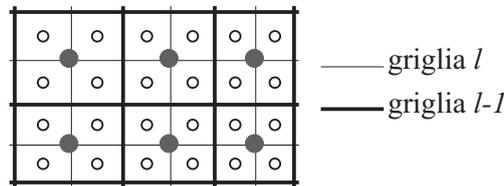
I metodi basati sul gradiente, e comunemente utilizzati nelle applicazioni, fanno uso di opportuni *precondizionatori* al fine migliorarne le prestazioni. Si ricorda infatti che la velocità di convergenza di tali metodi diminuisce all'aumentare dell'*indice di condizionamento*  $\kappa$  della matrice  $\mathbf{A}$ , definito dalla:

$$\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (2.103)$$

dove  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  rappresentano, rispettivamente, il massimo ed il minimo autovalore della matrice. L'idea alla base delle tecniche di preconditionamento è quello di sostituire il problema in esame con un altro che, pur con la medesima soluzione, sia caratterizzato da un indice di condizionamento inferiore.

### Cenni sui metodi multigriglia

I metodi multigriglia, nella loro formulazione standard, sono basati sull'utilizzo di più griglie: la *griglia effettiva* di calcolo (livello  $l$ ), ed una sequenza di griglie via via più rade ( $l-1, l-2, \dots, 1$ ), dove ciascuna cella è ottenuta *sommando* (agglomerando) più celle della griglia immediatamente più fine: tipicamente, per griglie strutturate, 4 celle in 2D, come illustrato in figura 2.12, e 8 celle in 3D.



**Figura 2.12:** Griglia  $l$  e griglia  $(l-1)$  nel metodo multigriglia.

Sebbene l'analisi dettagliata dei metodi multigriglia sia alquanto complessa, l'idea alla base di tali metodi, limitando per semplicità la descrizione al caso di due sole griglie, nasce dalle seguenti osservazioni:

- Tutti i metodi iterativi risultano particolarmente efficaci nella riduzione degli errori (residui) di *piccola lunghezza d'onda*, cioè degli errori di elevata frequenza. Si tratta di errori la cui lunghezza d'onda è comparabile con la dimensione della griglia.
- La riduzione degli errori di piccola lunghezza d'onda avviene nelle prime iterazioni.

- Viceversa, la riduzione degli errori di lunghezza d'onda via via più elevata (bassa frequenza) avviene più lentamente, ed in effetti, dopo le prime iterazioni, la velocità di convergenza si riduce.

Si è pensato, quindi, di ridurre gli errori di bassa frequenza, in modo molto più economico, su una griglia più rada, sulla quale i valori delle variabili (o dei residui) sono ottenuti da quella più fine con opportune tecniche di *interpolazione* o somma dei residui. Una volta ottenuta la soluzione sulla griglia rada, questa viene *iniettata* o sommata sulla griglia fine. I benefici, in termini di onere computazionale, derivano dal fatto che le iterazioni sulla griglia più rada sono molto più economiche (almeno di un fattore 4 in 2D e di un fattore 8 in 3D), ed anche dalla maggiore velocità di convergenza, poiché sulla griglia rada lo stesso errore ha frequenza più elevata. Il vantaggio aumenta utilizzando più griglie, o livelli, ciascuna utilizzata per abbattere il corrispondente errore di frequenza più elevata, sino a giungere alla griglia più rada, spesso affrontata, dato il limitato numero di variabili, con un metodo diretto. Si può dimostrare che, in determinate condizioni, il numero di iterazioni *equivalenti* (parametro che tiene conto del minor costo per iterazione sulle griglie rade), e quindi il tempo di calcolo, varia linearmente con il numero  $N$  di variabili.

I metodi multigriglia più versatili e robusti per il FVM, e quindi di interesse nelle applicazioni della termofluidodinamica computazionale, sono di due tipi:

1. Multigriglia di tipo *Additivo* - ACM (Additive Correction Multigrid).
2. Multigriglia di tipo *Algebrico* - AGM (Algebraic Multigrid).

Nei metodi di tipo 1 viene sfruttata, oltre alla topologia della griglia, la proprietà di conservatività del metodo dei volumi finiti. Si tratta di un approccio utilizzabile anche con griglie non strutturate, costruendo, nelle griglie più rade, dei macro-VC di forma poliedrica, attraverso un processo di *agglomerazione* – Additive Correction Multigrid. I metodi multigriglia di tipo 2, non limitati al FVM, vengono utilizzati tipicamente per griglie non strutturate, e sono così chiamati poiché si opera solo per via algebrica, ricavando una serie di matrici dei coefficienti (livelli) via via più piccole partendo dalla matrice della griglia effettiva. Esistono infine, e sono utilizzati in alcuni programmi commerciali, dei metodi di tipo *misto*, che, pur operando per via algebrica, sfruttano le proprietà del FVM. Come risolutore iterativo nelle varie griglie, detto *smoother* dato il suo compito di abbattere solo gli errori di alta frequenza, può essere utilizzato uno qualsiasi dei metodi iterativi visti.

### 2.7 SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI

Il metodo dei volumi finiti rappresenta uno degli approcci più comuni per la risoluzione numerica di problemi termofluidodinamici, come comprovato dalla diffusione di codici commerciali basati su tale tecnica (cfr. Cap. 7). Le equazioni algebriche ottenute dalla discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes, ed eventualmente dell'energia ed altre grandezze, potrebbero venire risolte simultaneamente, per tutte le variabili, oppure in modo *sequenziale*, una variabile dopo l'altra. In quest'ultimo caso la soluzione procede, per ogni variabile, *congelando* le altre al passo di tempo o iterazione precedente. In tal senso, quindi, quanto sinora visto per la generica equazione di trasporto viene applicato alle equazioni di Navier-Stokes per le componenti di velocità, con alcune avvertenze che saranno illustrate al punto 2.7.1.

A differenza di quanto avvenuto con il metodo degli elementi finiti, storicamente i primi codici ai volumi finiti utilizzavano l'approccio sequenziale, o *segregato*, che consentiva un notevole risparmio di memoria. Inoltre, le prime applicazioni del metodo utilizzavano griglie strutturate di tipo Cartesiano, fatto che, sebbene poco flessibile dal punto di vista geometrico, consentiva tempi di calcolo accettabili anche per problemi relativamente complessi. Successivamente il metodo è stato esteso alle griglie strutturate curvilinee, prima in modalità monoblocco, passando poi alle griglie multiblocco. Tale strategia, peraltro ancora utilizzata in alcuni programmi commerciali, presenta una discreta flessibilità geometrica, e oneri computazionali non eccessivi.

Tuttavia, le difficoltà di una generazione completamente *automatica* della griglia, in presenza di geometrie complesse, la necessità, particolarmente sentita in ambito industriale, di poter *importare* le geometrie generate con i sistemi CAD e di modellazione solida più diffusi, ed infine le difficoltà nell'adattare ed infittire la griglia, durante il corso della soluzione, nelle zone di maggior interesse (*griglie adattive*), hanno spinto allo sviluppo del metodo ai volumi finiti per griglie non strutturate, analoghe a quelle già da tempo utilizzate con il metodo degli elementi finiti, e che verranno considerate al punto 2.9. Anche con tali griglie vengono comunemente utilizzate metodologie di soluzione di tipo segregato, sebbene negli ultimi tempi vi sia un certo interesse nel perseguire metodi di soluzione di tipo *accoppiato*. In quest'ultimo caso però, come verrà illustrato al punto 2.8.2, l'accoppiamento riguarda solo le variabili appartenenti ad un *sotto-dominio* del problema.

Spesso, con il metodo dei volumi finiti, si utilizzano procedure di calcolo di tipo iterativo per problemi stazionari o, quando il problema richieda un'analisi temporale, si fa ricorso a tecniche di integrazione di tipo implicito che, come visto, danno

luogo a sistemi di equazioni ad ogni passo di tempo. Fra i metodi segregati più utilizzati si segnala il metodo *SIMPLE* (da Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), e derivati da questo, come SIMPLER, SIMPLEC *etc.*. Tali metodi, ampiamente descritti in letteratura, non differiscono sostanzialmente dai procedimenti di calcolo di tipo *Projection* descritti al punto 1.7, e che sono considerati, nel capitolo 3, con il metodo degli elementi finiti. Per ragioni di omogeneità, e per consentire un'agevole confronto con il metodo degli elementi finiti, nel seguito faremo quindi riferimento ai metodi di proiezione.

Come illustrato nel capitolo 2, i metodi di Proiezione consistono nella determinazione di una equazione differenziale per la pressione a partire dal vincolo di conservazione della massa. Il nome di proiezione deriva dal fatto che i campi di velocità approssimati, trovati nella prima fase del calcolo, vengono successivamente *proiettati* in campi a divergenza nulla tenendo conto delle correzioni di pressione. Prima di procedere alla formulazione della forma discretizzata, con il FVM, del metodo di proiezione, vediamo quali sono le differenze più importanti fra le equazioni di Navier-Stokes e la generica equazione di trasporto, e quali siano le conseguenze al riguardo delle possibili distribuzioni delle variabili velocità e pressione sulla griglia di calcolo.

### 2.7.1 Disposizione delle variabili sulla griglia

Si è visto nel capitolo 2 che le equazioni di Navier-Stokes non sono altro che le equazioni di trasporto delle componenti di velocità. Ricordando la forma conservativa, data dalla (2.2), in coordinate Cartesiane bidimensionali le equazioni di Navier-Stokes e della continuità sono espresse dalle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \rho_0 \beta (t - t_0) g_x \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \rho_0 \beta (t - t_0) g_y \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.106)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

L'unica differenza importante fra le (2.104-2.105) e la generica equazione di trasporto (2.3) è la presenza di un termine sorgente, costituito dal gradiente di pressione, che richiede particolare attenzione. Il termine di galleggiamento, invece, non dà luogo a particolari problemi, e viene trattato come visto al punto (2.4.2). Supponiamo di discretizzare nello spazio la prima delle due equazioni di Navier-Stokes. Con il metodo dei volumi finiti il termine relativo al gradiente di pressione viene usualmente espresso (approccio conservativo) come forza di superficie:

$$-\int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = - \left[ \int_{A_e} p dA - \int_{A_w} p dA \right] \approx \Delta y_j (p_w - p_e) \quad (2.107)$$

Se, per ottenere i valori delle pressioni sulle facce, utilizziamo ad esempio un'approssimazione mediante interpolazione lineare (differenze centrali), avremo:

$$\Delta y_j (p_w - p_e) \approx \Delta y_j \left( \frac{p_W + p_P}{2} - \frac{p_P + p_E}{2} \right) = \Delta y_j \left( \frac{p_W - p_E}{2} \right) \quad (2.108)$$

Risulta quindi che il termine relativo alla pressione è valutato, per ogni VC, utilizzando una griglia due volte più grossolana di quella utilizzata per il calcolo della velocità.

Ma il problema più importante è dato dal debole accoppiamento fra il campo delle velocità e quello delle pressioni: infatti, in base alla (2.108), un campo di pressione a scacchiera (*checkerboard pressure field*), o comunque con rapide oscillazioni, non verrebbe *sentito* dal campo di velocità. Tale situazione non è ovviamente realistica, e potrebbe portare a risultati inaccurati o addirittura all'insuccesso (divergenza) del calcolo. È quindi necessario eliminare questo inconveniente.

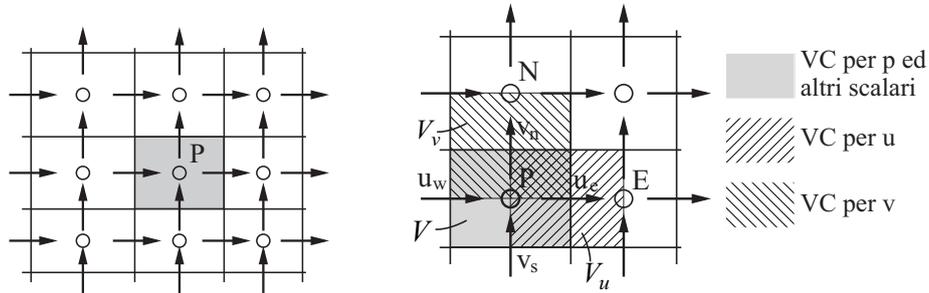
La prima strategia utilizzata è stata quella di utilizzare griglie diverse per le componenti di velocità, rispetto a quella, principale, utilizzata per la pressione e le altre grandezze scalari. Tali griglie sono ottenute traslando (sfalsando) i VC della griglia principale, per ciascuna componente di velocità e nella direzione corrispondente, di una quantità pari a metà del lato del VC. La situazione è rappresentata in figura 2.13, nella quale sono indicati i VC per le due componenti di velocità  $u$  e  $v$ . Con questa disposizione delle variabili (*staggered grid*), l'integrazione del termine relativo al gradiente di pressione per la componente della velocità  $u_e$  fornisce:

$$-\int_{V_u} \frac{\partial p}{\partial x} dV = - \left[ \int_{A_{E,x}} p dA - \int_{A_{P,x}} p dA \right] \approx \Delta y_j (p_P - p_E) \quad (2.109)$$

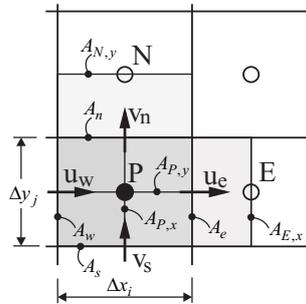
dove il significato di  $A_{E,x}$  ed  $A_{P,x}$  è indicato in figura 2.14.

Pertanto ora non ci sono più problemi con campi di pressione *checkerboarded*, in quanto il gradiente viene valutato facendo riferimento al valore della pressione

## 2.7. PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI



**Figura 2.13:** Disposizione sfalsata (staggered) delle variabili sulla griglia.



**Figura 2.14:** Notazione utilizzata per le griglie sfalsate.

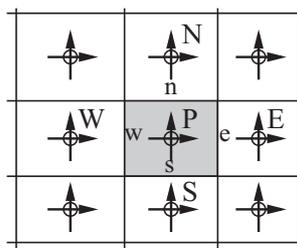
in due nodi adiacenti. L'utilizzo di griglie sfalsate, per la pressione e le velocità, nel metodo dei volumi finiti, corrisponde all'utilizzo di funzioni di forma di ordine inferiore per la pressione (*unequal order interpolation*) nel metodo degli elementi finiti, come accennato nel capitolo 3. La disposizione sfalsata delle variabili offre ulteriori vantaggi:

- Alcuni termini delle equazioni, che richiederebbero altrimenti delle interpolazioni, possono venire valutati, con un'accuratezza del second'ordine, in modo semplice: è il caso, oltre che del termine di pressione già visto, anche di alcuni termini diffusivi.
- Si può dimostrare che, operando su tale griglia, viene garantita la conservazione dell'energia cinetica.

Vi sono, naturalmente, anche degli svantaggi, che riguardano le difficoltà di utilizzo e gestione di griglie staggered di tipo curvilineo, ed ancor più non strutturate

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

(paragrafo 2.9). Ciò ha contribuito a rendere popolare, negli ultimi tempi, la distribuzione *co-locata* (collocated) delle variabili, illustrata in figura 2.15, ed infatti la gran parte dei programmi CFD commerciali utilizza proprio tali griglie.



**Figura 2.15:** Disposizione co-locata (collocated) delle variabili sulla griglia.

Tuttavia, la proprietà di conservazione dell'energia cinetica delle griglie sfalsate, le rende particolarmente idonee nelle simulazioni di flussi turbolenti con tecniche LES e DNS. L'uso di griglie co-locate richiede opportune tecniche (interpolazione di Rhie e Chow) per evitare il rischio di disaccoppiamento fra il campo delle velocità ed il campo delle pressioni. Nel seguito faremo riferimento all'uso della disposizione sfalsata (staggered) delle variabili sulla griglia, mentre al punto 2.9, trattando delle griglie non strutturate, queste saranno assunte di tipo co-locato.

## 2.8 PROCEDURA AI VOLUMI FINITI

### 2.8.1 Metodi segregati

La procedura ai volumi finiti basata sull'algoritmo descritto al punto 1.7 viene qui illustrata con riferimento, per semplicità, all'analisi di deflussi bidimensionali di fluidi con proprietà costanti. La presenza del termine di galleggiamento, nelle equazioni di quantità di moto, viene semplificata attraverso l'ipotesi di Oberbeck-Boussinesq, espressa dalla (1.67). La formulazione ai volumi finiti non presenta particolari difficoltà, poiché tutti i termini delle equazioni vengono espressi secondo quanto visto nei paragrafi precedenti.

Con riferimento al generico VC rappresentato in figura 2.13, ad ogni passo di integrazione temporale vengono dapprima calcolate le componenti della velocità di tentativo (o di stima)  $u^*$  e  $v^*$ , assumendo la pressione di stima  $p^*$  pari alla pressione valutata all'istante precedente  $p^n$ . Ciò si traduce nel risolvere in sequenza le

equazioni discretizzate corrispondenti all'eq. (1.100):

$$\begin{aligned} \rho \frac{u^* - u^n}{\Delta \vartheta} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}^n \gamma u^*) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}^n (1 - \gamma) u^n) = \\ \nabla \cdot (\mu \nabla \gamma u^*) + \nabla \cdot (\mu \nabla (1 - \gamma) u^n) - \frac{\partial p^*}{\partial x} \\ - \rho \beta (t^n - t_0) g_x \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{v^* - v^n}{\Delta \vartheta} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}^n \gamma v^*) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}^n (1 - \gamma) v^n) = \\ \nabla \cdot (\mu \nabla \gamma v^*) + \nabla \cdot (\mu \nabla (1 - \gamma) v^n) - \frac{\partial p^*}{\partial y} \\ - \rho \beta (t^n - t_0) g_y \end{aligned} \quad (2.111)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione termica e  $g_x$  e  $g_y$  sono le componenti del vettore di accelerazione di gravità. Le (2.111) e (2.112) sono state scritte linearizzando i termini convettivi non-lineari secondo il metodo di *Picard*:

$$\rho \mathbf{w} \gamma \mathbf{w} \approx (\rho \mathbf{w}^n) \gamma \mathbf{w} \quad (2.112)$$

Portando a destra dell'uguale i termini che non contribuiscono alla matrice dei coefficienti, ed integrando sui rispettivi volumi di controllo si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta \vartheta} \int_{V_u} u^* dV + \rho \gamma \int_{A_u} u^* \mathbf{w}^n \cdot \mathbf{n} dA - \mu \gamma \int_{A_u} \nabla u^* \cdot \mathbf{n} dA \\ = -\rho (1 - \gamma) \int_{A_u} u^n \mathbf{w}^n \cdot \mathbf{n} dA + \mu (1 - \gamma) \int_{A_u} \nabla u^n \cdot \mathbf{n} dA \\ - \left[ \int_{A_{E,x}} p^* dA - \int_{A_{P,x}} p^* dA \right] - \rho \beta g_x \int_{V_u} (t^n - t_0) dV + \frac{\rho}{\Delta \vartheta} \int_{V_u} u^n dV \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta \vartheta} \int_{V_v} v^* dV + \rho \gamma \int_{A_v} v^* \mathbf{w}^n \cdot \mathbf{n} dA - \mu \gamma \int_{A_v} \nabla v^* \cdot \mathbf{n} dA \\ = -\rho (1 - \gamma) \int_{A_v} v^n \mathbf{w}^n \cdot \mathbf{n} dA + \mu (1 - \gamma) \int_{A_v} \nabla v^n \cdot \mathbf{n} dA \\ - \left[ \int_{A_{N,y}} p^* dA - \int_{A_{P,y}} p^* dA \right] - \rho \beta g_y \int_{V_v} (t^n - t_0) dV + \frac{\rho}{\Delta \vartheta} \int_{V_v} v^n dV \end{aligned} \quad (2.114)$$

Con  $V_u, A_u$  e  $V_v, A_v$  si sono indicati, rispettivamente, il volume e la superficie dei VC per le due componenti della velocità (v. fig.2.14). Il calcolo degli integrali nel-

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

le (2.113) e (2.114) viene effettuato secondo le modalità già viste per la generica equazione di trasporto, e non presenta particolari difficoltà.

La correzione di pressione viene calcolata risolvendo l'equazione (1.104) che, integrata sul volume di controllo della pressione (griglia principale) fornisce:

$$\int_A \nabla p' \cdot \mathbf{n} \, dA = \frac{\rho}{\Delta\vartheta} \int_A \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (2.115)$$

e che in forma discreta, utilizzando un'espressione analoga alla (2.11) per valutare l'integrale a secondo membro della (2.115), diventa:

$$\begin{aligned} & \int_{A_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_e \, dy - \int_{A_w} \frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_w \, dy + \int_{A_n} \frac{\partial p'}{\partial y} \Big|_n \, dx - \int_{A_s} \frac{\partial p'}{\partial y} \Big|_s \, dx \\ & = \left\{ [u_e^* - u_w^*] \Delta y_j + [v_n^* - v_s^*] \Delta x_i \right\} \frac{\rho}{\Delta\vartheta} \end{aligned} \quad (2.116)$$

dove i gradienti delle pressioni di correzione sulle facce vengono valutati secondo la (2.22), ottenendo:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{p'_E - p'_P}{x_E - x_P} - \frac{p'_P - p'_W}{x_P - x_W} \right] \Delta y_j + \left[ \frac{p'_N - p'_P}{y_N - y_P} - \frac{p'_P - p'_S}{y_P - y_S} \right] \Delta x_i \\ & = \left\{ [u_e^* - u_w^*] \Delta y_j + [v_n^* - v_s^*] \Delta x_i \right\} \frac{\rho}{\Delta\vartheta} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Le componenti  $u'$  e  $v'$  delle correzioni di velocità vengono calcolate secondo la (1.101) che, integrata sui rispettivi volumi di controllo, diventa:

$$\frac{\rho}{\Delta\vartheta} \int_{V_u} u' \, dV = - \left[ \int_{A_{E,x}} p' \, dA - \int_{A_{P,x}} p' \, dA \right] \quad (2.118)$$

$$\frac{\rho}{\Delta\vartheta} \int_{V_v} v' \, dV = - \left[ \int_{A_{N,y}} p' \, dA - \int_{A_{P,y}} p' \, dA \right] \quad (2.119)$$

che in forma discreta, ed utilizzando le più semplici espressioni del second'ordine per l'integrazione e l'interpolazione, fornisce:

$$u'_e = - \frac{\Delta\vartheta}{\rho} \frac{(p'_P - p'_E)}{(x_P - x_E)} \quad (2.120)$$

$$v'_n = - \frac{\Delta\vartheta}{\rho} \frac{(p'_P - p'_N)}{(y_P - y_N)} \quad (2.121)$$

Infine i valori della pressione e delle componenti di velocità alla fine del passo temporale sono dati dalle (1.105) e (1.107):

$$\begin{aligned} p_P^{n+1} &= p_P^* + p'_P \\ u_e^{n+1} &= u_e^* + u'_e \\ v_n^{n+1} &= v_n^* + v'_n \end{aligned} \quad (2.122)$$

Per ciò che riguarda la temperatura, questa viene ottenuta integrando sul VC la (1.108), utilizzando lo stesso algoritmo di integrazione temporale delle (2.113), (2.114):

$$\begin{aligned} & \frac{\rho c_p}{\Delta \vartheta} \int_V t^{n+1} dV + \rho c_p \gamma \int_A t^{n+1} \mathbf{w}^n \cdot \mathbf{n} dA - \lambda \gamma \int_A \nabla t^{n+1} \cdot \mathbf{n} dA \\ &= -\rho c_p (1 - \gamma) \int_A t^n \mathbf{w}^n \cdot \mathbf{n} dA + \lambda (1 - \gamma) \int_A \nabla t^n \cdot \mathbf{n} dA \\ &+ \frac{\rho c_p}{\Delta \vartheta} \int_V t^n dV \end{aligned} \quad (2.123)$$

Va osservato che le proprietà termofisiche sono state ritenute costanti, e quindi portate fuori dai segni di integrale.

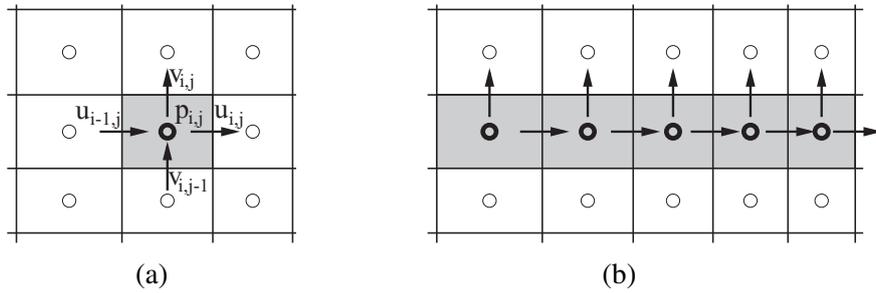
L'algoritmo di integrazione temporale tipo *projection* ora visto presenta molte varianti possibili, quale ad esempio quella espressa dalla (2.80). Inoltre, la metodologia illustrata può servire, viste le notevoli somiglianze, come riferimento per altri algoritmi di soluzione, come il SIMPLE e derivati.

### 2.8.2 Metodi accoppiati

I metodi segregati, sebbene convenienti dal punto di vista della richiesta di memoria e del tempo di calcolo, possono dar luogo a problemi di convergenza quando l'accoppiamento fra le variabili è molto pronunciato. Questo è il caso, ad esempio, di alcuni problemi di convezione naturale turbolenta, flussi multifase, flussi con reazioni chimiche *etc.*. Tali difficoltà di convergenza si manifestano, quando l'interesse si limita alla soluzione stazionaria (a regime), attraverso un aumento del numero di passi di tempo o, in modo equivalente, nell'aumento del numero di iterazioni. In questi casi, inoltre, non è infrequente la necessità di dover adottare passi di integrazione temporale molto ridotti, pena l'insuccesso (divergenza) del calcolo. Per questi casi difficili può risultare conveniente rinunciare all'approccio segregato, ed utilizzare una strategia di soluzione che preservi, in modo *implicito*, l'accoppiamento fra le variabili. Per ridurre la memoria richiesta, le variabili risolte simultaneamente appartengono tipicamente ad opportuni sotto-domini, che vengono *visitati* in sequenza, mentre si utilizzano i valori più recenti delle altre variabili. I sotto-domini sono usualmente costituiti da:

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

1. Un singolo VC, come schematizzato in figura 2.16-a. Si tratta di un'estensione del metodo iterativo di Gauss-Seidel a problemi con più variabili, ed è infatti chiamato SCGS (Symmetrically Coupled Gauss-Seidel). Può essere utilizzato anche per griglie non strutturate.
2. Una linea, riga o colonna, di VC. Si tratta di un metodo limitato a griglie strutturate, e fra i più comuni si cita il CELS (Coupled Equation Line Solver), illustrato in figura 2.16-b.



**Figura 2.16:** Variabili risolte simultaneamente nei metodi accoppiati: (a) SCGS; (b) CELS.

Vediamo ad esempio il metodo SCGS, limitatamente alle sole variabili pressione e velocità nel caso bidimensionale stazionario. Le equazioni relative alle incognite di figura 2.16-a, dove per convenienza è stata usata la notazione indiciale, sono ottenute direttamente dalle equazioni di quantità di moto:

$$A_{P_{i,j}}^u u_{i,j} + A_{E_{i,j}}^u u_{i+1,j} + A_{W_{i,j}}^u u_{i-1,j} + A_{N_{i,j}}^u u_{i,j+1} + A_{S_{i,j}}^u u_{i,j-1} + (p_{i+1,j} - p_{i,j}) \Delta y_j = S_{i,j}^u \quad (2.124)$$

$$A_{P_{i-1,j}}^u u_{i-1,j} + A_{E_{i-1,j}}^u u_{i,j} + A_{W_{i-1,j}}^u u_{i-2,j} + A_{N_{i-1,j}}^u u_{i-1,j+1} + A_{S_{i-1,j}}^u u_{i-1,j-1} + (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \Delta y_j = S_{i-1,j}^u \quad (2.125)$$

$$A_{P_{i,j}}^v v_{i,j} + A_{E_{i,j}}^v v_{i+1,j} + A_{W_{i,j}}^v v_{i-1,j} + A_{N_{i,j}}^v v_{i,j+1} + A_{S_{i,j}}^v v_{i,j-1} + (p_{i,j+1} - p_{i,j}) \Delta x_i = S_{i,j}^v \quad (2.126)$$

$$A_{P_{i,j-1}}^v v_{i,j-1} + A_{E_{i,j-1}}^v v_{i+1,j-1} + A_{W_{i,j-1}}^v v_{i-1,j-1} + A_{N_{i,j-1}}^v v_{i,j} + A_{S_{i,j-1}}^v v_{i,j-2} + (p_{i,j} - p_{i,j-1}) \Delta x_i = S_{i,j-1}^v \quad (2.127)$$

e dall'equazione di continuità che, integrata sul VC, fornisce:

$$(u_{i,j} - u_{i-1,j}) \Delta y_j + (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \Delta x_i = 0 \quad (2.128)$$

Nelle (2.124 – 2.127) i coefficienti  $A_P$ ,  $A_E$  etc sono ottenuti nel modo solito, ma i termini sorgenti non includono il termine relativo al gradiente di pressione, che invece è stato scritto in modo esplicito. Le cinque equazioni così scritte costituiscono un sistema lineare di cinque equazioni nelle cinque incognite  $u_{i-1,j}$ ,  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j-1}$ ,  $v_{i,j}$  e  $p_{i,j}$ . Sebbene si tratti di un sistema di piccola dimensione, la sua soluzione è eccessivamente onerosa, considerando che il numero di tali sistemi è pari al numero dei VC, e che è necessario procedere con più iterazioni o passi di integrazione temporale. Per poter semplificare il sistema, al fine di ottenere economicamente la soluzione per via analitica, si adotta la seguente strategia:

1. Per le equazioni di quantità di moto, si portano nel termine noto tutti i contributi, con l'esclusione del termine diagonale  $A_P$  e del contributo della pressione  $p_{i,j}$ .
2. L'equazione di continuità viene mantenuta in forma completa.

Così facendo si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} A_{P_{i-1,j}}^u & 0 & 0 & 0 & \Delta y_j \\ 0 & A_{P_{i,j}}^u & 0 & 0 & -\Delta y_j \\ 0 & 0 & A_{P_{i,j-1}}^v & 0 & \Delta x_i \\ 0 & 0 & 0 & A_{P_{i,j}}^v & -\Delta x_i \\ -\Delta y_j & \Delta y_j & -\Delta x_i & \Delta x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,j} \\ u_{i,j} \\ v_{i,j-1} \\ v_{i,j} \\ p_{i,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{i-1,j}^u \\ b_{i,j}^u \\ b_{i,j-1}^v \\ b_{i,j}^v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.129)$$

I termini noti contengono tutti gli altri contributi che non appaiono esplicitamente in forma matriciale, ad esempio:

$$\begin{aligned} b_{i,j}^u &= -p_{i+1,j}^* \Delta y_j + S_{i,j}^u \\ &\quad - A_{E_{i,j}}^u u_{i+1,j}^* - A_{W_{i,j}}^u u_{i-1,j}^* - A_{N_{i,j}}^u u_{i,j+1}^* - A_{S_{i,j}}^u u_{i,j-1}^* \end{aligned} \quad (2.130)$$

dove l'apice '\*' sta ad indicare il valore più aggiornato disponibile (*in store*). La soluzione dell'equazione (2.129) è ottenuta attraverso la seguente sequenza di operazioni:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\Delta y_j / A_{P_{i-1,j}}^u; & r_2 &= \Delta y_j / A_{P_{i,j}}^u \\ r_3 &= -\Delta x_i / A_{P_{i,j-1}}^v; & r_4 &= \Delta x_i / A_{P_{i,j}}^v \\ \text{DEN} &= r_1 \Delta y_j - r_2 \Delta y_j + r_3 \Delta x_i - r_4 \Delta x_i \\ p_{i,j} &= (r_1 b_{i-1,j}^u + r_2 b_{i,j}^u + r_3 b_{i,j-1}^v + r_4 b_{i,j}^v) / \text{DEN} \\ u_{i-1,j} &= (b_{i-1,j}^u - \Delta y_j p_{i,j}) / A_{P_{i-1,j}}^u; & u_{i,j} &= (b_{i,j}^u + \Delta y_j p_{i,j}) / A_{P_{i,j}}^u \\ v_{i,j-1} &= (b_{i,j-1}^v - \Delta x_i p_{i,j}) / A_{P_{i,j-1}}^v; & v_{i,j} &= (b_{i,j}^v + \Delta x_i p_{i,j}) / A_{P_{i,j}}^v \end{aligned} \quad (2.131)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

Il metodo SCGS ora illustrato è facilmente applicabile anche al caso di griglie non strutturate, e può essere efficacemente esteso risolvendo anche altre variabili, quando queste siano strettamente legate al campo di moto, come ad esempio la temperatura nei problemi di convezione naturale. La convenienza di tali metodi accoppiati deriva soprattutto dal loro utilizzo contestuale ad un metodo multigriglia, ed è seguendo questa strategia che essi sono infatti adottati in alcuni programmi commerciali.

### 2.9 GEOMETRIE COMPLESSE: GRIGLIE NON STRUTTURATE

La procedura di calcolo appena illustrata per griglie strutturate Cartesiane è particolarmente semplice ed accurata, e di agevole implementazione, ed infatti ha trovato applicazione in numerose ricerche di base e nelle prime versioni dei codici commerciali. Essa, tuttavia, presenta il grave difetto di non poter essere utilizzata, se non con drastiche semplificazioni, per le geometrie complesse di interesse industriale. Per tale ragione, è emersa la necessità di modificare il FVM in modo da affrontare anche tali problemi. Ciò è stato fatto inizialmente ricorrendo a griglie strutturate curvilinee (sez. 2.3.1), passando poi a griglie non strutturate. Nel primo caso, si utilizza una trasformazione di coordinate, da  $x, y, z$  a  $\xi, \eta, \zeta$ , in modo da trasformare il dominio in uno più semplice, tipicamente parallelepipedo o, nelle griglie strutturate multi-blocco, in più parallelepipedi accoppiati, come illustrato al punto 2.3.1. Si tratta di un approccio utilizzato in alcuni programmi commerciali, ma la tendenza attuale, da parte dei produttori, è quella di fornire la possibilità di utilizzare griglie non strutturate. Per ragioni di spazio, e vista la maggiore generalità delle griglie non strutturate (l'uso di griglie strutturate, o addirittura Cartesiane, rimane ovviamente garantito, sebbene con minore efficienza computazionale), in quanto segue considereremo solo griglie non strutturate.

Supporremo, per generalità, che il dominio di interesse venga discretizzato con una griglia non strutturata, costituita da VC di forma poliedrica arbitraria con un numero di facce  $n \geq 4$ , come illustrato in figura 2.17. Anticipiamo sin d'ora che, sebbene tale flessibilità geometrica possa essere d'interesse in alcune applicazioni, ed a tal proposito esistono generatori di griglia che la utilizzano, l'accuratezza maggiore si ottiene con celle a forma di *esaedri* regolari. Operando con il metodo dei volumi finiti, risulterà inoltre evidente che non è necessario effettuare una trasformazione di coordinate.

In figura 2.17, abbiamo indicato con  $C_0$  il *centroide*, o baricentro, del VC, definito dalla:

$$\int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C_0}) dV = 0 \quad (2.132)$$

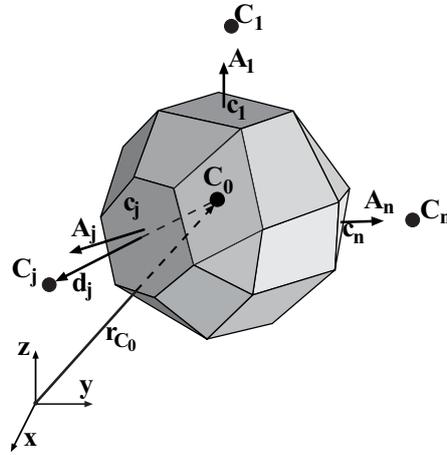


Figura 2.17: Generico volume di controllo.

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore dall'origine del sistema di riferimento al generico punto del VC, e  $V$  è il volume di quest'ultimo. I centroidi delle celle adiacenti, quelli cioè con una faccia in comune con il VC in esame, sono indicati con  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ed il vettore  $\mathbf{d}_j$  definisce la congiungente da  $C_0$  a  $C_j$ . Con  $c_j$  abbiamo indicato il *centroide* della faccia compresa fra  $C_0$  e  $C_j$ , definito in maniera analoga alla (2.132):

$$\int_{A_j} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) dA = 0 \quad (2.133)$$

e con  $\mathbf{A}_j$  il *vettore area* della faccia, cioè quel vettore il cui modulo è pari all'area della faccia, ed è orientato lungo la normale rivolta verso l'esterno:

$$\mathbf{A}_j = A_j \mathbf{n} \quad (2.134)$$

Appare subito evidente che, in generale, i due vettori  $\mathbf{d}_j$  e  $\mathbf{A}_j$  non sono paralleli, e che l'angolo da essi formato aumenta per griglie molto *distorte*. Inoltre, il punto di applicazione di  $\mathbf{A}_j$ , cioè  $c_j$ , è in generale diverso dal punto ottenuto dall'intersezione di  $\mathbf{d}_j$  con la faccia stessa. Come si vedrà nel seguito, sarà importante operare con griglie nelle quali i due vettori siano il più possibile paralleli e disposti lungo la stessa retta, e cioè con griglie il più possibile *ortogonali*, osservando che, nel FVM, l'ortogonalità si misura fra congiungente i centroidi  $\mathbf{d}_j$ , e vettore area  $\mathbf{A}_j$  della faccia interposta.

Nel seguito si descriverà, nei suoi caratteri essenziali, la metodologia di calcolo ai volumi finiti su griglie non strutturate, utilizzando ancora la generica equazione di

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

---

trasporto quale riferimento, che integrata sul volume di controllo è data dalla:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) dV + \int_A \rho \phi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V s dV \quad (2.135)$$

In analogia a quanto visto per le griglie Cartesiane, considereremo singolarmente i vari termini della (2.135), dopo aver prima definito alcuni aspetti della procedura di calcolo.

### 2.9.1 Scelta delle componenti di velocità

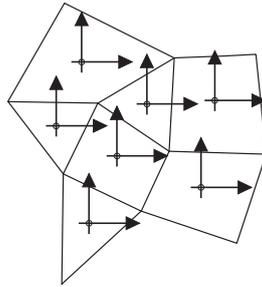
Si è già visto che, nel metodo dei volumi finiti, le equazioni della quantità di moto sono espresse in forma *conservativa* (cfr. Cap. 2), con ciò intendendo che tutti i termini delle equazioni possono venire rappresentati come divergenza di un vettore o di un tensore. Si può dimostrare, inoltre, che l'utilizzo della forma conservativa delle equazioni con il FVM, garantisce la conservazione globale della quantità di moto anche nel calcolo *discreto*. Tuttavia, la forma conservativa delle equazioni richiede di esprimere le componenti della quantità di moto in un sistema di riferimento *fisso*, pena l'introduzione di campi di forza non-conservativi, secondo la definizione vista.

Per tale ragione, è opportuno utilizzare componenti di tale tipo, ed in particolare Cartesiane, che sono le più semplici ed intuitive. Nel seguito, faremo riferimento a grandezze (vettori e tensori) espresse in termini di componenti Cartesiane.

### 2.9.2 Disposizione delle variabili sulla griglia

Al punto 2.7.1 si è visto come la disposizione *sfalsata* (*staggered*) delle variabili sulla griglia, garantisca un buon accoppiamento fra componenti di velocità e pressione. Tuttavia, è facile verificare che ciò vale solo per griglie strutturate Cartesiane, per le quali le componenti della velocità risultano *normali* alle facce dei VC. Per griglie non strutturate, viceversa, sarebbe necessario memorizzare tutte le componenti della velocità su ciascuna faccia. Si tratta di un procedimento utilizzato in passato da alcuni autori, che però risulta alquanto complicato per VC con un numero arbitrario di facce. L'utilizzo di componenti di velocità allineate localmente alla griglia (*componenti contravarianti*), risolve tale problema, ma come visto sopra non sarebbe garantita la conservatività globale della quantità di moto. Per tali ragioni, è ormai pratica diffusa, nell'ambito del FVM su griglia non strutturate, rinunciare alla disposizione sfalsata delle variabili, che vengono quindi co-locate tutte nel centro dei VC, come schematizzato in figura 2.18. Ciò semplifica di molto la gestione della struttura dati e la programmazione, poiché è necessario memorizzare le informazioni geometriche di un solo set di volumi di controllo, ma ovviamente da nuovamente luogo ai problemi

già visti di debole accoppiamento fra il campo di velocità ed il campo di pressione. Per ovviare a tale inconveniente, come già accennato, si utilizzano opportune procedure di interpolazione.

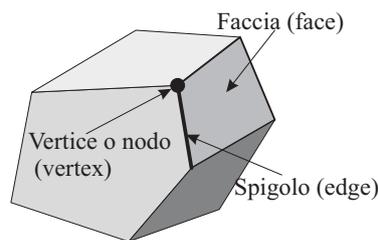


**Figura 2.18:** Disposizione co-localata delle variabili per una griglia non strutturata.

In conclusione, nel metodo dei volumi finiti su griglie non strutturate, l'utilizzo di componenti Cartesiane della velocità, e la disposizione co-localata delle variabili, rappresenta un buon compromesso fra semplicità di implementazione, accuratezza e rispetto della conservatività, ed infatti trova applicazione nella gran parte dei codici commerciali basati sul metodo dei volumi finiti (cfr. Cap. 7).

### 2.9.3 Quantità geometriche

Come visto in precedenza, il dominio di calcolo viene suddiviso in un numero finito di VC contigui attraverso una griglia. Questa, in analogia con il metodo degli Elementi Finiti, definisce dei *vertici* (vertices) o *nodi*, che collegati due a due costituiscono a loro volta gli *spigoli* (edges) dei VC. Come illustrato in figura 2.19,



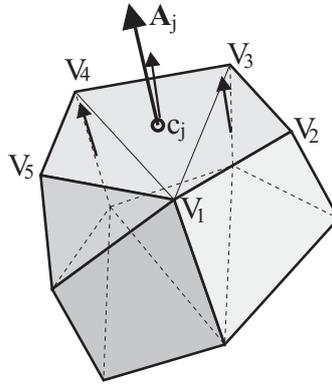
**Figura 2.19:** Elementi geometrici del volume di controllo.

gli spigoli definiscono le *facce* (faces) dei VC, che non sono necessariamente piane; tuttavia le loro proiezioni sui piani Cartesiani risultano indipendenti dalla forma effettiva della faccia. Tali proiezioni altro non sono che le componenti Cartesiane

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

del vettore area  $\mathbf{A}$ , univocamente definito sulla base delle coordinate dei vertici della faccia. Ciò risulta chiaro se si osserva che qualunque faccia congiungente  $N_V$  vertici  $V_l$ , con  $l = 1 \dots N_V$ , come schematizzato in figura 2.20, può essere decomposta in  $N_V - 2$  triangoli con un vertice comune. Il vettore area  $\mathbf{A}_j$  della faccia è ottenuto dalla somma dei vettori area dei triangoli che la compongono:

$$\mathbf{A}_j = \frac{1}{2} \sum_{l=3}^{N_V} [(\mathbf{r}_{V_{l-1}} - \mathbf{r}_{V_1}) \times (\mathbf{r}_{V_l} - \mathbf{r}_{V_1})] \quad (2.136)$$



**Figura 2.20:** Determinazione del vettore area per una faccia del volume di controllo.

Ricordando che per un triangolo, quale ad esempio quello definito dai vertici  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  in figura 2.20, la posizione del centroide, eq. (2.133), è data dalla:

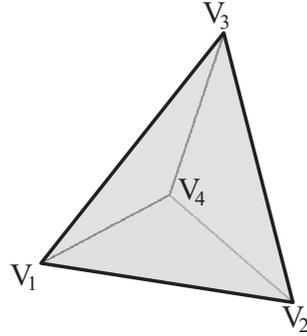
$$\mathbf{r}_{123} = \frac{1}{3} (\mathbf{r}_{V_1} + \mathbf{r}_{V_2} + \mathbf{r}_{V_3}) \quad (2.137)$$

il centroide della faccia è ottenuto dalla media, pesata per la rispettiva area, dei centroidi di tutti i triangoli utilizzati per la sua suddivisione:

$$\mathbf{r}_j = \frac{\frac{1}{3} \sum_{l=3}^{N_V} (\mathbf{r}_{V_1} + \mathbf{r}_{V_{l-1}} + \mathbf{r}_{V_l}) |(\mathbf{r}_{V_{l-1}} - \mathbf{r}_{V_1}) \times (\mathbf{r}_{V_l} - \mathbf{r}_{V_1})|}{\sum_{l=3}^{N_V} |(\mathbf{r}_{V_{l-1}} - \mathbf{r}_{V_1}) \times (\mathbf{r}_{V_l} - \mathbf{r}_{V_1})|} \quad (2.138)$$

Per ciò che riguarda la valutazione del volume  $V$  e del centroide  $\mathbf{r}_{C_0}$  di una cella, è utile ricordare che il volume di un tetraedro, indicato in figura 2.21, è dato dalla:

$$V_{1234} = \frac{1}{6} (\mathbf{r}_{V_3} - \mathbf{r}_{V_1}) \cdot [(\mathbf{r}_{V_2} - \mathbf{r}_{V_1}) \times (\mathbf{r}_{V_4} - \mathbf{r}_{V_1})] \quad (2.139)$$



**Figura 2.21:** Notazione utilizzata per il calcolo del volume di un tetraedro.

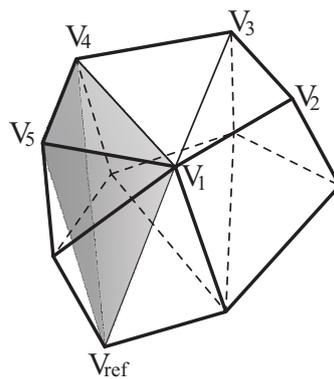
ed il suo centroide, inteso come vettore posizione, è pari alla media aritmetica dei vettori posizione dei vertici:

$$\mathbf{r}_{1234} = \frac{1}{4} (\mathbf{r}_{V_1} + \mathbf{r}_{V_2} + \mathbf{r}_{V_3} + \mathbf{r}_{V_4}) \quad (2.140)$$

Il volume di un poliedro si può quindi ottenere, come schematizzato in figura 2.22, scomponendolo in tetraedri e sommando il contributo di ciascuno di questi:

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{l=3}^{N_{V,i}} (\mathbf{r}_{V_{i,l}} - \mathbf{r}_{V_{ref}}) \cdot [(\mathbf{r}_{V_{i,l-1}} - \mathbf{r}_{V_{ref}}) \times (\mathbf{r}_{V_{i,l}} - \mathbf{r}_{V_{ref}})] \quad (2.141)$$

dove  $N_f$  rappresenta il numero delle facce del poliedro,  $N_{V,i}$  il numero di vertici della faccia  $i$ -esima, e  $V_{ref}$  un vertice (o qualunque altro punto) di riferimento arbitrario.



**Figura 2.22:** Scomposizione di un poliedro in tetraedri.

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

La posizione del centroide può anche qua ottenersi dalla media pesata, con il rispettivo volume, dei vettori posizione dei centroidi dei tetraedri costituenti il poliedro:

$$\mathbf{r}_{C_0} = \frac{1}{24} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{l=3}^{N_{V,i}} (\mathbf{r}_{V_{ref}} + \mathbf{r}_{V_{i,l}} + \mathbf{r}_{V_{i,l-1}} + \mathbf{r}_{V_{i,l}}) \{ (\mathbf{r}_{V_{i,1}} - \mathbf{r}_{V_{ref}}) \cdot [(\mathbf{r}_{V_{i,l-1}} - \mathbf{r}_{V_{ref}}) \times (\mathbf{r}_{V_{i,l}} - \mathbf{r}_{V_{ref}})] \} \quad (2.142)$$

Infine, va osservato che, sfruttando l'identità:

$$\nabla \mathbf{r} = \nabla (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \equiv \mathbf{3}$$

dove  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono i versori degli assi Cartesiani, il volume della cella si può calcolare, in modo molto conveniente, sfruttando il teorema di Gauss:

$$V = \frac{1}{3} \int_V \nabla \mathbf{r} dV = \frac{1}{3} \int_A \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i A_i \quad (2.143)$$

Con considerazioni analoghe, attraverso una derivazione un pò più complessa, si può dimostrare che il centroide può valutarsi con la relazione:

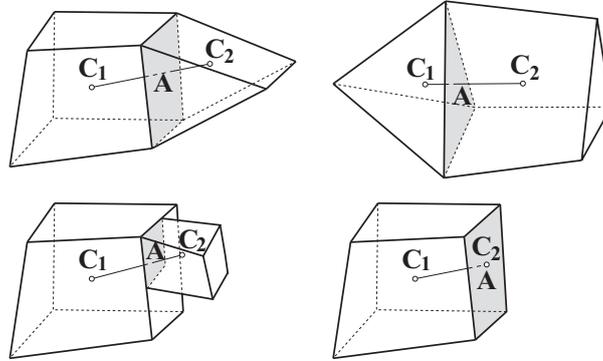
$$\mathbf{r}_{C_0} = \frac{3 \sum_{i=1}^{N_f} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{r}_i A_i}{4 \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i A_i} \quad (2.144)$$

Le espressioni (2.143) e (2.144) sono in generale approssimate, ma risultano esatte per celle aventi facce triangolari o quadrilatero piane.

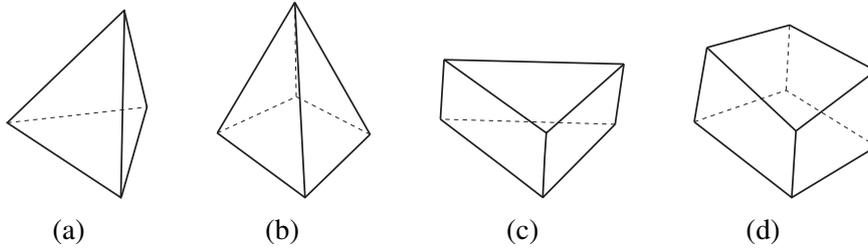
In considerazione della possibilità di suddividere il dominio in VC caratterizzati da numero arbitrario di facce, è comune l'adozione, nell'implementazione, di una *struttura dati* basata sulle facce, anziché basata sui VC o sui nodi. In tal modo è più agevole, ad esempio, considerare celle e combinazioni di celle quali quelle rappresentate in figura 2.23: per ciascuna faccia è sufficiente conoscere le celle adiacenti  $C_1$  e  $C_2$ , ed il vettore d'area  $\mathbf{A}$ , per poter valutare i flussi convettivo e diffusivo.

Tuttavia, non tutti i generatori di griglia possono operare con VC di forma arbitraria, e le tipologie di celle più comuni sono quelle riportate in figura 2.24.

La valutazione numerica degli integrali, di superficie e di volume, che appaiono nella (2.135), richiede la conoscenza delle coordinate dei centroidi dei VC,  $C_j$ , e delle facce,  $c_j$ . È inoltre necessario conoscere il vettore d'area di ogni faccia,  $\mathbf{A}_j$ , e il volume  $V$  del VC. Questi dati vengono in genere forniti dai generatori di griglia, e memorizzati in un file. Altrimenti si può procedere alla loro valutazione, attraverso le (2.136) - (2.144), note le coordinate dei vertici  $V_j$  del CV.



**Figura 2.23:** Alcune possibili forme dei volumi di controllo.



**Figura 2.24:** Forme più comuni dei volumi di controllo: (a) tetraedro; (b) piramide; (c) prisma; (d) esaedro.

### 2.9.4 Distribuzione spaziale delle variabili

Tutte le variabili dipendenti, ed anche i valori delle proprietà termofisiche, sono definite nei centroidi dei VC. Tuttavia, per calcolare gli integrali di superficie, è necessario disporre del loro valore nei centroidi delle facce. A tale scopo, si suppone una variazione lineare della variabile  $\phi$  all'interno della cella:

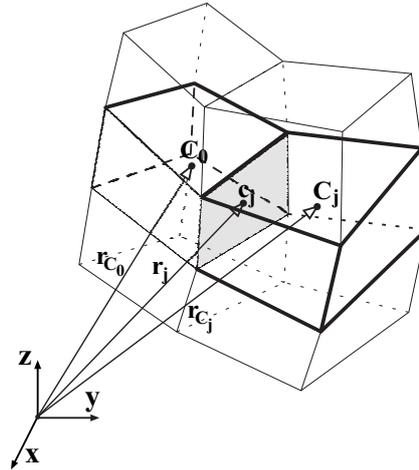
$$\phi = \phi_{C_0} + (\nabla\phi)_{C_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C_0}) \quad (2.145)$$

dove  $(\nabla\phi)_{C_0}$  indica il gradiente valutato in  $C_0$ , costante su tutto il volume di controllo. L'espressione (2.145), tuttavia, fornisce un valore diverso di  $\phi$  sulla faccia, a seconda di quale dei due VC questa si consideri appartenente. Per tale ragione, come illustrato in figura 2.25, viene adottata una formulazione un pò più complessa che però, in analogia al caso Cartesiano, garantisce perfetta simmetria:

$$\phi_j = \frac{1}{2} (\phi_{C_0} + \phi_{C_j}) + \frac{1}{2} \left[ (\nabla\phi)_{C_0} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{C_0}) + (\nabla\phi)_{C_j} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{C_j}) \right] \quad (2.146)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

dove il pedice  $j$  indica la faccia compresa fra i VC  $C_0$  e  $C_j$ , adiacenti a tale faccia. Il primo termine a destra del segno uguale, nella (2.146), fornisce il valore della



**Figura 2.25:** Valutazione del valore della variabile a centro faccia.

variabile nel punto medio della congiungente i centroidi, mentre il secondo termine tiene conto del fatto che il centroide della faccia non coincide, in generale, con il punto medio.

### 2.9.5 Integrali di superficie e di volume

L'equazione (2.135) dev'essere integrata su ogni VC, analogamente a quanto visto per le griglie Cartesiane. Per gli integrali di superficie e di volume, a causa della complessità nell'adottare approssimazioni di ordine elevato per VC di forma arbitraria, si adottano usualmente schemi del second'ordine, che, per le applicazioni industriali della CFD, sono ritenuti adeguati. In particolare la *formula del punto medio* richiede la conoscenza della funzione integranda al centro del dominio di integrazione. Sulla base delle (2.132) e (2.145), ed utilizzando la formula del punto medio, risulta:

$$\int_V \phi \, dV \approx \phi_{C_0} \Delta V \quad (2.147)$$

$$\int_{A_j} \phi \, d\mathbf{A} \approx \phi_j \mathbf{A}_j \quad (2.148)$$

$$\int_{A_j} \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} \approx (\nabla \phi)_j \cdot \mathbf{A}_j \quad (2.149)$$

### 2.9.6 Calcolo del gradiente

L'utilizzo delle espressioni (2.145) e (2.146), necessita della conoscenza del gradiente nel centroide di ogni cella. Inoltre, anche la valutazione del termine diffusivo nella (2.135), attraverso la (2.149), richiede di conoscere il gradiente di  $\phi$  nel centroide della faccia. Si vedrà infine che anche il calcolo del termine convettivo, usando sia l'espressione (2.146) che la formulazione *upwind-biased* (2.179), necessita della conoscenza del gradiente. Vi sono diverse strategie, adottate nei programmi commerciali o open source, per ottenere (*ricostruire*) tale grandezza sulla base dei soli valori della variabile sui centroidi. Quelle indicate nel seguito rappresentano alcune delle alternative più diffuse.

#### Metodo di Gauss-Green

Indicando nel seguito, per brevità, con  $\phi_{x_0}$ ,  $\phi_{y_0}$  e  $\phi_{z_0}$  le componenti del gradiente di  $\phi$  in  $C_0$ , osserviamo che possiamo considerare  $\phi_{x_0}$  come la divergenza del vettore  $\phi \mathbf{i}$ , e trasformare l'integrale di volume in un integrale d'area sulla base del teorema di Gauss:

$$\phi_{x_0} \Delta V \approx \int_V \phi_x dV = \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{i}) dV = \int_A \phi \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_j \phi_j A_{j,x} \quad (2.150)$$

dove  $A_{j,x} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{A}_j)$  è la componente lungo  $x$  del vettore area. Procedendo in maniera analoga per le altre componenti del gradiente si ottiene:

$$\begin{aligned} & \phi_{x_0} \mathbf{i} + \phi_{y_0} \mathbf{j} + \phi_{z_0} \mathbf{k} \\ & \approx \frac{\sum_j \phi_j A_{j,x}}{\Delta V} \mathbf{i} + \frac{\sum_j \phi_j A_{j,y}}{\Delta V} \mathbf{j} + \frac{\sum_j \phi_j A_{j,z}}{\Delta V} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.151)$$

ed in forma compatta:

$$(\nabla \phi)_{C_0} \approx \frac{\sum_j \phi_j \mathbf{A}_j}{\Delta V} \quad (2.152)$$

Rimane da stabilire come valutare il valore della variabile sulla faccia,  $\phi_j$ . Vediamo i due approcci più comuni.

#### Metodo di Gauss-Green *cell-based*

Il valore della variabile sul centroide della faccia,  $\phi_j$ , viene assunto pari alla media aritmetica del valore di  $\phi$  delle due celle aventi la faccia in comune

$$\phi_j = \frac{1}{2} (\phi_{C_0} + \phi_{C_j}) \quad (2.153)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

oppure, in modo più accurato, esso viene valutato come media pesata (weighted interpolation) con la distanza

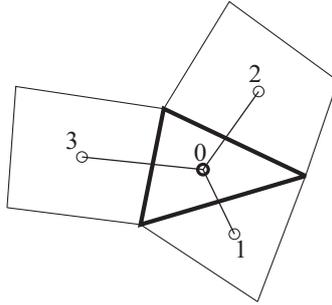
$$\phi_j = \lambda \phi_{C_0} + (1 - \lambda) \phi_{C_j} \quad (2.154)$$

con

$$\lambda = \frac{|\mathbf{r}_{C_j} - \mathbf{r}_j|}{|\mathbf{r}_{C_j} - \mathbf{r}_{C_0}|} \quad (2.155)$$

Questo approccio è semplice ed economico da implementare, ma da luogo ad un errore del second'ordine solo se i vettori  $(\mathbf{r}_{C_j} - \mathbf{r}_{C_0})$  e  $\mathbf{A}_j$  sono allineati. Altrimenti è possibile utilizzare una procedura di correzione di tipo iterativo.

Vale la pena notare che la (2.152), assieme alla (2.153) fornisce un valore del gradiente, in  $C_0$ , che *non dipende* da  $\phi_{C_0}$ . Ciò può essere facilmente verificato per l'esempio di figura 2.26, nella quale è rappresentato un volume di controllo generico, assieme ai VC adiacenti (per semplicità si è considerata una griglia bidimensionale, che può venire considerata come una griglia costituita da un unico strato di celle di spessore arbitrario).



**Figura 2.26:** Generico volume di controllo per una griglia non strutturata.

Utilizzando l'espressione (2.153) nella (2.152), con riferimento alla figura 2.26, si ha:

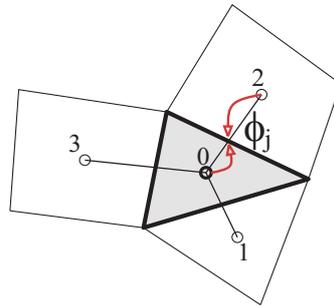
$$\begin{aligned} \phi_{x_0} \approx \frac{1}{\Delta V} & \left[ \frac{(\phi_{C_0} + \phi_{C_1})}{2} A_{1,x} \right. \\ & \left. + \frac{(\phi_{C_0} + \phi_{C_2})}{2} A_{2,x} + \frac{(\phi_{C_0} + \phi_{C_3})}{2} A_{3,x} \right] \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} \phi_{y_0} \approx \frac{1}{\Delta V} & \left[ \frac{(\phi_{C_0} + \phi_{C_1})}{2} A_{1,y} \right. \\ & \left. + \frac{(\phi_{C_0} + \phi_{C_2})}{2} A_{2,y} + \frac{(\phi_{C_0} + \phi_{C_3})}{2} A_{3,y} \right] \end{aligned} \quad (2.157)$$

e semplificando:

$$\phi_{x_0} \approx \frac{1}{2\Delta V} [\phi_{C_1} A_{1,x} + \phi_{C_2} A_{2,x} + \phi_{C_3} A_{3,x}] \quad (2.158)$$

$$\phi_{y_0} \approx \frac{1}{2\Delta V} [\phi_{C_1} A_{1,y} + \phi_{C_2} A_{2,y} + \phi_{C_3} A_{3,y}] \quad (2.159)$$



**Figura 2.27:** Metodo di Gauss-Green *cell-based*: valore di  $\phi_j$  come media - o media pesata - sui due centroidi.

Il metodo di Gauss-Green *cell-based* appena descritto, per la valutazione dei gradienti, è accurato solo per griglie Cartesiane, o comunque strutturate *ortogonali*, mentre è piuttosto impreciso per griglie non-uniformi e griglie non strutturate costituite da celle di tipo diverso, quale è il caso delle *griglie ibride* (cfr. 2.9.11).

#### Metodo di Gauss-Green *node-based*

Un secondo approccio, più accurato ma nel contempo più oneroso dal punto di vista computazionale, consiste nel valutare il valore della variabile al centro della faccia,  $\phi_j$ , tramite la media aritmetica sugli  $N_{V,j}$  nodi (vertici) che definiscono la faccia  $j$ -esima, come illustrato in figura 2.28:

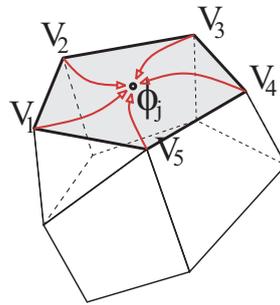
$$\phi_j = \frac{1}{N_{V,j}} \sum_{l=1}^{N_{V,j}} \phi_l \quad (2.160)$$

A sua volta il valore della variabile sul nodo  $V$ ,  $\phi_V$ , è ottenuto tramite media pesata degli  $N_{C,V}$  valori di  $\phi$  nei centroidi delle celle che definiscono il nodo. Nella formulazione più semplice il peso è assunto pari all'inverso della distanza fra il nodo

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

(vertice) ed il centroide della cella:

$$\phi_V = \frac{\sum_{j=1}^{N_{C,V}} \frac{\phi_{C_j}}{|\mathbf{r}_V - \mathbf{r}_{C_j}|}}{\sum_{j=1}^{N_{C,V}} \frac{1}{|\mathbf{r}_V - \mathbf{r}_{C_j}|}} \quad (2.161)$$



**Figura 2.28:** Metodo di Gauss-Green *node-based*: valore di  $\phi_j$  come media sui nodi (vertici).

Un terzo approccio, anch'esso accurato ma oneroso, è basato sulla valutazione del gradiente tramite un'approssimazione *ai minimi quadrati*, descritta nel seguito.

### Metodo ai minimi quadrati

La relazione (2.145), che fornisce la legge di variazione lineare della generica variabile  $\phi$  all'interno della cella, può essere scritta in forma esplicita:

$$\phi = \phi_{C_0} + \phi_{x_0}(x - x_{C_0}) + \phi_{y_0}(y - y_{C_0}) + \phi_{z_0}(z - z_{C_0}) \quad (2.162)$$

Imponendo che questa relazione sia valida non solo sulla cella in esame, ma, come illustrato in figura 2.29, descriva l'andamento spaziale della variabile sino ai centroidi delle celle adiacenti, si ha:

$$\phi_{C_j} = \phi_{C_0} + \phi_{x_0}(x_{C_j} - x_{C_0}) + \phi_{y_0}(y_{C_j} - y_{C_0}) + \phi_{z_0}(z_{C_j} - z_{C_0}) - r_j \quad (2.163)$$

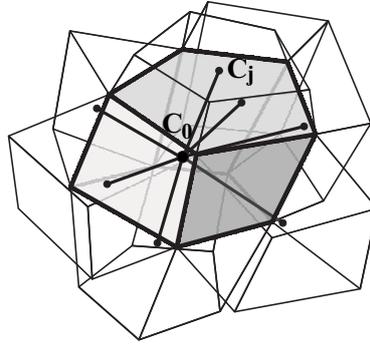
dove  $r_j$  è il residuo. Questo è introdotto poiché è impossibile risolvere esattamente il sistema di tre equazioni, nelle tre incognite  $\phi_{x_0}$ ,  $\phi_{y_0}$  e  $\phi_{z_0}$ , se la cella ha più di tre

celle vicine, dato che il sistema è *sovradeterminato*. La (2.163) può venire espressa in forma compatta:

$$r_j = \phi_{x_0} d_{xj} + \phi_{y_0} d_{yj} + \phi_{z_0} d_{zj} - \Delta_j \quad (2.164)$$

dove:

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \phi_{C_j} - \phi_{C_0} \\ d_{xj} &= x_{C_j} - x_{C_0} \\ d_{yj} &= y_{C_j} - y_{C_0} \\ d_{zj} &= z_{C_j} - z_{C_0} \end{aligned} \quad (2.165)$$



**Figura 2.29:** Ricostruzione del gradiente con il metodo dei minimi quadrati.

Il quadrato del residuo definito dalla (2.164) si traduce quindi nella:

$$\begin{aligned} r_j^2 &= \Delta_j^2 + (\phi_{x_0} d_{xj})^2 + (\phi_{y_0} d_{yj})^2 + (\phi_{z_0} d_{zj})^2 \\ &\quad - 2(\Delta_j \phi_{x_0} d_{xj} + \Delta_j \phi_{y_0} d_{yj} + \Delta_j \phi_{z_0} d_{zj}) \\ &\quad + 2(\phi_{x_0} \phi_{y_0} d_{xj} d_{yj} + \phi_{x_0} \phi_{z_0} d_{xj} d_{zj} + \phi_{y_0} \phi_{z_0} d_{yj} d_{zj}) \end{aligned} \quad (2.166)$$

che sommato per tutte le  $nb$  (*neighbours*) celle adiacenti (v. figura 2.29) fornisce:

$$R = \sum_{j=1}^{nb} r_j^2 \quad (2.167)$$

Questa viene minimizzata ai minimi quadrati, cioè cercando i valori di  $\phi_{x_0}$ ,  $\phi_{y_0}$  e  $\phi_{z_0}$  che minimizzano  $R$ , e ciò si ottiene quando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \phi_{x_0}} &= 0 \\ \frac{\partial R}{\partial \phi_{y_0}} &= 0 \\ \frac{\partial R}{\partial \phi_{z_0}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.168)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

Sviluppando e raccogliendo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{nb} \left[ \phi_{x_0} (d_{xj})^2 + \phi_{y_0} d_{xj} d_{yj} + \phi_{z_0} d_{xj} d_{zj} \right] &= \sum_{j=1}^{nb} \Delta_j d_{xj} \\
 \sum_{j=1}^{nb} \left[ \phi_{x_0} d_{xj} d_{yj} + \phi_{y_0} (d_{yj})^2 + \phi_{z_0} d_{yj} d_{zj} \right] &= \sum_{j=1}^{nb} \Delta_j d_{yj} \\
 \sum_{j=1}^{nb} \left[ \phi_{x_0} d_{xj} d_{zj} + \phi_{y_0} d_{yj} d_{zj} + \phi_{z_0} (d_{zj})^2 \right] &= \sum_{j=1}^{nb} \Delta_j d_{zj}
 \end{aligned} \tag{2.169}$$

Esprimendo la (2.169) in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nb} (d_{xj})^2 & \sum_{j=1}^{nb} d_{xj} d_{yj} & \sum_{j=1}^{nb} d_{xj} d_{zj} \\ \sum_{j=1}^{nb} d_{xj} d_{yj} & \sum_{j=1}^{nb} (d_{yj})^2 & \sum_{j=1}^{nb} d_{yj} d_{zj} \\ \sum_{j=1}^{nb} d_{xj} d_{zj} & \sum_{j=1}^{nb} d_{yj} d_{zj} & \sum_{j=1}^{nb} (d_{zj})^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{x_0} \\ \phi_{y_0} \\ \phi_{z_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{nb} \Delta_j d_{xj} \\ \sum_{j=1}^{nb} \Delta_j d_{yj} \\ \sum_{j=1}^{nb} \Delta_j d_{zj} \end{Bmatrix} \tag{2.170}$$

e con simbologia compatta

$$\mathbf{D}_0 \nabla \phi_{C_0} = \mathbf{f}_0 \tag{2.171}$$

Finalmente il gradiente può essere calcolato dalla:

$$\nabla \phi_{C_0} = \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{f}_0 \tag{2.172}$$

Si può notare che  $\mathbf{D}_0$  è una matrice simmetrica  $3 \times 3$ , i cui elementi dipendono solo dalla griglia. Pertanto è necessario calcolare la matrice inversa  $\mathbf{D}_0^{-1}$ , con griglia indeformabile, solo all'inizio del calcolo. La ricostruzione del gradiente col metodo dei minimi quadrati richiede quindi di memorizzare, ed invertire, la matrice  $\mathbf{D}_0$  per ogni cella, per un totale di  $6 \times N$  numeri reali, con  $N$  numero totale di celle.

È forse utile aggiungere alcune osservazioni sul metodo di ricostruzione del gradiente ai minimi quadrati ora esposto.

- Per griglie molto distorte la matrice  $\mathbf{D}_0$  può risultare mal condizionata, e perciò alcuni autori hanno suggerito l'adozione di una metodologia di soluzione basata sulla fattorizzazione QR (fattorizzazione della matrice di partenza nel

prodotto di una matrice ortogonale  $Q$  e una matrice triangolare superiore  $R$  tramite il processo di Gram-Schmidt). L'altra possibilità è quella di introdurre dei *pesi* inversamente proporzionali alla distanza delle celle vicine.

- Il metodo è caratterizzato da un'accuratezza del primo ordine per griglie costituite da celle di forma arbitraria, ed è inoltre *consistente*, cioè il gradiente di una funzione lineare è calcolato *esattamente* per qualunque tipo di cella. Esso è perciò particolarmente adatto a trattare *griglie ibride* (cfr. 2.9.11).

### 2.9.7 Termine transitorio

Per l'integrazione del termine transitorio nella (2.135), vale quanto visto al punto 2.5, e perciò la procedura, ed il risultato, dipende dallo schema di integrazione temporale adottato. Comunemente, per problemi stazionari o con lente variazioni temporali, è sufficiente l'adozione dello schema di Eulero implicito del primo ordine, altrimenti, per flussi con rapide variazioni temporali, risulta conveniente lo schema di Crank-Nicolson del second'ordine. In ambedue i casi, per il termine transitorio, si ha:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho \phi) dV \approx \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho_{C_0} \phi_{C_0} \Delta V) \approx \rho_{C_0} \frac{\Delta V}{\Delta \vartheta} (\phi_{C_0}^{n+1} - \phi_{C_0}^n) \quad (2.173)$$

### 2.9.8 Termine sorgente

L'integrazione del termine sorgente non presenta difficoltà particolari, ed infatti sulla base della (2.147) si ha:

$$\int_V s dV \approx s_{C_0} \Delta V \quad (2.174)$$

Qualora il termine sorgente dipenda dalla variabile stessa, si procede alla sua linearizzazione secondo la (2.19).

### 2.9.9 Flusso convettivo

Il termine convettivo viene calcolato considerando il contributo di tutte le facce costituenti il VC:

$$\int_A \rho \phi \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} = \sum_j \int_{A_j} \rho \phi \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.175)$$

e, sulla base della (2.148):

$$\sum_j \int_{A_j} \rho \phi \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_j \dot{m}_j \phi_j \quad (2.176)$$

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

dove  $\dot{m}_j$  rappresenta la portata di massa attraverso la faccia  $A_j$ :

$$\dot{m}_j = \int_{A_j} \rho \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} \approx \rho_j (\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{A}_j) \quad (2.177)$$

Nelle relazioni ora viste, si è assunto implicitamente di linearizzare il termine convettivo, nel caso in cui  $\phi$  rappresenti una delle componenti di velocità, attraverso il metodo di Picard, eq. (2.112). Per la valutazione di  $\phi_j$  è possibile adottare la (2.146), che corrisponde allo schema CDS descritto per le griglie Cartesiane. Tuttavia, anche in questo caso, tale approssimazione può dar luogo ad instabilità ed oscillazioni (wiggles), ed anche a difficoltà di convergenza. La migliore cura, in tal caso, è costituita dal raffinamento selettivo della griglia, che però può raramente essere adottata nelle applicazioni industriali. Un'alternativa, anche qua, è costituita dall'adozione dello schema *upwind* del prim'ordine (UDS), che si traduce nella:

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_{C_0} & \text{se } (\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{A}_j) > 0 \\ \phi_{C_j} & \text{se } (\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{A}_j) < 0 \end{cases} \quad (2.178)$$

Tuttavia, come già osservato, lo schema UDS introduce una notevole *diffusività artificiale* e quindi, in generale, non dovrebbe essere utilizzato.

In analogia con quanto visto per le griglie Cartesiane, eq. (2.34), è possibile anche qua adottare uno schema *upwind* di ordine più elevato, definito dalla:

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_{C_0} + (\nabla \phi)_{C_0} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{C_0}) & \text{se } (\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{A}_j) > 0 \\ \phi_{C_j} + (\nabla \phi)_{C_j} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{C_j}) & \text{se } (\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{A}_j) < 0 \end{cases} \quad (2.179)$$

ed ottenuto attraverso un'espansione in serie di Taylor di  $\phi$  a partire dal centroide a monte.

In generale, però, viste le difficoltà di utilizzo di schemi di interpolazione di ordine elevato con le griglie non strutturate, è comune ricorrere a schemi misti, attraverso un fattore di *blending*  $\gamma$  compreso fra 0 e 1:

$$\phi_j = \gamma \phi_j^{oe} + (1 - \gamma) \phi_j^{ob} = \phi_j^{ob} + \left[ \gamma (\phi_j^{oe} - \phi_j^{ob}) \right] \quad (2.180)$$

dove  $\gamma = 1$  corrisponde allo schema CDS del second'ordine, equazione (2.146), e  $\gamma = 0$  corrisponde allo schema UDS del primo ordine, equazione (2.178). In analogia al caso Cartesiano, abbiamo indicato con *ob* uno schema di ordine basso (UDS), e con *oe* uno schema di ordine elevato. Anche in tal caso, si utilizza la (2.180) in modalità *correzione differita* (cfr. paragrafo 2.4.4), ponendo nel termine noto il contributo in parentesi quadre.

### 2.9.10 Flusso diffusivo

Anche il termine diffusivo, al secondo membro della (2.135), viene calcolato considerando il contributo di tutte le facce costituenti il VC:

$$\int_A \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} = \sum_j \int_{A_j} \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} \quad (2.181)$$

e, sulla base della (2.149):

$$\sum_j \int_{A_j} \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_j \Gamma_j (\nabla \phi)_j \cdot \mathbf{A}_j \quad (2.182)$$

Il valore di  $(\nabla \phi)_j$ , cioè il gradiente sulla faccia  $j$ , viene approssimato tramite la:

$$(\nabla \phi)_j \approx \frac{1}{2} [(\nabla \phi)_{C_0} + (\nabla \phi)_{C_j}] \quad (2.183)$$

che sostituito nella (2.182) risulta:

$$\sum_j \int_{A_j} \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} \approx \frac{1}{2} \sum_j \Gamma_j [(\nabla \phi)_{C_0} + (\nabla \phi)_{C_j}] \cdot \mathbf{A}_j \quad (2.184)$$

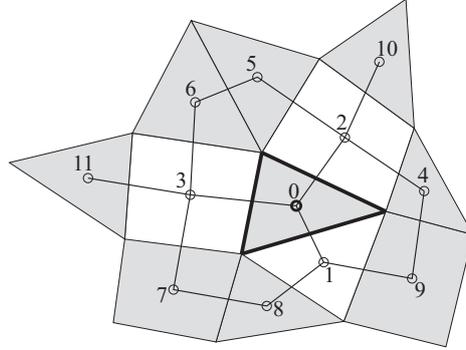
Raccogliendo, ed osservando che  $\sum_j \Gamma_j \mathbf{A}_j \approx 0$ , ed in particolare  $\Gamma \sum_j \mathbf{A}_j = 0$  nel caso di proprietà termofisiche costanti, otteniamo l'espressione del flusso diffusivo per il volume di controllo  $C_0$ :

$$\int_A \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} \approx \frac{1}{2} \sum_j \Gamma_j (\nabla \phi)_{C_j} \cdot \mathbf{A}_j \quad (2.185)$$

L'espressione ora ricavata, ricordando le osservazioni fatte nella valutazione del gradiente, presenta due inconvenienti:

1. Abbiamo incluso VC *non adiacenti* (second neighbors) nella discretizzazione, il che comporta maggiori complessità nell'indicizzazione e memorizzazione della matrice dei coefficienti risultanti.
2. Sebbene i contributi dei VC *adiacenti* (first neighbors) siano formalmente presenti nella (2.185), essi si cancellano a vicenda, con la conseguenza di dar luogo a soluzioni con oscillazioni non fisiche (*wiggles* o *checkerboarding*).

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI



**Figura 2.30:** Discretizzazione del termine diffusivo per la cella  $C_0$ : solo i VC ombreggiati contribuiscono con coefficienti non nulli.

A scopo illustrativo, in figura 2.30 sono indicati i VC che contribuiscono alla discretizzazione del termine diffusivo per la cella  $C_0$ .

La cura comunemente adottata, per la soluzione di questi problemi, consiste nell'utilizzare un'espressione *modificata* per il gradiente, che include l'effetto delle celle adiacenti nella discretizzazione. Ad esempio, un'espressione frequentemente utilizzata è la seguente:

$$(\widetilde{\nabla\phi})_j = (\nabla\phi)_j + \left( \frac{\phi_{C_j} - \phi_{C_0}}{|\mathbf{d}_j|} \frac{\mathbf{A}_j}{|\mathbf{A}_j|} - \frac{(\nabla\phi)_j \cdot \mathbf{d}_j}{|\mathbf{d}_j|} \frac{\mathbf{A}_j}{|\mathbf{A}_j|} \right) \quad (2.186)$$

dove il primo termine a destra rappresenta il gradiente sulla faccia  $j$  valutato con la (2.183), accurato al second'ordine. Il primo termine in parentesi introduce l'influenza delle celle vicine, ma è accurato al primo ordine, ed infatti il termine successivo *corregge* tale errore. Complessivamente, il termine in parentesi rappresenta la differenza fra la derivata della variabile in direzione  $\mathbf{d}_j$ , valutata con un'espressione alle differenze centrali, e il valore della derivata in tale direzione ottenuto dall'interpolazione dei gradienti sui centroidi dei VC. (Per sincerarsene, basta osservare che l'approssimazione  $\phi_{C_j} - \phi_{C_0} \approx (\nabla\phi)_j \cdot \mathbf{d}_j$  è tanto meno accurata, quanto più la griglia è distorta e lontana dall'ortogonalità).

Con tali modifiche, l'espressione discreta del flusso diffusivo, scritta utilizzando la *correzione differita* (punto 2.4.4), diventa:

$$\int_A \Gamma \nabla\phi \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_j \Gamma_j \left\{ \frac{\phi_{C_j} - \phi_{C_0}}{|\mathbf{d}_j|} |\mathbf{A}_j| + \left[ (\nabla\phi)_j - \frac{(\nabla\phi)_j \cdot \mathbf{d}_j}{|\mathbf{d}_j|} \frac{\mathbf{A}_j}{|\mathbf{A}_j|} \right] \cdot \mathbf{A}_j \right\} \quad (2.187)$$

## 2.9. GRIGLIE NON STRUTTURATE

nella quale il primo termine a destra, contenente  $\phi_{C_0}$  e  $\phi_{C_j}$ , viene trattato in modo implicito, e quindi contribuisce alla matrice dei coefficienti, mentre l'espressione in parentesi quadra, nota con il nome di *termine cross-diffusivo*, è trattata in modo esplicito, e quindi espressa in funzione dei valori della variabile al passo di tempo (o iterazione) precedente, e sommata al termine noto.

La procedura ora descritta per la discretizzazione del termine diffusivo costituisce la base di alcuni codici commerciali ed open source, ed il suo vantaggio principale è costituito dalla notevole semplicità, che si traduce in facilità di implementazione e buona efficienza computazionale. Tuttavia, essa presenta anche alcuni difetti:

- L'accuratezza del metodo, e le proprietà di convergenza, si riducono per griglie lontane dall'ortogonalità: per esse, infatti, aumenta il contributo del termine *cross-diffusivo*.
- Per griglie molto distorte il termine cross-diffusivo può addirittura diventare negativo, con conseguenze *catastrofiche* per variabili definite positive, quali ad esempio l'energia cinetica turbolenta.
- Le griglie a *tetraedri* sono meno accurate, con la discretizzazione vista, rispetto a griglie costituite da soli *esaedri*. Le prime, tuttavia, sono spesso preferite per ragioni legate alla facilità di generazione automatica della griglia, ed eventuale utilizzo di griglie *adattive*.

### 2.9.11 Griglie ibride

L'approccio FVM per griglie non strutturate, appena descritto nelle sue linee essenziali, è, oltre che robusto e semplice nell'implementazione, molto diffuso, e ciò è dimostrato dal fatto che esso è stato adottato, pur con qualche variante, in numerosi pacchetti CFD.

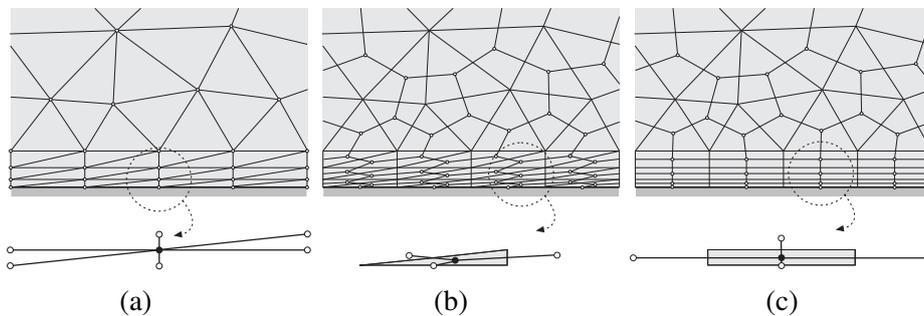
Esso, tuttavia, presenta un inconveniente, spesso non indicato chiaramente in letteratura, qualora venga utilizzato con griglie a tetraedri, in 3D, o a triangoli in 2D. In pratica, nel calcolo di flussi turbolenti con modelli RANS o LES (cfr. Cap. 4), il centroide delle celle di calcolo disposte sulle pareti solide deve trovarsi ad una distanza  $y^+$ , da queste ultime, compresa in un range opportuno. Ciò si traduce, quasi sempre nei problemi applicativi, nella necessità di *schacciare* le prime celle in prossimità delle pareti, poiché l'uso di griglie equispaziate condurrebbe ad un aumento intollerabile del numero di celle. La situazione è illustrata in figura 2.31 per una generica griglia non strutturata 2D a triangoli. Se tale griglia venisse utilizzata con il metodo degli Elementi Finiti (cfr. Cap. 3), come schematizzato in figura 2.31-a, non vi sarebbero problemi di stabilità, poiché tutti i nodi, indicati nel particolare, darebbero

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

un contributo alla riga della matrice corrispondente al nodo in esame, indicato con simbolo pieno (vi sarebbero, eventualmente, problemi legati alla ridotta accuratezza di elementi molto *allungati*).

Viceversa, nel FVM qua descritto, la molecola di calcolo, come illustrato in figura 2.31-b, risulta molto deformata, ed in particolare alcune rette congiungenti i centri delle celle formano un angolo rilevante con le normali alle facce e, nel caso limite di celle molto allungate, possono risultare quasi parallele alle facce stesse. Ciò provoca alcune gravi conseguenze:

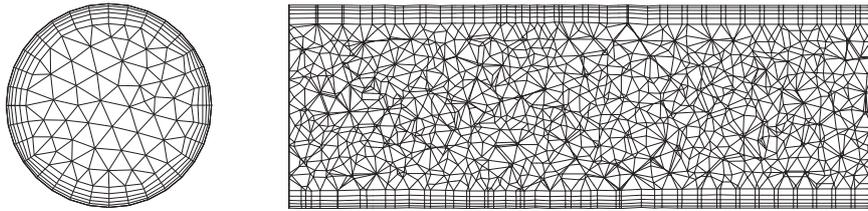
- Aumenta il contributo del termine diffusivo esplicito, quello in parentesi quadre nell'equazione (2.187), e si riduce il termine implicito. Ciò peggiora la convergenza, poiché si riduce il peso della diagonale principale nel sistema di equazioni, ed in casi estremi porta alla divergenza del calcolo.
- Aumenta il contributo dei termini cross-diffusivi che, come già osservato, possono talvolta diventare negativi. Ciò riduce l'accuratezza che, si ricorda, aumenta per griglie prossime all'ortogonalità.
- Si può dimostrare che, per le equazioni di quantità di moto, diminuisce l'accuratezza nel calcolo del gradiente di pressione in prossimità delle pareti solide.



**Figura 2.31:** Particolare della griglia non strutturata in prossimità di una parete solida: (a) elementi finiti; (b) volumi finiti; (c) volumi finiti con griglia ibrida.

Una possibile soluzione a questi problemi è rappresentata dall'utilizzo di *griglie ibride* (hybrid grids), cioè utilizzare esaedri e/o prismi (rettangoli in 2D) per i primi strati di celle, e tetraedri (triangoli in 2D) al centro del dominio. In tal modo, come illustrato in figura 2.31-c, la molecola di calcolo è molto più regolare, a causa dell'ortogonalità fra le normali alle facce e le congiungenti i centroidi. Ciò spiega l'opportunità di utilizzare griglie ibride, anziché griglie a soli tetraedri, come confermato dalla gran parte dei prodotti commerciali, che ne prevedono la generazione

automatica quale opzione, come esemplificato in figura 2.32. L'altra ovvia possibilità è quella di adottare, qualora possibile, griglie non strutturate o strutturate a soli esaedri, ed anche questa è una possibilità offerta da numerosi pacchetti CFD, e prodotti specifici per la generazione di griglie.



**Figura 2.32:** Esempio di griglia ibrida utilizzata per un tratto di tubazione.

### 2.9.12 Condizioni iniziali ed al contorno

Riportiamo alcune considerazioni riguardo la formulazione di *appropriate* condizioni iniziali ed al contorno.

#### Condizioni iniziali

Nel caso di problemi non stazionari, è necessario fissare i valori delle variabili all'istante iniziale. Se interessa solo il *comportamento periodico* a regime (es. motori a combustione interna, organi rotanti di macchine ecc.), tali valori possono essere arbitrari, ma è necessario integrare per un tempo adeguato, in modo da eliminare gli effetti dovuti alle condizioni iniziali.

Talvolta, per innescare alcuni fenomeni, quali ad esempio separazioni non stazionarie degli strati limite, è conveniente perturbare la soluzione con opportuni disturbi, quali ad esempio rumore bianco.

Per problemi stazionari, l'utilizzo di condizioni iniziali il più possibile prossime alla soluzione cercata, rende ovviamente più economico il calcolo, e riduce il rischio di fallimento (divergenza). Tali condizioni iniziali possono ottenersi risolvendo, ad esempio, problemi semplificati (es. flussi e scambi termici puramente diffusivi o a ridotto numero di Reynolds), oppure dall'interpolazione della soluzione di problemi più economici (es. griglia rada, problema bidimensionale).

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

### Condizioni al contorno

Si osservi che, a differenza di quanto accade nelle griglie strutturate Cartesiane, è necessario tener conto che le componenti Cartesiane della velocità non sono generalmente allineate con le facce delle celle sul contorno.

Con l'avvertenza di cui sopra, e rimandando alla bibliografia per ulteriori dettagli, va osservato che, nel FVM su griglie non strutturate, l'imposizione di condizioni al contorno non pone particolari difficoltà. Come già accennato al punto 2.4.6, per tali griglie non si fa uso di *celle fantasma*, ed in generale gli integrali sulle facce dei VC sul contorno vanno espressi, come nel caso Cartesiano, in funzione delle condizioni al contorno e dei valori delle variabili nei centri dei medesimi VC.

Con condizioni al contorno di *Dirichlet*, il flusso convettivo è immediatamente disponibile, mentre il flusso diffusivo richiede di approssimare il gradiente sul contorno. Viceversa, con condizioni al contorno di *Neumann*, è immediatamente disponibile il valore del flusso diffusivo, mentre il valore della variabile, necessario nel caso di condizione al contorno *convettiva*, viene ricavato in base all'approssimazione (discreta) del gradiente. Le condizioni al contorno sulle pareti solide, nei problemi di flusso turbolento, dipendono dal modello di turbolenza adottato, e dalle modalità di trattamento della zona di parete (cfr. Cap. 4).

Dopo aver assemblato, per ogni VC, tutti i termini che appaiono nella (2.135), si ottiene un'equazione algebrica lineare, che collega l'incognita  $\phi$  nel VC stesso con quella dei VC adiacenti, analoga alla (2.48), e qui ripetuta per comodità:

$$A_0\phi_0 + \sum_{nb} A_{nb}\phi_{nb} = S_0 \quad (2.188)$$

dove con  $nb$  si intende ancora che la sommatoria va estesa ai VC adiacenti, il cui numero però, a differenza del caso di griglie strutturate, varia da cella a cella.

I coefficienti che appaiono nella (2.188) dipendono dalle approssimazioni usate, e contengono i contributi, visti in precedenza, dei flussi convettivi e diffusivi, del termine non stazionario, e del termine sorgente. La matrice risultante, ottenuta scrivendo la (2.188) per ogni VC, è in tal caso sparsa, e viene di solito risolta con metodi iterativi.

## 2.10 SOMMARIO

In questo capitolo sono state esposte le basi del metodo dei volumi finiti, dapprima con riferimento alle griglie Cartesiane, e poi per griglie non strutturate arbitrarie. Nel primo caso è stato affrontato il problema del trasporto convettivo e la convezione in

deflussi bidimensionali, mentre nel secondo è stato affrontato il solo problema del trasporto convettivo.

- È stata considerata la generica equazione di trasporto convettivo-diffusivo, rappresentativa delle equazioni di conservazione.
- Si è illustrata l'idea di base del metodo dei volumi finiti, cioè l'uso della formulazione integrale dell'equazione di conservazione per un generico volume di controllo.
- Le diverse tipologie di griglie utilizzabili con il metodo dei volumi finiti sono state descritte, ed in particolare, per le griglie Cartesiane, è stata illustrata la suddivisione del dominio in volumi di controllo, e la disposizione delle variabili.
- Considerando dapprima il caso stazionario, è stata descritta la formulazione dell'equazione discreta per ciascun volume di controllo, considerando i vari contributi. Particolare attenzione è stata posta nelle tecniche d'interpolazione necessarie a valutare i contributi dei flussi diffusivo e convettivo.
- Sono stati illustrati due diversi approcci per il trattamento delle condizioni al contorno, e le corrispondenti modifiche all'equazione algebrica finale.
- Con riferimento all'equazione di trasporto nel regime non stazionario, sono state illustrate le metodologie più diffuse per l'integrazione temporale.
- Sono stati forniti alcuni elementi utili a distinguere la notevole varietà di metodi, diretti ed iterativi, disponibili per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari risultanti dalla discretizzazione.
- Infine, dopo alcune considerazioni sulla possibile disposizione delle variabili sulla griglia nei problemi termofluidodinamici, si sono illustrate, nelle linee essenziali, le due principali modalità di soluzione, segregata ed accoppiata, delle equazioni di Navier-Stokes per griglie Cartesiane bidimensionali.
- Sono state descritte le caratteristiche principali delle griglie non strutturate, di tipo co-locato ai volumi finiti, e sono stati forniti gli elementi per poter valutare le quantità geometriche necessarie.
- Sono stati illustrate alcune metodologie, fra le più diffuse, per la ricostruzione del gradiente su griglie non strutturate ai volumi finiti con celle di forma arbitraria.

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

- Con riferimento alla generica equazione di trasporto convettivo-diffusivo, è stata affrontata e descritta la formulazione discreta dei vari contributi, ed è stata giustificata l'opportunità di utilizzo di griglie ibride.

### 2.11 NOMENCLATURA

$A$	area; coefficiente dell'equazione discreta
$\mathbf{A}$	vettore area; matrice dei coefficienti
$c_p$	calore specifico a pressione costante
$\mathbf{g}$	vettore accelerazione di gravità
$g_x, g_y$	componenti Cartesiane del vettore accelerazione di gravità
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	versori degli assi di riferimento Cartesiani
$\mathbf{J}''$	vettore flusso specifico
$\mathbf{J}_c''$	vettore flusso specifico convettivo
$\mathbf{J}_d''$	vettore flusso specifico diffusivo
$\mathbf{L}$	matrice triangolare inferiore
$\dot{m}$	portata di massa
$\mathbf{M}$	matrice di iterazione
$\mathbf{n}$	normale alla superficie orientata verso l'esterno
$N$	numero totale di incognite
$N_f$	numero di facce della cella
$N_i, N_j$	numero di volumi di controllo in direzione $x$ ed $y$
$N_V$	numero di vertici della faccia
$p$	pressione
$\mathbf{P}$	matrice di preconditionamento
$\dot{q}$	potenza termica generata per unità di volume
$\mathbf{r}$	vettore dei residui; vettore di
$s$	termine sorgente nell'equazione differenziale
$S$	termine sorgente nell'equazione algebrica
$\mathbf{S}$	vettore dei termini noti
$t$	temperatura relativa
$u, v$	componenti Cartesiane del vettore velocità
$u^*, v^*$	componenti Cartesiane del vettore velocità di tentativo
$\mathbf{U}$	matrice triangolare superiore
$V$	volume
$\mathbf{w}$	vettore velocità
$x, y$	coordinate Cartesiane
$\alpha$	coefficiente di convezione
$\beta$	coefficiente di dilatazione volumica

$\delta$	tolleranza
$\gamma$	fattore di interpolazione spaziale; fattore di pesata temporale
$\Gamma$	proprietà di trasporto molecolare
$\Delta V$	volume della cella per una griglia non strutturata
$\Delta x, \Delta y$	dimensioni del volume di controllo
$\Delta \vartheta$	passo di tempo
$\epsilon$	errore di convergenza
$\phi$	generica quantità scalare
$\phi_x, \phi_y, \phi_z$	componenti Cartesiane del gradiente di $\phi$
$\vartheta$	tempo
$\kappa$	indice di condizionamento della matrice
$\lambda$	conducibilità termica; coefficiente di interpolazione
$\mu$	viscosità dinamica
$\rho$	densità
$\Phi$	vettore delle incognite

**Pedici**

$BC$	al contorno
$c$	al centroide della faccia per griglie non strutturate
$C$	al centroide della cella per griglie non strutturate
$e, w, n, s$	facce del volume di controllo Cartesiano (notazione geografica)
$E, W, N, S$	volumi di controllo adiacenti (notazione geografica)
$i$	indice di colonna
$j$	indice di riga; indice di faccia per griglie non strutturate
$k$	$k$ -esima faccia del volume di controllo Cartesiano
$l$	indice di griglia nel metodo multigriglia; indice di vertice
$nb$	sommatoria estesa ai volumi di controllo vicini
$u$	per la componente $u$ di velocità
$v$	per la componente $v$ di velocità
$x$	in direzione $x$
$y$	in direzione $y$
$0$	riferimento
$\infty$	indisturbato

**Apici**

$'$	valore di correzione
$*$	valore di tentativo; valore più aggiornato
$k$	indice di iterazione
$lhs$	left-hand side (a sinistra dell'uguale)
$n$	livello temporale o indice di iterazione

## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

---

<i>ob</i>	ordine basso
<i>oe</i>	ordine elevato
<i>rhs</i>	right-hand side (a destra dell'uguale)
<i>u</i>	per la componente <i>u</i> di velocità
<i>v</i>	per la componente <i>v</i> di velocità

### Abbreviazioni

2D	bidimensionale
3D	tridimensionale
ACM	additive correction multigrid
AGM	algebraic multigrid
BCG	bi-conjugate gradient
CDS	central difference scheme
CELS	coupled equation line solver
CG	conjugate gradient
CGS	conjugate gradient squared
CGSTAB	conjugate gradient squared stabilized
FVM	metodo dei volumi finiti (finite volume method)
GMRES	generalised minimal residual
ICCG	incomplete Cholesky conjugate gradient
QUICK	quadratic upstream interpolation for convective kinematics
SCGS	symmetrically coupled Gauss-Seidel
SIMPLE	semi-implicit method for pressure-linked equations
SLOR	successive line over-relaxation
SOR	successive over-relaxation
SOUDS	second order upwind difference scheme o LUDS, linear upwind difference scheme
UDS	upwind difference scheme
VC	volume di controllo

## 2.12 BIBLIOGRAFIA

Barth, T.J. (1994), Aspects of Unstructured Grids and Finite Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations, in *von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1994-05*.

## 2.12. BIBLIOGRAFIA

- Blazek, J. (2005), *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, 2nd ed., Elsevier, Oxford.
- Brandt, A. (1977), Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems, *Math. Comput.*, Vol. 31, pp. 333-390.
- Bruner, C.W.S. (1995), Geometric Properties of Arbitrary Polyhedra in Terms of Face Geometry, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 7, p. 1350.
- Comini, G. e Cortella, G. (2001), *Fondamenti di Trasmissione del Calore*, SGE, Padova.
- Darwish, M.S. e Moukalled, F. (1998), An Efficient very-High-Resolution Scheme Based on an Adaptive-Scheme Strategy, *Num. Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 34, pp. 191-213.
- Demirdžic, I., e Muzaferija, S. (1995), Numerical Method for Coupled Fluid Flow, Heat Transfer and Stress Analysis using Unstructured Moving Meshes with Cells of Arbitrary Topology, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 125, pp. 235-255.
- Ferziger, J.H. e Perić, M. (2002), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed., Springer, Berlin.
- Galpin, P.F., Van Doormaal, J.P. e Raithby, G.D. (1985), Solution of the Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 5, pp. 615-625.
- Galpin, P.F. e Raithby, G.D. (1986), Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Temperature-Velocity Coupling, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 105-129.
- Haselbaker, A. e Blazek, J. (2000), Accurate and Efficient Discretization of Navier-Stokes Equations on Mixed Grids, *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 11, pp. 2094-2102.
- Hutchinson, B.R. e Raithby, G.D. (1986), A Multigrid Method Based on the Additive Correction Strategy, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 511-537.
- Hutchinson, B.R., Galpin, P.F. e Raithby, G.D. (1988), Application of Additive Correction Multigrid to the Coupled Fluid Flow Equations, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 133-147.
- Incropera, F.P. e DeWitt, D.P. (1996), *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, J. Wiley & Sons, New York.

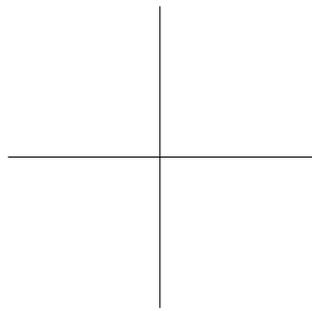
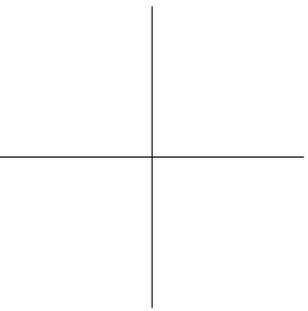
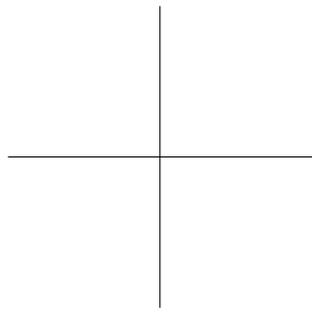
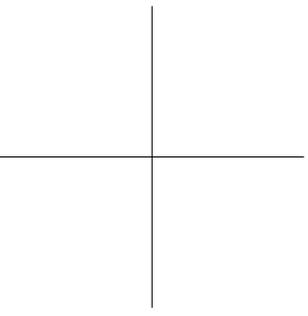
## 2. ANALISI AI VOLUMI FINITI

---

- Jayantha, P.A. e Turner, I.W. (2001), A Comparison of Gradient Approximations for Use in Finite-Volume Computational Models for Two-Dimensional Diffusion Equations, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 40, pp. 367-390.
- Leonard, B.P. (1979), A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*, Vol. 19, pp. 59-98.
- Lewis, P.E. e Ward, J.P. (1989), *Vector Analysis for Engineers and Scientists*, Addison-Wesley, Wokingham.
- Lilek, Ž. e Perić, M. (1995), A Fourth-Order Finite Volume Method with Colocated Variable Arrangement, *Computers & Fluids*, Vol. 24, pp. 239-252.
- Mavriplis, D.J., Revisiting the Least-squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes, NASA/CR-2003-212683.
- Morgut, M. (2008), Comunicazione privata.
- Newson, H.B. (1899-1900), On the Volume of a Polyhedron, *Annals of Mathematics*, 2nd Series, Vol. 1, No. 1/4, pp. 108-110.
- Ničeno, B. e Nobile, E. (2001), Numerical Analysis of Fluid Flow and Heat Transfer in Periodic Wavy Channels, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 22, pp. 156-167.
- Ničeno, B. (2001), An Unstructured Parallel Algorithm for Large Eddy and Conjugate Heat Transfer Simulations, *Ph. D. Thesis*, Delft Technical University, NL.
- Nobile, E. (1996), Simulation of Time-dependent Flow in Cavities with the Additive Correction Multigrid Method, Part I: Mathematical Formulation, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 30, No. 3, pp. 341-350.
- Nobile, E. (1996), Simulation of Time-dependent Flow in Cavities with the Additive Correction Multigrid Method, Part II: Applications, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 30, No. 3, pp. 351-370.
- Nobile, E. e Onesti L. (1997), An Efficient Data Parallel Approach to Finite Volume Simulation of Buoyant Flows, in C. Liu and Z. Liu, eds., *Advances in DNS/LES*, Ruston, Louisiana, USA, pp. 555-562.
- Patankar, S.V. (1980), *Numerical Heat transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corp., D.C.

## 2.12. BIBLIOGRAFIA

- Perot, B. (2000), Conservation Properties of Unstructured Staggered Mesh Schemes, *J. Computational Physics*, Vol. 159, pp. 58-89.
- Piller, M. e Nobile, E. (2002), Direct Numerical Simulation of Turbulent Heat Transfer in a Square Duct, *Int. J. Numerical Methods Heat & Fluid Flow*, Vol. 12, pp. 658-686.
- Press, W.H, Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. e Flannery, B.P. (2007), *Numerical Recipes The Art of Scientific Computing*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- Raw, M. (1996), Robustness of Coupled Algebraic Multigrid for the Navier-Stokes Equations, *AIAA paper 96-0297*, 34<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV.
- Rhie, C.M. e Chow, W.L. (1983), A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation, *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1525-1532.
- Shih, T.M. (1984), *Numerical Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corp., Washington.
- Stalio, E. e Nobile, E. (2003), Direct numerical simulation of heat transfer over riblets, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 24, pp. 356-371.
- Tonti, E. (2000), Formulazione Finita delle Equazioni di Campo: il Metodo delle Celle, *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale*, Brescia, pp. 2-41.
- Vanka, S.P. (1986), A Calculation Procedure for Three-Dimensional Steady Recirculating Flows Using Multigrid Methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 55, pp. 321-338.
- Versteg, H.K. e Malalasekera, W. (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics - the Finite Volume Method*, 2nd ed., Pearson Prentice Hall, Essex.
- Wang, Z.J. (1999), Improved Formulation for Geometric Properties of Arbitrary Polyhedra, *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 10, pp. 1326-1327.
- Zhang, X., Schmidt, D. e Perot, B. (2002), Accuracy and Conservation Properties of a Three-Dimensional Unstructured Staggered Mesh Scheme for Fluid Dynamics, *J. Computational Physics*, Vol. 175, pp. 764-791.



## Capitolo 3

# Convezione nei fluidi incomprimibili: analisi agli elementi finiti

C. Nonino

### 3.1 INTRODUZIONE

Da quanto è emerso nei capitoli precedenti risulta chiaro che applicare un metodo numerico significa rinunciare ad ottenere la soluzione esatta negli infiniti punti del dominio (soluzione analitica), ma accontentarsi di una soluzione approssimata in un numero finito di punti, detti nodi, individuati con criteri che dipendono dal metodo numerico prescelto. Il processo con cui si individuano i nodi nel dominio e le equazioni che consentono di ottenere la soluzione approssimata si chiama discretizzazione.

Qualunque sia il metodo numerico adottato, a conclusione della procedura di discretizzazione, si perviene sempre ad un sistema di equazioni lineari la cui soluzione consente di ottenere i valori approssimati dell'incognita nei nodi. Come verrà illustrato in questo capitolo, con il metodo degli elementi finiti tale sistema è ottenuto utilizzando formulazioni di tipo integrale del principio di conservazione espresso dall'equazione differenziale che si vuole risolvere ed approssimando a tratti la variabile incognita in modo tale che l'equazione stessa risulti soddisfatta mediamente in opportuni sottodomini detti elementi.

Onde introdurre le difficoltà in modo graduale, l'applicazione del metodo degli elementi finiti alla soluzione di problemi di termofluidodinamica verrà illustrata, nel seguito, facendo riferimento dapprima all'equazione della conduzione, che rappresenta

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

---

la più semplice delle equazioni di interesse termotecnico, per poi passare all'equazione dell'energia, che può essere considerata il prototipo dell'equazione generale di trasporto, e quindi concludere con le equazioni di Navier-Stokes, la cui soluzione è resa più complicata dal forte accoppiamento tra le equazioni stesse introdotto dalla pressione.

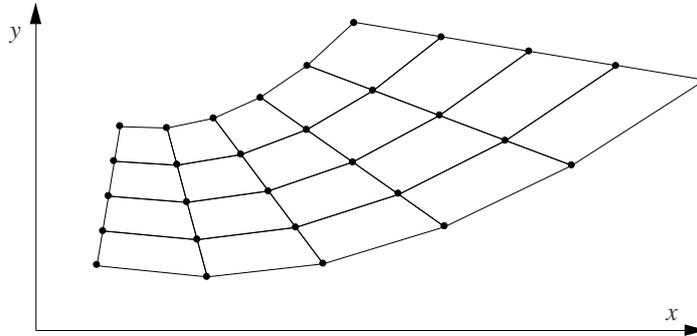
#### 3.2 CONCETTI DI BASE

Esistono diverse varianti del metodo degli elementi finiti. In tutti i casi, comunque, è necessario costruire una rappresentazione di tipo integrale del principio di conservazione espresso dall'equazione differenziale che si vuole risolvere. A questo proposito, nel campo della meccanica dei solidi si sfrutta, ad esempio, il principio dei lavori virtuali. Anche nel campo della meccanica dei fluidi o della trasmissione del calore esistono analoghi principi di tipo variazionale, ma possono essere utilizzati solo in un numero limitato di casi. Si preferisce quindi impiegare procedure più generali come il metodo dei residui pesati, che in tutti i casi, a partire dall'equazione differenziale, conduce a formulazioni di tipo integrale.

Come tutti i metodi numerici, anche quello degli elementi finiti consente di determinare il valore approssimato della variabile incognita in un numero finito di punti, detti nodi. L'applicazione del metodo alla soluzione di un problema fisico avviene con un processo sequenziale che comprende i seguenti passi:

1. il dominio è discretizzato, cioè, suddiviso in elementi, che non devono sovrapporsi nè lasciare buchi;
2. il numero e la collocazione dei nodi negli elementi determina il tipo di funzioni di forma (o di interpolazione) da utilizzare per l'approssimazione della variabile incognita all'interno e lungo i contorni degli elementi, cioè nelle posizioni non nodali;
3. per ogni elemento viene formulata un'equazione di tipo matriciale basata su una forma integrale dell'equazione differenziale da risolvere;
4. le equazioni di ogni elemento vengono "assemblate" per formare un sistema globale di equazioni lineari;
5. il sistema globale viene risolto per determinare i valori nodali dell'incognita.

Nella Fig. 3.1 è riportata, a titolo di esempio, la suddivisione di un dominio in elementi finiti quadrangolari. Sono inoltre evidenziate le posizioni dei nodi.



**Figura 3.1:** Esempio di suddivisione di un dominio in elementi finiti quadrangolari.

Per brevità e per una maggior concretezza, nei paragrafi che seguono si fa riferimento prevalentemente alla soluzione dell'equazione della conduzione o dell'energia e a domini mono- o bidimensionali. Tuttavia, questo non toglie generalità alla trattazione in quanto, anche se la variabile incognita è sempre la temperatura  $t$  e le coordinate sono solamente  $x$  e  $y$ , è evidente che quanto esposto continua a valere con riferimento a qualunque variabile scalare e a qualunque equazione di trasporto, mentre l'estensione delle procedure al caso tridimensionale risulta immediata.

Quando si procede alla discretizzazione del dominio, cioè alla suddivisione in elementi e all'individuazione dei nodi, sia agli elementi che ai nodi vengono assegnati numeri di identificazione compresi, rispettivamente, tra 1 e  $m$  e tra 1 e  $n$ , se  $m$  è il numero di elementi e  $n$  è il numero di nodi. Questa numerazione globale è, almeno in linea di principio, del tutto arbitraria, purchè non si assegni a due elementi o a due nodi lo stesso numero.

Assieme alla precedente numerazione globale si utilizza, per quanto riguarda i nodi, una numerazione locale, valida a livello del singolo elemento, che associa ad ogni nodo un numero compreso tra 1 e  $r$ , se  $r$  è il numero di nodi di ciascun elemento. Questa doppia numerazione risulta utile perché, come già detto, le equazioni matriciali vengono formulate prima a livello dei singoli elementi e poi assemblate per formare il sistema globale di equazioni lineari.

Per quanto riguarda la notazione, nel seguito un pedice che identifica una grandezza nodale si intende riferito alla numerazione locale se il simbolo della grandezza è accompagnato anche dall'indice  $e$ , altrimenti si intende riferito alla numerazione globale. Ad esempio,  $t_i^e$  rappresenta la temperatura del nodo  $i$ -esimo (nella numera-

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

zione locale) dell'elemento  $e$ , mentre  $t_i$  rappresenta la temperatura del nodo  $i$ -esimo nella numerazione globale.

Con il metodo degli elementi finiti, la variabile incognita viene approssimata a tratti, elemento per elemento, sulla base dei valori nodali  $t_i^e$  e di apposite funzioni interpolanti  $N_i^e$ , dette funzioni di forma. Con riferimento a un problema monodimensionale e a un punto di coordinata  $x$  interno al generico elemento  $e$ , si può pertanto scrivere

$$\begin{aligned} t(x) &\cong \tilde{t}^e(x) = N_1^e(x) t_1^e + N_2^e(x) t_2^e + \cdots + N_r^e(x) t_r^e \\ &= \sum_{j=1}^r N_j^e(x) t_j^e = \mathbf{N}^e \mathbf{t}^e \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove  $\tilde{t}^e$  è la temperatura approssimata,  $\mathbf{t}^e$  è il vettore di lunghezza  $r$  delle temperature nodali dell'elemento e  $\mathbf{N}^e$  è la matrice riga, di dimensioni  $1 \times r$ , delle funzioni di forma dell'elemento. Deve inoltre valere

$$t(x_i) \cong \tilde{t}^e(x_i^e) = t_i^e \quad (3.2)$$

che implica

$$N_i^e(x_i^e) = 1 \quad (3.3)$$

$$N_j^e(x_i^e) = 0 \quad \text{per } j \neq i \quad (3.4)$$

dove  $x_i^e$  sono le ascisse dei nodi dell'elemento.

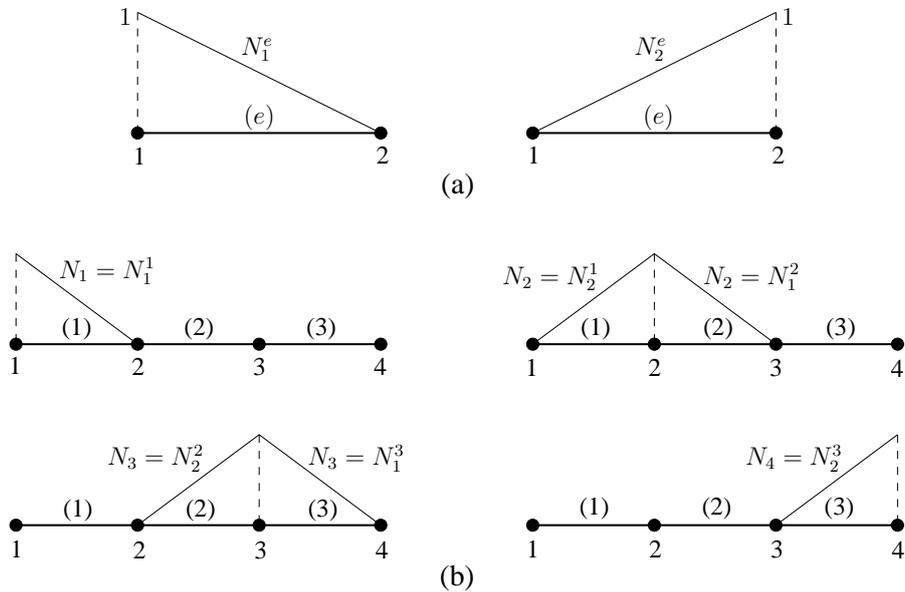
Affinché sia possibile rappresentare esattamente un andamento costante dell'incognita in un elemento deve inoltre valere, in ogni punto dell'elemento stesso, la seguente proprietà delle funzioni di forma

$$\sum_{j=1}^r N_j^e(x) = 1 \quad (3.5)$$

Infatti, se si assume che la variabile incognita abbia il valore costante  $\bar{t}$  su tutto l'elemento – e, quindi, anche nei nodi – risulta che

$$\tilde{t}^e(x) = \sum_{j=1}^r N_j^e(x) t_j^e = \sum_{j=1}^r N_j^e(x) \bar{t} = \bar{t} \quad (3.6)$$

solamente se vale l'Eq. (3.5).



**Figura 3.2:** Esempio di funzioni di forma per elementi monodimensionali a due nodi: (a) funzioni di forma locali; (b) funzioni di forma globali.

Mettendo assieme (assemblando) tutte le approssimazioni a tratti si ottiene l'approssimazione globale dell'incognita

$$t(x) \cong \tilde{t}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) t_j = \mathbf{N} \mathbf{t} \quad (3.7)$$

Le funzioni di forma globali  $N_j$ , che compaiono nell'equazione precedente, coincidono con le  $N_j^e$  negli elementi che condividono il nodo a cui si riferiscono, mentre valgono zero negli elementi che non lo contengono. Le scritture (3.1) e (3.7) sono pertanto equivalenti.

Nella Fig. 3.2 sono riportati, a titolo di esempio, le funzioni di forma locali per un generico elemento  $e$ , con riferimento a un dominio monodimensionale suddiviso in tre elementi a due nodi, le funzioni di forma globali relative ai quattro nodi della discretizzazione. Si può constatare che la funzione di forma globale  $N_1$  coincide con la  $N_1^1$  nell'elemento 1 e vale zero negli altri due elementi, la funzione di forma globale  $N_2$  coincide con la  $N_2^1$  nell'elemento 1, con la  $N_2^2$  nell'elemento 2 e vale zero nell'elemento 3 e così via per le altre due funzioni di forma.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

Nel caso di un problema bidimensionale le equazioni (3.1) e (3.7) diventano

$$\begin{aligned} t(x,y) &\cong \tilde{t}^e(x,y) = \sum_{j=1}^r N_j^e(x,y) t_j^e = \mathbf{N}^e \mathbf{t}^e \\ &= \tilde{t}(x,y) = \sum_{j=1}^n N_j(x,y) t_j = \mathbf{N} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Devono inoltre valere relazioni analoghe a quelle riportate nelle equazioni (3.2)–(3.5). Infine, l'estensione al caso tridimensionale risulta ovvia.

### 3.3 METODO DEI RESIDUI PESATI

In un generico problema di trasmissione del calore, i valori nodali  $t_i$  della temperatura rappresentano le incognite del problema, che devono essere determinate imponendo che  $\tilde{t}$  soddisfi “mediamente” l'equazione differenziale che si vuole risolvere. Questa può sempre essere messa nella forma generale

$$A(t) = 0 \quad (3.9)$$

valida nel dominio di definizione  $\Omega$ . A causa dell'errore di discretizzazione, però, la funzione  $\tilde{t}$  in genere non soddisfa esattamente l'Eq. (3.9) e si ha quindi, in ogni punto del dominio, un residuo

$$\varepsilon = A(\tilde{t}) \neq 0 \quad (3.10)$$

che può essere utilizzato come misura della bontà dell'approssimazione.

Tra i diversi criteri che si possono adottare per rendere l'approssimazione la più accurata possibile, uno sicuramente sensato è quello di imporre che si annulli l'integrale del residuo  $\varepsilon$  sul dominio  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \varepsilon d\Omega = \int_{\Omega} A(\tilde{t}) d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

in modo che l'Eq. (3.9) sia soddisfatta almeno mediamente. Tuttavia l'Eq. (3.11) da sola non risolve il problema della determinazione degli  $n$  valori dell'incognita in quanto sono necessarie  $n$  equazioni. Queste possono essere ottenute integrando sul dominio  $\Omega$  il residuo dato dall'Eq. (3.10) moltiplicato per  $n$  funzioni di pesata  $W_i$  scelte, entro certi limiti, in modo arbitrario. Si ottengono così  $n$  equazioni del tipo

$$\int_{\Omega} W_i A(\tilde{t}) d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

L'arbitrarietà delle funzioni di pesata è limitata dalla necessità di pesare in modo equilibrato il residuo  $\varepsilon$  sul dominio, evitando le possibilità di una eventuale compensazione dell'errore tra parti del dominio distanti tra di loro. Questo obiettivo viene raggiunto imponendo che ogni funzione di pesata  $W_i$  pesi il residuo, cioè sia diversa da zero, solamente in un intorno limitato del nodo  $i$  al quale si riferisce. Tale intorno può, ad esempio, coincidere con gli elementi che condividono il nodo  $i$ . In questo modo la  $i$ -esima equazione consente di minimizzare l'errore nella zona di influenza del nodo  $i$ . Siccome questo deve valere per ogni nodo della discretizzazione, si ottiene una distribuzione abbastanza uniforme dell'errore in tutto il dominio.

Le funzioni di pesata, inoltre, devono essere tali per cui vale

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1 \quad (3.13)$$

in ogni punto del dominio  $\Omega$ . Infatti, tenendo conto delle equazioni (3.12) e (3.13) si può scrivere

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} W_i A(\tilde{t}) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n W_i \right) A(\tilde{t}) d\Omega = \int_{\Omega} A(\tilde{t}) d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Si ha cioè la garanzia che anche l'Eq. (3.11) sia soddisfatta.

Volendo applicare, a titolo di esempio, il metodo dei residui pesati all'equazione della conduzione in regime stazionario con generazione interna di calore,

$$A(t) = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \dot{q} = 0 \quad (3.15)$$

dove  $\lambda$  è la conducibilità termica e  $\dot{q}$  è la potenza termica generata per unità di volume, bisogna dapprima scrivere  $n$  equazioni del tipo

$$\int_{\Omega} W_i \nabla \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega + \int_{\Omega} W_i \dot{q} d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

Il passo successivo sarebbe quello di sostituire  $\tilde{t}$  a  $t$  nell'Eq. (3.16). Tuttavia, prima di operare tale sostituzione è conveniente applicare le formule di Green al termine contenente la derivata seconda, onde abbassarne l'ordine di derivazione. Come è noto, dato un campo vettoriale  $\mathbf{V}$ , definito in un dominio  $\Omega$  delimitato da un contorno  $S$ , vale il teorema di Gauss

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} d\Omega = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.17)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

dove  $\mathbf{n}$  è il versore della normale esterna al contorno. Ponendo  $\mathbf{V} = W_i \lambda \nabla t$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (W_i \lambda \nabla t) d\Omega &= \int_{\Omega} [W_i \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla t)] d\Omega \\ &= \int_S W_i \lambda \nabla t \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quindi, il primo termine dell'Eq. (3.16) può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i \nabla \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega + \int_S W_i \lambda \nabla t \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega - \int_S W_i q'' dS \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove  $q'' = -\lambda \nabla t \cdot \mathbf{n}$  è la componente normale al contorno del flusso termico specifico. Pertanto, dall'applicazione del metodo dei residui pesati e delle formule di Green all'Eq. (3.15) si ottiene

$$- \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla \tilde{t}) d\Omega - \int_S W_i \tilde{q}'' dS + \int_{\Omega} W_i \dot{q} d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

dove  $\tilde{q}''$  indica la rappresentazione approssimata del flusso termico specifico  $q''$ .

L'applicazione delle formule di Green presenta due vantaggi:

- nell'Eq. (3.20) è sufficiente che le funzioni di forma usate nell'approssimazione  $\tilde{t}$  ammettano derivate prime, ma non necessariamente derivate seconde come era richiesto nell'Eq. (3.15);
- la presenza nell'Eq. (3.20) dell'integrale del flusso termico sul contorno consente una agevole imposizione delle condizioni al contorno del secondo e del terzo tipo.

Ci sono anche due svantaggi:

- anche le funzioni di pesata  $W_i$  devono ammettere derivate prime, mentre, nell'Eq. (3.15), non era richiesto che fossero derivabili;

- le equazioni (3.20) sono più “permissive” dell’equazione differenziale (3.15) e delle equazioni (3.16) in quanto, a differenza di queste, ammettono anche soluzioni  $\tilde{t}$  che sono derivabili una sola volta, mentre le equazioni (3.15) e (3.16) richiedono che la soluzione sia derivabile almeno due volte; per questo motivo le equazioni (3.20) sono chiamate “forme deboli” (“weak forms”).

Il fatto che la soluzione approssimata debba essere derivata una sola volta consente di utilizzare funzioni di forma  $N_i$  che siano continue su tutto il dominio e che siano dotate di derivate prime che possono essere anche discontinue. Tali funzioni sono dette  $C_0$  continue. Si ha, quindi, maggior libertà di scelta rispetto a quanto sarebbe consentito se le funzioni di forma dovessero essere dotate anche di derivate prime continue.

La necessità di utilizzare funzioni di pesata derivabili almeno una volta non è in genere considerato un grosso limite. Pertanto le forme deboli delle equazioni integrali sono di solito preferite nell’implementazione del metodo degli elementi finiti.

### 3.3.1 Metodo di Galerkin

Viene chiamato metodo di Galerkin quella variante del metodo dei residui pesati nella quale le funzioni di pesata  $W_i$  sono scelte uguali alle funzioni di forma  $N_i$ , cioè

$$W_i = N_i \quad (3.21)$$

Ciò è possibile in quanto le funzioni di forma soddisfano tutti requisiti richiesti alle funzioni di pesata:

- sono diverse da zero solo in un intorno limitato del nodo a cui si riferiscono (gli elementi che condividono quel nodo);
- siccome soddisfano l’Eq. (3.5), automaticamente soddisfano anche i requisiti imposti dall’Eq. (3.13).

Si ha inoltre il vantaggio di non dover implementare nei codici di calcolo due insiemi di funzioni diverse, uno per l’interpolazione dell’incognita e uno per la pesata delle equazioni. Inoltre, in molti casi, il metodo di Galerkin produce matrici simmetriche nei sistemi di equazioni lineari che si ottengono applicando la procedura di discretizzazione. Per questi motivi, il metodo di Galerkin è di gran lunga la variante del metodo dei residui pesati più utilizzata in pratica.

L’Eq. (3.12) pertanto diventa

$$\int_{\Omega} N_i A(\tilde{t}) d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

Applicando il metodo di Galerkin alla soluzione dell'equazione della conduzione termica bidimensionale con generazione interna di calore

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0 \quad (3.23)$$

si ottiene innanzi tutto l'equazione integrale

$$\int_{\Omega} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

Poi, utilizzando la formula di Green ed approssimando  $t$  con  $\tilde{t}$  si ha la forma debole

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\ - \int_S N_i \tilde{q}'' dS + \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'integrale sul contorno che compare nell'equazione precedente può essere scritto come

$$\int_S N_i \tilde{q}'' dS = \int_{S_2} N_i q_p'' dS + \int_{S_3} N_i \tilde{q}_c'' dS + \int_{S_1} N_i \tilde{q}'' dS \quad (3.26)$$

dove  $S_2$  rappresenta la porzione di contorno su cui sono applicate condizioni al contorno del secondo tipo (flusso termico imposto  $q_p''$ ), e  $S_3$  rappresenta la porzione di contorno su cui sono applicate condizioni al contorno del terzo tipo, o di convezione (flusso termico convettivo  $\tilde{q}_c''$ ). Sulla porzione di contorno  $S_1$ , invece, sono applicate condizioni al contorno del primo tipo (temperatura imposta  $t = t_p$ ).

Data l'espressione approssimata dell'incognita

$$\tilde{t} = \sum_{i=1}^n N_i t_i \quad (3.27)$$

le sue derivate in direzione  $x$  e  $y$  possono essere calcolate come

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} t_j \\ \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} t_j \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sostituendo le equazioni (3.28) e l'Eq. (3.26) nell'Eq. (3.25) si ottiene

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} t_j \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} t_j \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega \\
 & - \int_{S_2} N_i q_p'' dS - \int_{S_3} N_i \tilde{q}_c'' dS - \int_{S_1} N_i \tilde{q}'' dS = 0 \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

che, per  $i = 1, n$ , costituisce un sistema di  $n$  equazioni algebriche lineari.

Siccome nel sistema precedente le equazioni corrispondenti ai nodi sul contorno  $S_1$ , cioè quelli in cui è imposto il valore dell'incognita, non sono necessarie per la soluzione in quanto in quei nodi la temperatura è nota, gli integrali sul contorno  $S_1$  non devono mai venir valutati esplicitamente. Tuttavia le equazioni possono comunque venir formate ed eventualmente utilizzate a posteriori per il calcolo dei flussi termici incogniti, necessari a mantenere in quei nodi il valore di temperatura imposto.

Se si portano le temperature nodali  $t_j$  fuori dagli integrali, si può riscrivere l'Eq. (3.29) come

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \right] t_j = \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega \\
 & - \int_{S_2} N_i q_p'' dS - \int_{S_3} N_i \tilde{q}_c'' dS - \int_{S_1} N_i \tilde{q}'' dS \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

L'Eq. (3.30), valida per il generico nodi  $i$ , può essere riscritta come

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} t_j = s_i - (r_2)_i - (r_3)_i - (r_1)_i \quad (3.31)$$

mentre le  $n$  equazioni algebriche lineari che costituiscono il sistema possono poi essere rappresentate nella seguente forma matriciale

$$\mathbf{K} \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \quad [-\mathbf{r}_1] \quad (3.32)$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di conduzione,  $\mathbf{s}$  è il vettore di generazione interna, mentre  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  e  $\mathbf{r}_1$  rappresentano i vettori dei flussi termici nodali che derivano dall'imposizione di condizioni al contorno del secondo, del terzo e del primo tipo, rispettivamente.

Nell'equazione precedente, le parentesi quadre che racchiudono il vettore  $\mathbf{r}_1$  stanno ad indicare che, per quanto detto, questo non è necessario alla soluzione del problema

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

e, quindi, d'ora in poi verrà omissa. Inoltre, si intenderanno omesse anche le equazioni corrispondenti ai nodi vincolati, cioè, quelli dove la temperatura è imposta, e modificati in maniera coerente i termini noti delle equazioni rimanenti. Nell'Appendice di questo capitolo, al Paragrafo 3.11.1, sono illustrate le procedure con cui, prima della soluzione dei sistemi di equazioni lineari, si impongono le condizioni al contorno del primo tipo e poi, a soluzione completata, si calcolano i flussi nodali incogniti.

I generici elementi della matrice e dei vettori che compaiono nell'Eq. (3.32) avranno le seguenti espressioni

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.33)$$

$$s_i = \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega \quad (3.34)$$

$$(r_2)_i = \int_{S_2} N_i q_p'' dS \quad (3.35)$$

Si noti che la matrice  $\mathbf{K}$  è simmetrica essendo  $K_{ij} = K_{ji}$ . Le componenti del vettore  $\mathbf{r}_3$  non possono venir valutate direttamente, ma devono venir espresse in funzione delle temperature dei nodi sul contorno  $S_3$ . Infatti, i flussi nodali  $(r_3)_i$  sono di tipo convettivo e quindi dipendono dalla temperatura superficiale incognita  $\tilde{t}$ , essendo  $\tilde{q}_c'' = \alpha(\tilde{t} - t_f)$ , dove  $\alpha$  è il coefficiente di convezione e  $t_f$  è la temperatura del fluido che lambisce la superficie esterna. Pertanto si può scrivere

$$\begin{aligned} (r_3)_i &= \int_{S_3} N_i \alpha (\tilde{t} - t_f) dS = \int_{S_3} N_i \alpha \left( \sum_{j=1}^n N_j t_j \right) dS - \int_{S_3} N_i \alpha t_f dS \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{S_3} N_i \alpha N_j dS \right) t_j - \int_{S_3} N_i \alpha t_f dS = \sum_{j=1}^n B_{ij} t_j + b_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

che in forma matriciale diventa

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{B} \mathbf{t} + \mathbf{b} \quad (3.37)$$

Gli elementi tipici della matrice  $\mathbf{B}$  e del vettore  $\mathbf{b}$  sono

$$B_{ij} = \int_{S_3} N_i \alpha N_j dS \quad (3.38)$$

$$b_i = - \int_{S_3} N_i \alpha t_f dS \quad (3.39)$$

L'Eq. (3.32) può pertanto venir riscritta come

$$(\mathbf{K} + \mathbf{B}) \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b} \quad (3.40)$$

dove il vettore  $\mathbf{r}_1$  è stato ommesso. Ponendo

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} + \mathbf{B} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b} \quad (3.42)$$

l'equazione precedente può a sua volta essere posta in una forma più conveniente

$$\mathbf{H} \mathbf{t} = \mathbf{f} \quad (3.43)$$

che rappresenta il sistema finale di equazioni lineari da risolvere. Si noti che essendo le matrici  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{B}$  simmetriche, anche la matrice  $\mathbf{H}$  è simmetrica. Un cenno sui metodi di soluzione dei sistemi di equazioni lineari è riportato nell'Appendice di questo capitolo.

### 3.3.2 "Assembly"

Per rendere più efficiente il calcolo degli elementi delle matrici e dei vettori che si ottengono dall'applicazione del metodo degli elementi finiti, riducendo al tempo stesso l'occupazione di memoria dell'elaboratore, è conveniente operare sequenzialmente, elemento per elemento, sfruttando la proprietà che consente di scrivere

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega + \int_S (\dots) dS = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} (\dots) d\Omega + \sum_{e=1}^m \int_{S^e} (\dots) dS \quad (3.44)$$

dove i sottodomini  $\Omega^e$  sono rappresentati dagli elementi, mentre i contorni  $S^e$  sono le eventuali parti del contorno degli elementi che sono situate sul contorno esterno  $S$ .

Pertanto, se equazioni di tipo matriciale analoghe alla (3.40) vengono scritte con riferimento ai nodi di un solo elemento per volta,

$$(\mathbf{K}^e + \mathbf{B}^e) \mathbf{t}^e = \mathbf{s}^e - \mathbf{r}_2^e - \mathbf{b}^e \quad (3.45)$$

non è necessario costruire le matrici globali  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{B}$ , di dimensioni  $n \times n$ , e i vettori globali  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{b}$ , di dimensione  $n$ , ma, per ogni elemento, si possono costruire le matrici  $\mathbf{K}^e$  e  $\mathbf{B}^e$ , di dimensioni  $r \times r$ , e i vettori  $\mathbf{s}^e$ ,  $\mathbf{r}_2^e$  e  $\mathbf{b}^e$ , di dimensione  $r$ . Gli elementi tipici delle matrici e dei vettori che compaiono in queste equazioni matriciali, formulate a livello di elemento, sono formalmente uguali ai generici termini definiti dalle equazioni (3.33)–(3.35), (3.38) e (3.39). Ovviamente, gli integrali saranno estesi ad  $\Omega^e$  ed  $S^e$  e le funzioni di forma globali  $N_i$  saranno rimpiazzate dalle  $N_i^e$ , con le

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

quali coincidono elemento per elemento. Utilizzando le matrici e i vettori elementari così determinati è poi possibile costruire matrici e vettori analoghi a quelli definiti dalle equazioni (3.41) e (3.42), ma anch'essi validi a livello di singolo elemento. Si ha pertanto

$$\mathbf{H}^e = \mathbf{K}^e + \mathbf{B}^e \quad (3.46)$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{s}^e - \mathbf{r}_2^e - \mathbf{b}^e \quad (3.47)$$

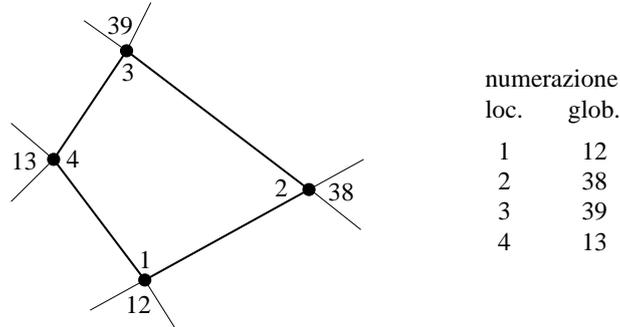
Con una procedura che prende il nome di “assembly” si vanno poi ad aggiungere nelle posizioni appropriate della matrice globale  $\mathbf{H}$ , di dimensioni  $n \times n$ , e del vettore globale  $\mathbf{f}$ , di dimensione  $n$ , i contributi delle matrici elementari  $\mathbf{H}^e$  e dei vettori elementari  $\mathbf{f}^e$  secondo le equazioni

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^m \mathbf{H}^e \quad (3.48)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^m \mathbf{f}^e \quad (3.49)$$

dove  $\mathbf{A}$  è l'operatore “assembly”, che agisce sulle matrici  $\mathbf{H}^e$  e sui vettori  $\mathbf{f}^e$  in maniera analoga all'operatore sommatoria, ma tenendo conto della differenza di rango tra le matrici  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}^e$  e della differenza di lunghezza tra i vettori  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}^e$ . In pratica, le posizioni nella matrice e nel vettore globali dove vanno aggiunti i contributi delle matrici e dei vettori relativi ai singoli elementi sono individuate tenendo conto della corrispondenza biunivoca che esiste tra i numeri di identificazione dei nodi (e quindi tra gli indici) nella numerazione locale e in quella globale dei nodi stessi. Ad esempio, per un elemento bidimensionale a quattro nodi come quello mostrato in Fig. 3.3, individuato dalla sequenza 12, 38, 39, 13 nella numerazione globale dei nodi, corrispondente alla sequenza 1, 2, 3, 4 nella numerazione locale, il coefficiente  $H_{1,1}^e$  viene sommato al coefficiente della matrice globale  $H_{12,12}$ , il coefficiente  $H_{1,2}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{12,38}$ , il coefficiente  $H_{1,3}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{12,39}$ , il coefficiente  $H_{1,4}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{12,13}$ , il coefficiente  $H_{2,1}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{38,12}$ , il coefficiente  $H_{2,2}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{38,38}$ , il coefficiente  $H_{2,3}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{38,39}$ , il coefficiente  $H_{2,4}^e$  viene sommato al coefficiente  $H_{38,13}$ , e così via per gli altri.

Il modo di procedere esposto in questo paragrafo è generale, si applica anche al vettore dei termini noti e viene sempre impiegato, anche quando nell'equazione sono presenti termini di tipo advettivo o temporale, il cui trattamento è descritto nei paragrafi seguenti.



**Figura 3.3:** Esempio di numerazione locale e numerazione globale dei nodi di un elemento bilineare a quattro nodi.

### 3.3.3 Discretizzazione del termine advettivo

L'equazione bidimensionale dell'energia in regime stazionario

$$A(t) = \rho c \left( u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) \right] - \dot{q} = 0 \quad (3.50)$$

differisce dall'Eq. (3.23) solamente per la presenza del termine advettivo, che può venir discretizzato col metodo di Galerkin

$$\int_{\Omega} N_i \rho c \left( u \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho c \left[ u \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} t_j \right) + v \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} t_j \right) \right] d\Omega = \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\Omega} N_i \rho c \left( u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \right] t_j \quad (3.51)$$

Nelle equazioni precedenti  $u$  e  $v$  rappresentano le componenti della velocità, mentre  $\rho$  e  $c$  sono, rispettivamente, la densità e il calore specifico.

L'equazione (3.50) discretizzata per il generico nodo  $i$  utilizzando il metodo di Galerkin e la formula di Green diventa

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} + B_{ij} + A_{ij}) t_j = s_i - (r_2)_i - b_i \quad (3.52)$$

L'intero sistema di equazioni algebriche lineari può essere scritto in una forma matriciale analoga a quella dell'Eq. (3.40)

$$(\mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b} \quad (3.53)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

dove  $\mathbf{A}$  è la matrice di advezione, i cui elementi tipici sono

$$A_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho c \left( u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.54)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  non è simmetrica essendo chiaramente  $A_{ij} \neq A_{ji}$ .

L'equazione (3.53) può essere messa nella forma (3.43) ponendo

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b} \quad (3.56)$$

In questo caso, però, la matrice  $\mathbf{H}$  non è simmetrica.

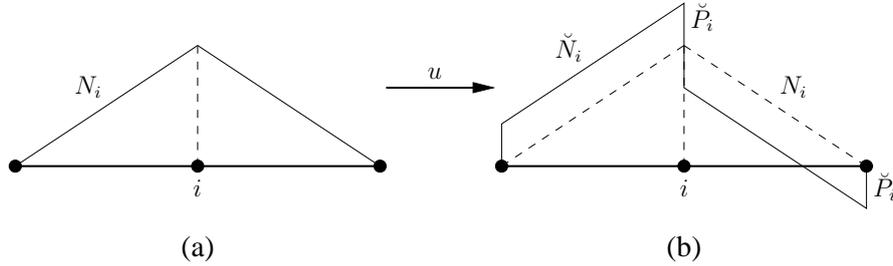
#### 3.3.4 “Upwinding”

In analogia con quanto avviene usando lo schema CDS nell'ambito del metodo dei volumi finiti, anche nella soluzione dell'equazione dell'energia col metodo degli elementi finiti si possono riscontrare oscillazioni numeriche ed instabilità, in particolare nel caso di deflussi caratterizzati da valori elevati dei numeri di Reynolds e/o di Péclet. Anche in questo caso, un possibile rimedio, alternativo all'infittimento della mesh, cioè, alla riduzione delle dimensioni degli elementi, è rappresentato dall'introduzione nella soluzione di effetti di “upwinding” mediante l'utilizzo di particolari funzioni di pesata.

Come è stato illustrato nei paragrafi precedenti, nel metodo di Galerkin classico, detto anche di Bubnov-Galerkin, le funzioni di pesata coincidono con le funzioni di interpolazione, cioè, con riferimento al generico nodo  $i$ , si pone  $W_i = N_i$ . In una variante del metodo di Galerkin, detto metodo di Petrov-Galerkin, invece, ogni funzione di pesata è posta uguale ad una funzione  $\check{N}_i$ , definita come somma della corrispondente funzione di forma  $N_i$  e di un termine di perturbazione  $\check{P}_i$  che dipende dalle caratteristiche del campo di velocità e dalle dimensioni dell'elemento. Si ha, quindi

$$W_i = \check{N}_i = N_i + \check{P}_i \quad (3.57)$$

Il termine di perturbazione  $\check{P}_i$  può assumere valori sia positivi sia negativi ed è comunque scelto in maniera tale che sia sempre verificata la proprietà espressa dall'Eq. (3.13) di cui devono necessariamente godere le funzioni di pesata. La Fig. 3.4 illustra con un esempio la differenza tra una generica funzione di pesata utilizzabile con il metodo di Bubnov-Galerkin, a cui nel resto di questo capitolo si continuerà a fare riferimento, ed una che può essere impiegata nell'ambito del metodo di Petrov-Galerkin nel caso di elementi monodimensionali e di velocità uniforme  $u$  diretta da sinistra verso destra ( $u > 0$ ).



**Figura 3.4:** Esempi di funzioni di pesata nel caso di elementi monodimensionali e  $u > 0$ : (a) metodo di Bubnov-Galerkin; (b) metodo di Petrov-Galerkin.

Mentre si rimanda il lettore alla letteratura scientifica specializzata per quanto riguarda i dettagli relativi a questa tecnica di “upwinding”, spesso denominata SUPG (“streamline-upwind/Petrov-Galerkin”), qui si ricorda soltanto che il metodo di Petrov-Galerkin oltre ad essere molto efficace per prevenire la comparsa di oscillazioni spaziali della soluzione, introduce solo una modesta diffusività numerica, a patto, però, che le funzioni di pesata modificate vengano applicate a tutti i termini dell’equazione da discretizzare e non solamente, come talvolta capita di assistere, al termine advettivo.

### 3.4 EQUAZIONI PER IL REGIME TRANSITORIO

Per applicare il metodo di Galerkin alle equazioni che governano problemi in regime transitorio, secondo l’approccio più comune, si assume che solamente per le variabili nodali ci sia una dipendenza dal tempo  $\vartheta$ , mentre si continua ad ammettere che le funzioni di forma dipendano unicamente dalle coordinate spaziali. Pertanto, l’approssimazione globale dell’incognita può venir espressa nella forma

$$t(x,y,\vartheta) \cong \tilde{t}(x,y,\vartheta) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) t_i(\vartheta) = \mathbf{N} \mathbf{t} \quad (3.58)$$

L’equazione dell’energia in regime transitorio

$$A(t) = \rho c \frac{\partial t}{\partial \vartheta} + \rho c \left( u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) \right] - \dot{q} = 0 \quad (3.59)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

differisce dall'Eq. (3.50) solamente per la presenza del termine temporale che può venir discretizzato col metodo di Galerkin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i \rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \vartheta} d\Omega &= \int_{\Omega} N_i \rho c \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sum_{j=1}^n N_j t_j \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho c \left( \sum_{j=1}^n N_j \frac{\partial t_j}{\partial \vartheta} \right) d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} N_i \rho c N_j d\Omega \right) \frac{\partial t_j}{\partial \vartheta} \end{aligned} \quad (3.60)$$

L'equazione (3.59) discretizzata per il generico nodo  $i$  utilizzando il metodo di Galerkin e la formula di Green può essere scritta come

$$\sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{t}_j + \sum_{j=1}^n (K_{ij} + B_{ij} + A_{ij}) t_j = s_i - (r_2)_i - (r_3)_i \quad (3.61)$$

Assieme alle analoghe equazioni valide per gli altri nodi, forma un sistema di equazioni differenziali ordinarie che può essere rappresentato nella seguente forma matriciale

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{t}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b} \quad (3.62)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la matrice di capacità, i cui elementi tipici sono dati da

$$C_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho c N_j d\Omega \quad (3.63)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  è simmetrica, essendo  $C_{ij} = C_{ji}$ . Nell'Eq. (3.62) si è indicato con  $\dot{\mathbf{t}}$  il vettore delle derivate nel tempo dei valori nodali dell'incognita

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \vartheta} \quad (3.64)$$

di cui, il generico elemento è

$$\dot{t}_i = \frac{\partial t_i}{\partial \vartheta} \quad (3.65)$$

L'equazione (3.62) può essere riscritta in forma più compatta come

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{t}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{t} = \bar{\mathbf{s}} \quad (3.66)$$

dove si è posto

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (3.67)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b} \quad (3.68)$$

### 3.4.1 Integrazione nel tempo

Le equazioni (3.62) e (3.66), poichè rappresentano in forma matriciale sistemi di equazioni differenziali ordinarie, sono solo parzialmente discretizzate. Manca infatti la discretizzazione nel tempo.

I metodi di integrazione temporale più usati sono analoghi a quelli impiegati nell'ambito del metodo delle differenze finite. Essi prevedono l'integrazione numerica diretta, ottenuta applicando formule ricorsive derivate con le tecniche classiche delle differenze finite. Il problema può venir risolto con una tecnica di "time marching", suddividendo cioè il transitorio in un certo numero di intervalli temporali di durata  $\Delta\vartheta$ . L'integrazione temporale consiste nel calcolo sequenziale della soluzione, a partire dalle condizioni iniziali, al tempo  $\Delta\vartheta, 2\Delta\vartheta, \dots, n\Delta\vartheta, (n+1)\Delta\vartheta$ , e così via. Pertanto, assumendo che la soluzione sia nota al tempo  $\vartheta$ , si può ottenere la nuova soluzione al tempo  $\vartheta + \Delta\vartheta$ .

Con riferimento all'Eq. (3.66), lo schema generale di integrazione temporale a due livelli può essere espresso come

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}^n}{\Delta\vartheta} + \gamma \bar{\mathbf{K}} \mathbf{t}^{n+1} + (1 - \gamma) \bar{\mathbf{K}} \mathbf{t}^n = \bar{\mathbf{s}} \quad (3.69)$$

dove  $\gamma$  è un parametro di pesata temporale ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ),  $\mathbf{t}^{n+1}$  e  $\mathbf{t}^n$  sono i vettori contenenti i valori nodali dell'incognita al tempo  $\vartheta^{n+1} = (n+1)\Delta\vartheta$  e al tempo  $\vartheta^n = n\Delta\vartheta$ , rispettivamente, e la derivata temporale dei valori nodali dell'incognita è stata approssimata come

$$\dot{\mathbf{t}} \cong \frac{\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}^n}{\Delta\vartheta} \quad (3.70)$$

L'equazione (3.69) può essere riscritta come

$$\left( \frac{1}{\Delta\vartheta} \mathbf{C} + \gamma \bar{\mathbf{K}} \right) \mathbf{t}^{n+1} = \left[ \frac{1}{\Delta\vartheta} \mathbf{C} - (1 - \gamma) \bar{\mathbf{K}} \right] \mathbf{t}^n + \bar{\mathbf{s}} \quad (3.71)$$

e quindi

$$\mathbf{H} \mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{f}^n \quad (3.72)$$

dove

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\Delta\vartheta} \mathbf{C} + \gamma \bar{\mathbf{K}} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{f}^n = \left[ \frac{1}{\Delta\vartheta} \mathbf{C} - (1 - \gamma) \bar{\mathbf{K}} \right] \mathbf{t}^n + \bar{\mathbf{s}} \quad (3.74)$$

Alcuni valori notevoli di  $\gamma$  da utilizzare nelle equazioni precedenti sono:

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

- $\gamma = 0$ , per cui si ha l'algoritmo esplicito, instabile per valori troppo grandi del passo temporale  $\Delta\vartheta$ ; in questo caso, l'errore di discretizzazione temporale è di ordine  $O(\Delta\vartheta)$ ;
- $\gamma = 1/2$ , per cui si ha l'algoritmo di Crank-Nicolson, incondizionatamente stabile, ma che dà origine ad oscillazioni temporali della soluzione per valori troppo grandi del passo temporale  $\Delta\vartheta$ ; in questo caso, l'errore di discretizzazione temporale è di ordine  $O(\Delta\vartheta^2)$ ;
- $\gamma = 1$ , per cui si ha l'algoritmo implicito puro, incondizionatamente stabile; in questo caso, l'errore di discretizzazione temporale è di ordine  $O(\Delta\vartheta)$ .

Bisogna notare che, a differenza di quanto avviene col metodo delle differenze finite, l'algoritmo esplicito ( $\gamma = 0$ ) non consente di ottenere direttamente la soluzione, senza cioè dover risolvere un sistema di equazioni lineari, perché la matrice di capacità  $\mathbf{C}$ , che moltiplica il vettore delle incognite  $\mathbf{t}^{n+1}$ , è una matrice con elementi diversi da zero anche fuori della diagonale. Pertanto la sua inversione non è banale. Per poter sfruttare i vantaggi del metodo esplicito bisogna allora approssimare la matrice  $\mathbf{C}$  con una matrice diagonale  $\mathbf{C}_L$ , ottenuta sommando tutti gli elementi di ogni riga della matrice. Con questo procedimento, detto "lumping", in ogni riga della matrice, l'elemento della diagonale viene posto uguale al risultato di tale somma

$$(C_L)_{ii} = \sum_{j=1}^n C_{ij} \quad (3.75)$$

mentre tutti gli altri elementi vengono posti uguali a zero. La definizione del generico elemento della matrice  $\mathbf{C}_L$  è, quindi

$$(C_L)_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho c \delta_{ij} d\Omega \quad (3.76)$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker, che vale 1 per  $i = j$  e 0 per  $i \neq j$ . Con una matrice di capacità di questo tipo è possibile calcolare esplicitamente i valori nodali dell'incognita, senza dover risolvere un sistema di equazioni lineari, ma l'accuratezza risulta in alcuni casi sensibilmente ridotta.

### 3.5 FUNZIONI DI FORMA

Dopo la panoramica sulle caratteristiche principali del metodo dei residui pesati in generale e di quello di Galerkin in particolare, è opportuno fare alcune precisazioni

riguardo alle funzioni utilizzate per l'approssimazione dell'incognita, cioè, le funzioni di forma, che sono funzioni di tipo polinomiale. Il loro ordine è uguale al grado del polinomio in ciascuna coordinata e dipende dal numero di nodi di ogni elemento. Tuttavia, la scelta del numero di nodi per elemento e della posizione degli stessi è limitata ad un numero ristretto di combinazioni. Nel seguito vengono brevemente riassunte le caratteristiche di alcuni degli elementi (e delle relative funzioni di forma) più frequentemente utilizzati per la discretizzazione di domini mono- e bidimensionali. Si invita, invece, il lettore a fare riferimento ai testi specializzati per la trattazione degli elementi tridimensionali.

Per gli elementi monodimensionali le funzioni di forma  $N_i^e$  possono essere assunte uguali a polinomi di Lagrange di grado  $r - 1$ , la cui espressione generale può essere scritta come

$$N_i^e = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{x - x_j^e}{x_i^e - x_j^e} \quad (3.77)$$

dove  $x_j^e < x_{j+1}^e$ . Infatti, per convenzione, nella numerazione locale degli elementi monodimensionali i nodi sono numerati in ordine crescente, secondo il verso positivo dell'asse  $x$ . Gli elementi monodimensionali più usati, illustrati in Fig. 3.5, sono quelli

- lineari a due nodi ( $r = 2$ ), situati alle estremità dell'elemento;
- parabolici a tre nodi ( $r = 3$ ), due situati alle estremità dell'elemento e uno in posizione intermedia.

Elementi di ordine superiore al secondo vengono usati raramente.

Per  $r = 2$ , l'Eq. (3.77) fornisce le funzioni di forma lineari degli elementi monodimensionali a due nodi

$$N_1^e = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x_2^e - x}{L^e} \quad N_2^e = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x - x_1^e}{L^e} \quad (3.78)$$

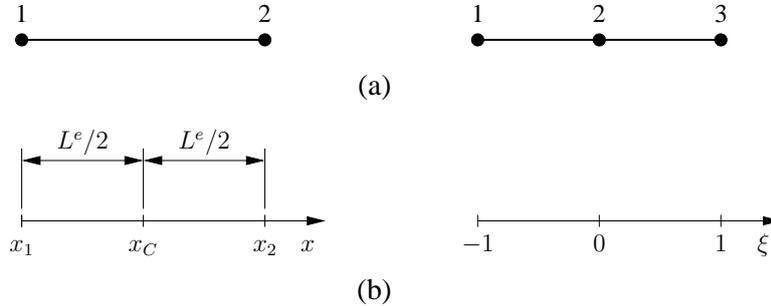
dove  $L^e = x_2^e - x_1^e$  è la lunghezza dell'elemento.

Per  $r = 3$ , l'Eq. (3.77) fornisce le funzioni di forma paraboliche degli elementi monodimensionali a tre nodi

$$N_1^e = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \frac{x - x_3^e}{x_1^e - x_3^e} \quad N_2^e = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \frac{x - x_3^e}{x_2^e - x_3^e} \quad (3.79)$$

$$N_3^e = \frac{x - x_1^e}{x_3^e - x_1^e} \frac{x - x_2^e}{x_3^e - x_2^e}$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



**Figura 3.5:** Elementi monodimensionali: (a) elemento lineare a due nodi (a sinistra) e elemento parabolico a tre nodi (a destra); (b) definizione del sistema di coordinate locali.

Per motivi che risulteranno chiari in seguito, è conveniente introdurre una coordinata locale normalizzata, di tipo baricentrico

$$\xi = 2 \frac{x - x_C^e}{L^e} \quad (3.80)$$

dove  $x_C^e$  è la coordinata del centro dell'elemento. Ovviamente si ha  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

Le espressioni delle funzioni di forma per gli elementi monodimensionali lineari date dalle equazioni (3.78) possono quindi essere riscritte come

$$N_1^e = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad N_2^e = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (3.81)$$

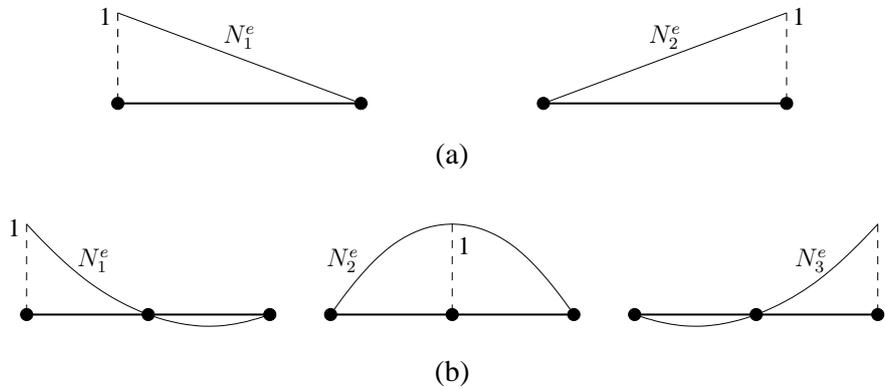
Le espressioni delle funzioni di forma per gli elementi monodimensionali parabolici date dalle equazioni (3.79) possono quindi essere riscritte come

$$N_1^e = \frac{1}{2} (\xi - 1) \xi \quad N_2^e = 1 - \xi^2 \quad (3.82)$$

$$N_3^e = \frac{1}{2} (\xi + 1) \xi$$

Nella Fig. 3.6 sono mostrati gli andamenti delle funzioni di forma degli elementi monodimensionali a due e a tre nodi.

Per quanto riguarda gli elementi bidimensionali, quelli utilizzati nella pratica sono di tipo quadrangolare o triangolare, eventualmente con lati curvilinei. Quelli quadrangolari consentono, in generale, di ottenere risultati più accurati, a parità di numero di nodi della discretizzazione, rispetto a quelli triangolari e pertanto verranno descritti nel seguito in maniera dettagliata. Verrà fatto, comunque, anche un



**Figura 3.6:** Funzioni di forma degli elementi monodimensionali: (a) elemento lineare; (b) elemento parabolico.

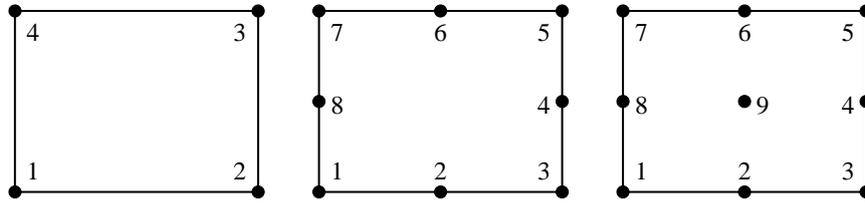
cenno agli elementi triangolari a tre nodi, che vengono spesso utilizzati per la maggior semplicità con cui può venir generata la suddivisione del dominio in elementi (“mesh”).

Gli elementi bidimensionali più semplici sono quelli rettangolari. I più usati sono quelli

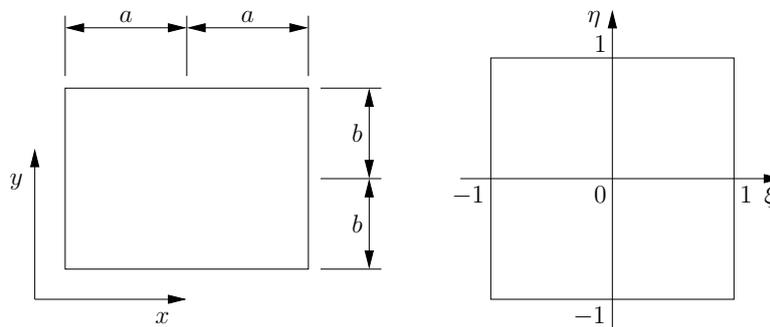
- bilineari a quattro nodi ( $r = 4$ ), tutti situati nei vertici degli angoli;
- parabolici a otto nodi ( $r = 8$ ), quattro situati nei vertici degli angoli e quattro situati lungo i lati, in posizione intermedia.
- parabolici a nove nodi ( $r = 9$ ), quattro situati nei vertici degli angoli, quattro situati lungo i lati, in posizione intermedia, e uno al centro dell’elemento.

Nella Fig. 3.7(a) sono mostrate le posizioni dei nodi negli elementi bidimensionali rettangolari, mentre nella Fig. 3.7(b) vengono illustrate le modalità con cui si intendono definite le coordinate globali e locali. Per consuetudine, nelle numerazione locale, i nodi degli elementi bidimensionali bilineari sono numerati in senso antiorario, partendo da un nodo d’angolo. Per quanto riguarda gli elementi parabolici, invece, sono possibili due approcci alternativi: quello uguale al precedente di numerare consecutivamente i nodi in senso antiorario, partendo da un nodo d’angolo (adottato in questo testo ed illustrato in Fig. 3.7(a)) e quello di numerare, sempre in senso antiorario, prima i nodi d’angolo (numeri da 1 a 4) e poi i nodi sui lati (numeri da 5 a 8). Negli elementi a nove nodi, il nodo centrale viene sempre identificato dal numero 9.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



(a)



(b)

**Figura 3.7:** Elementi bidimensionali: (a) elemento bilineare a quattro nodi (a sinistra), elemento parabolico a otto nodi (al centro) e elemento parabolico a nove nodi (a destra); (b) definizione del sistema di coordinate.

Sebbene sia possibile trovare espressioni delle funzioni di forma in termini di coordinate globali, anche in questo caso conviene fare riferimento a coordinate locali normalizzate, di tipo baricentrico

$$\xi = \frac{x - x_C}{a} \quad \eta = \frac{y - y_C}{b} \quad (3.83)$$

dove  $x_C$  e  $y_C$  sono le coordinate cartesiane del centro dell'elemento e  $a$  e  $b$  sono le semilunghezze dei lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$ , rispettivamente. Ovviamente si ha  $-1 \leq \xi \leq 1$  e  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

Le funzioni di forma per gli elementi bilineari a quattro nodi sono

$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) & N_2^e &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_3^e &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) & N_4^e &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Nella Fig. 3.8 è mostrato l'andamento della generica funzione di forma di un elemento bidimensionale a quattro nodi.

Le funzioni di forma per gli elementi parabolici a otto nodi sono

$$\begin{aligned}
 N_1^e &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-\xi - \eta - 1) & N_2^e &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\
 N_3^e &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1) & N_4^e &= \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\
 N_5^e &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1) & N_6^e &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\
 N_7^e &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1) & N_8^e &= \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Gli andamenti delle funzioni di forma per gli elementi parabolici a otto nodi sono mostrati nella Fig. 3.9.

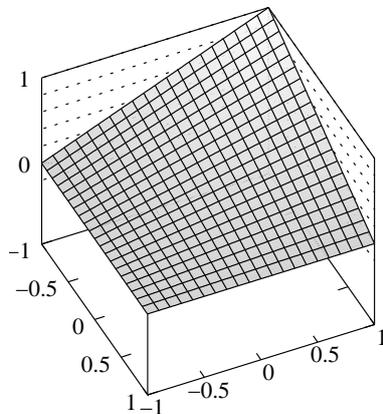
Infine, le funzioni di forma per gli elementi parabolici a nove nodi sono

$$\begin{aligned}
 N_1^e &= \frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 - \eta) & N_2^e &= -\frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\
 N_3^e &= -\frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 - \eta) & N_4^e &= \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\
 N_5^e &= \frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 + \eta) & N_6^e &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\
 N_7^e &= -\frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 + \eta) & N_8^e &= -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) (1 - \eta^2) \\
 N_9^e &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

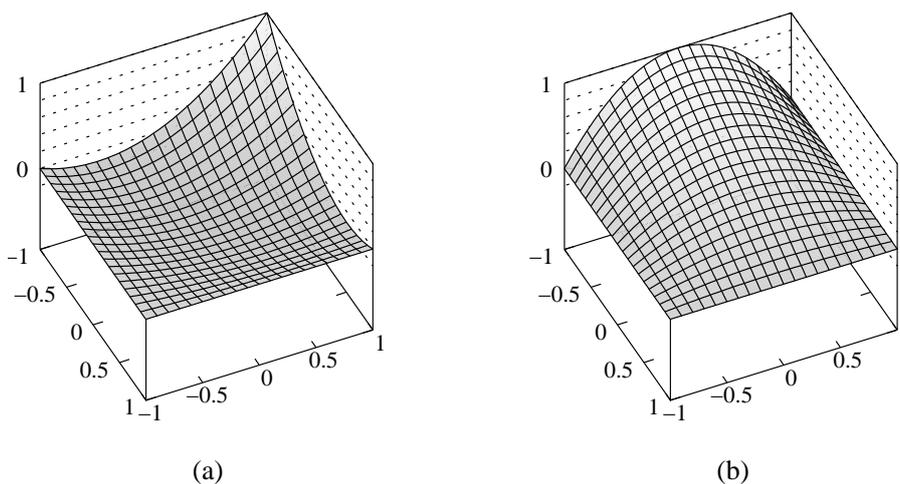
Gli andamenti delle funzioni di forma per gli elementi parabolici a nove nodi sono mostrati nella Fig. 3.10.

Nei problemi tridimensionali vengono utilizzati elementi a otto, venti o ventisette nodi, con una netta prevalenza dei primi, che sono trilineari, rispetto agli altri, che sono parabolici. Ovviamente, le funzioni di forma sono più complesse e, per brevità, non vengono qui riportate. Tuttavia, si tratta di difficoltà di tipo puramente matematico, perché, da un punto di vista concettuale nulla cambia rispetto a quanto sopra esposto.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



**Figura 3.8:** Generica funzione di forma di un elemento bidimensionale a quattro nodi.

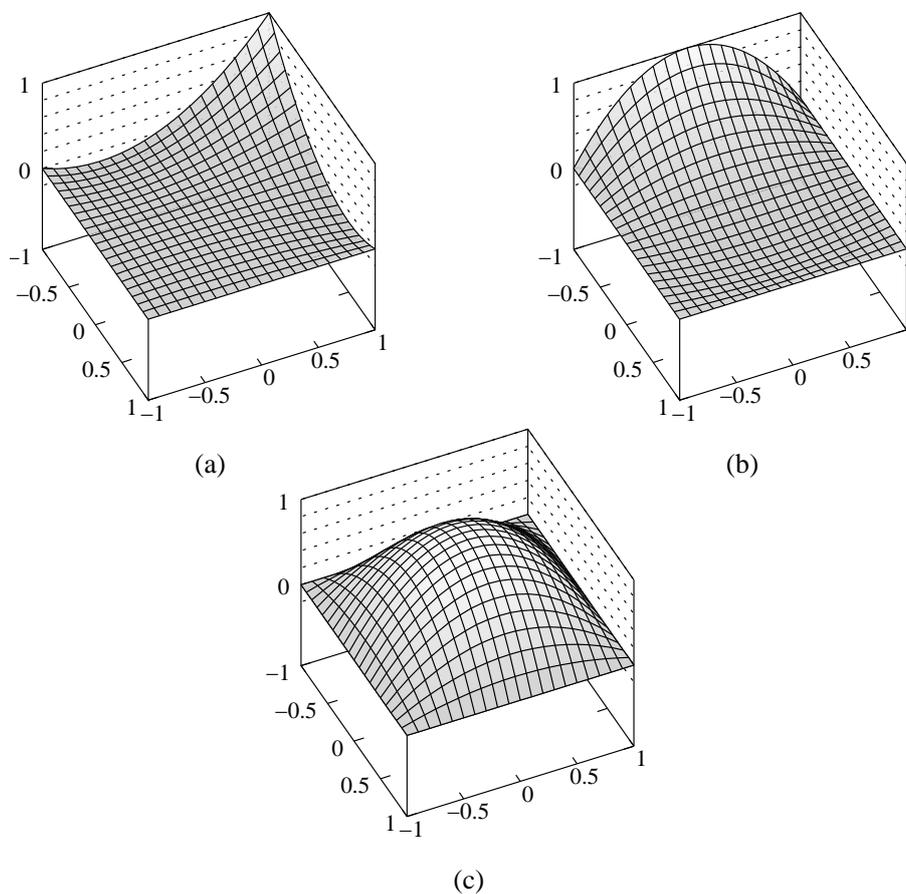


**Figura 3.9:** Generiche funzioni di forma di un elemento bidimensionale a otto nodi: (a) nodo d'angolo; (b) nodo sul lato.

### 3.6 MAPPATURA DEGLI ELEMENTI

La valutazione analitica degli integrali presenti nelle espressioni delle matrici e dei vettori che si ottengono dall'applicazione del metodo di Galerkin risulta particolarmente semplice nel caso di elementi monodimensionali o di elementi bidimensionali rettangolari con lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$ . A titolo di esempio, sono riportati nell'Appendice di questo capitolo, al Paragrafo 3.11.2, le espressioni delle matrici di

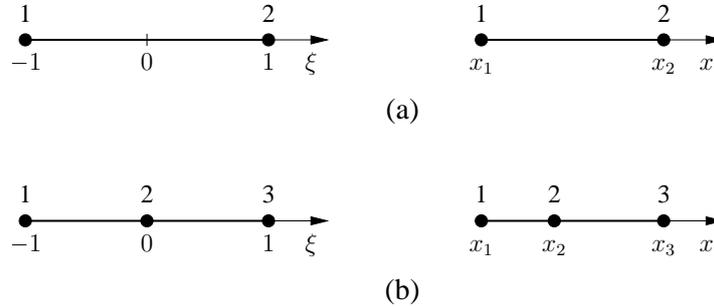
### 3.6. MAPPATURA DEGLI ELEMENTI



**Figura 3.10:** Generiche funzioni di forma di un elemento bidimensionale a nove nodi: (a) nodo d'angolo; (b) nodo sul lato; (c) nodo centrale.

capacità, conduzione e advezione di elementi monodimensionali a due nodi e bidimensionali rettangolari a quattro nodi. Tuttavia, poichè gli elementi sopra citati non consentono di discretizzare adeguatamente domini complessi, è molto spesso necessario ricorrere ad una suddivisione del dominio mediante elementi distorti. Questo tipo di suddivisione, che, ovviamente, deve essere tale da non lasciare nè buchi nè produrre sovrapposizioni, richiede, però, una mappatura degli elementi. Gli integrali dovranno, poi, essere valutati numericamente. Vale, inoltre, la pena notare che anche per gli elementi monodimensionali è spesso conveniente procedere ad una mappatura onde poter operare in coordinate normalizzate, sfruttando le espressioni delle funzioni di forma (3.81) e (3.82) e le tecniche di integrazione numerica che verranno illustrate in seguito.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



**Figura 3.11:** Mappatura di un elemento monodimensionale: (a) elemento a due nodi; (b) elemento a tre nodi.

Con il metodo degli elementi finiti, la mappatura viene fatta elemento per elemento, e non per l'intero dominio come con altri metodi numerici. Ogni elemento nel dominio reale, cioè definito nello spazio  $(x)$ , in una dimensione, o  $(x,y)$ , in due dimensioni, viene ottenuto con una mappatura, a partire da un elemento “genitore” (“parent element”) definito nello spazio  $(\xi)$  o  $(\xi,\eta)$ . L'elemento genitore ha lo stesso numero di nodi dell'elemento reale ed è, in una dimensione, un segmento di lunghezza 2, con  $-1 \leq \xi \leq 1$ , oppure, in due dimensioni, un quadrato di lati  $2 \times 2$ , con  $-1 \leq \xi \leq 1$  e  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Pertanto, la trasformazione sarà del tipo  $(\xi) \mapsto (x)$ , con  $x = x(\xi)$ , o  $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$ , con  $x = x(\xi,\eta)$  e  $y = y(\xi,\eta)$ , definita elemento per elemento, come illustrato nelle Figure 3.11 e 3.12.

Per ogni elemento, con riferimento a  $\bar{r}$  punti (di coordinate  $x_j$  in una dimensione, o  $(x_j, y_j)$  in due dimensioni) non necessariamente coincidenti con i nodi, viene stabilita una corrispondenza tra coordinate locali e globali nel seguente modo:

- per elementi monodimensionali

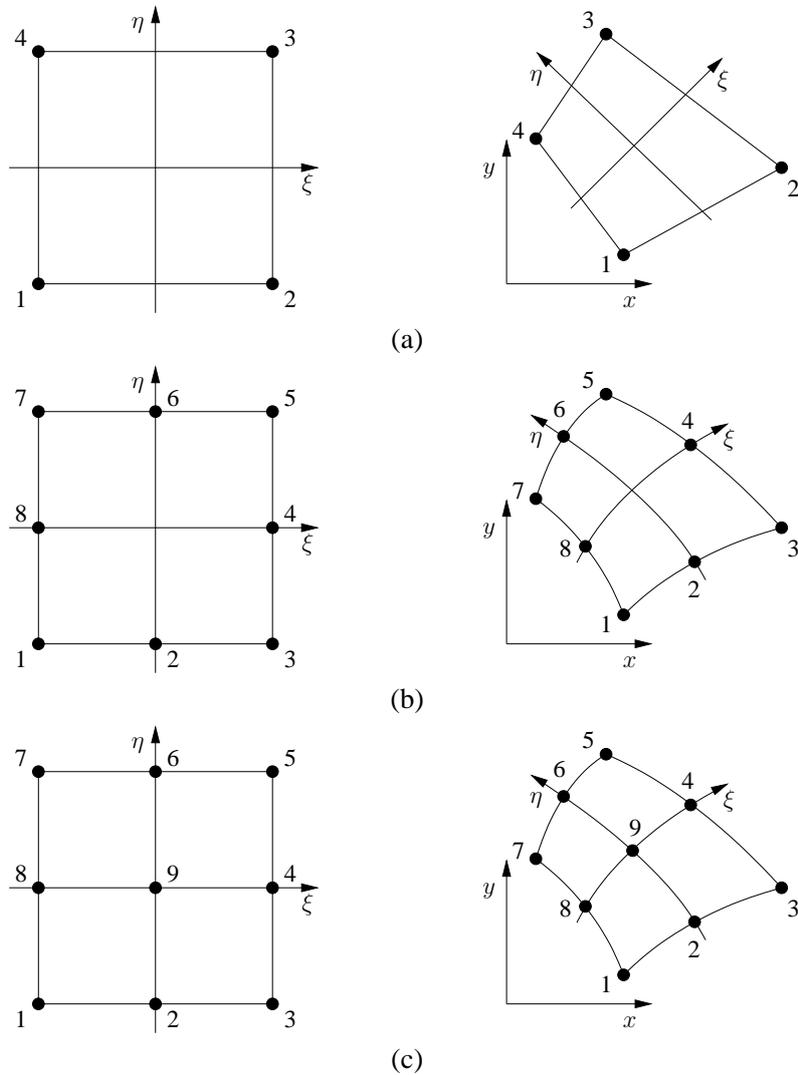
$$x(\xi) = \bar{N}_1^e(\xi) x_1^e + \cdots + \bar{N}_{\bar{r}}^e(\xi) x_{\bar{r}}^e = \sum_{j=1}^{\bar{r}} \bar{N}_j^e(\xi) x_j^e \quad (3.87)$$

- per elementi bidimensionali

$$x(\xi,\eta) = \bar{N}_1^e(\xi,\eta) x_1^e + \cdots + \bar{N}_{\bar{r}}^e(\xi,\eta) x_{\bar{r}}^e = \sum_{j=1}^{\bar{r}} \bar{N}_j^e(\xi,\eta) x_j^e \quad (3.88)$$

$$y(\xi,\eta) = \bar{N}_1^e(\xi,\eta) y_1^e + \cdots + \bar{N}_{\bar{r}}^e(\xi,\eta) y_{\bar{r}}^e = \sum_{j=1}^{\bar{r}} \bar{N}_j^e(\xi,\eta) y_j^e$$

### 3.6. MAPPATURA DEGLI ELEMENTI



**Figura 3.12:** Mappatura degli elementi bidimensionali: (a) elemento bilineare a quattro nodi; (b) elemento parabolico a otto nodi; (c) elemento parabolico a nove nodi.

dove le  $\bar{N}_j^e$  sono opportune funzioni di forma per la mappatura, non necessariamente coincidenti con quelle utilizzate per l'interpolazione dell'incognita.

Risulta però particolarmente conveniente scegliere  $\bar{r} = r$  e

$$\bar{N}_j^e(\xi) = N_j^e(\xi) \quad (3.89)$$

$$\bar{N}_j^e(\xi, \eta) = N_j^e(\xi, \eta) \quad (3.90)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

---

In questo caso gli elementi vengono detti isoparametrici e i punti utilizzati per la mappatura coincidono con i nodi. Gli elementi isoparametrici presentano alcune caratteristiche molto interessanti:

- evitano la necessità di dover manipolare due insiemi di funzioni di forma, uno per l'interpolazione dell'incognita e uno per la mappatura;
- garantiscono che non ci siano buchi o sovrapposizioni tra gli elementi distorti del dominio reale (questa proprietà è detta "conformability");
- garantiscono che sia preservata la continuità dell'approssimazione  $\tilde{t}$  tra elementi adiacenti (questa proprietà è detta "compatibility");
- garantiscono che siano rappresentati esattamente, anche negli elementi distorti, sia andamenti costanti sia lineari di  $\tilde{t}$ .

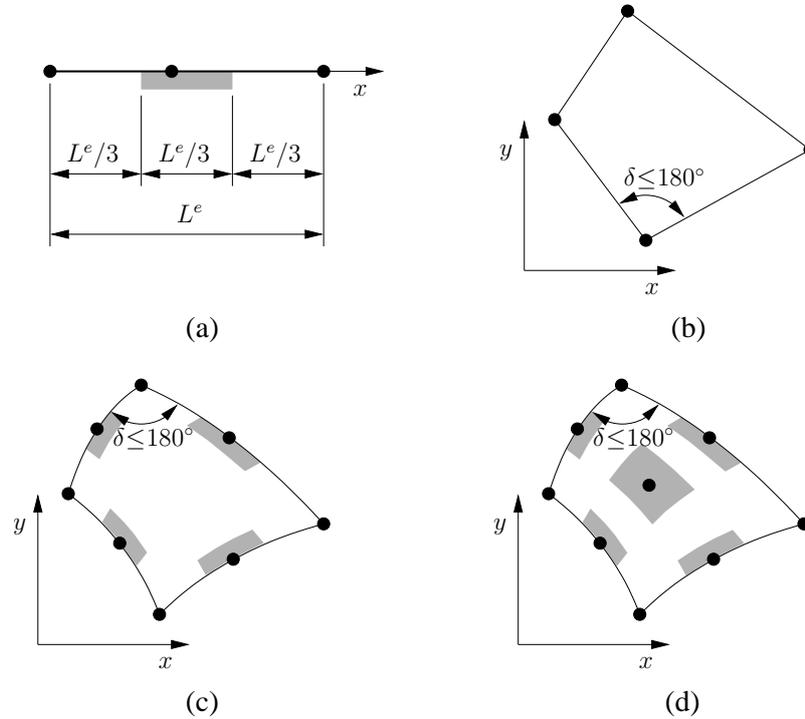
Per fare in modo che la mappatura sia veramente uno a uno, cioè, che ci sia una corrispondenza biunivoca tra i punti nell'elemento genitore e in quello reale, è necessario evitare distorsioni eccessive degli elementi. Le regole da rispettare, illustrate nella Fig. 3.13, sono:

- negli elementi bidimensionali, bilineari o parabolici, gli angoli tra i lati devono sempre essere inferiori a  $180^\circ$ .
- negli elementi parabolici, i nodi intermedi devono essere situati nella parte centrale degli elementi monodimensionali o dei lati di quelli bidimensionali, in una zona di ampiezza, evidenziata in grigio in Fig. 3.13, pari a circa  $1/3$  della lunghezza dell'elemento o del lato; una regola analoga vale per il nodo centrale degli elementi a nove nodi.

#### 3.6.1 Trasformazione isoparametrica

La trasformazione di coordinate fatta utilizzando gli elementi isoparametrici introdotti nel paragrafo precedente prende il nome di trasformazione isoparametrica. Per ogni punto del piano  $(x,y)$  appartenente a un elemento isoparametrico valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^r N_j^e x_j^e \\y &= \sum_{i=1}^r N_j^e y_j^e\end{aligned}\tag{3.91}$$



**Figura 3.13:** Regole per garantire la biunivocità della mappatura: (a) elementi monodimensionali parabolici a tre nodi; (b) elementi bilineari a quattro nodi; (c) elementi bidimensionali parabolici a otto nodi; (d) elementi bidimensionali parabolici a nove nodi.

che si riducono alla prima delle (3.91) se il punto appartiene a un dominio monodimensionale parallelo all'asse  $x$ . In questo caso, le derivate cartesiane delle funzioni di forma di un elemento isoparametrico monodimensionale possono esse ricavate ricordando che

$$N_i^e(\xi) = N_i^e[x(\xi)] \quad (3.92)$$

e applicando le regole di derivazione delle funzioni di funzione

$$\frac{dN_i^e}{d\xi} = \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dx}{d\xi} \quad (3.93)$$

Quindi si ottiene

$$\frac{dN_i^e}{dx} = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dN_i^e}{d\xi} \quad (3.94)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

dove

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^r \frac{dN_i^e}{d\xi} x_i^e \quad (3.95)$$

L'espressione per le derivate cartesiane delle funzioni di forma di un elemento isoparametrico bidimensionale possono esse ricavate ricordando che

$$N_i^e(\xi, \eta) = N_i^e[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (3.96)$$

Quindi, applicando le regole di derivazione delle funzioni di funzione si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.97)$$

che, in forma matriciale, diventa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

dove  $\mathbf{J}(\xi, \eta)$  è la matrice Jacobiana i cui elementi sono

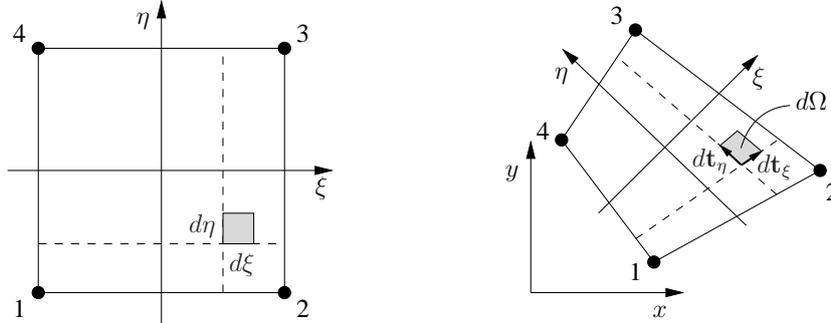
$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^r \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} x_j^e = J_{11} & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^r \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} x_j^e = J_{21} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^r \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} y_j^e = J_{12} & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^r \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} y_j^e = J_{22} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Pertanto, le derivate cartesiane delle funzioni di forma possono essere calcolate invertendo la matrice Jacobiana nell'Eq. (3.98)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

dove

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (3.101)$$



**Figura 3.14:** Relazione tra aree infinitesime nell'elemento genitore e in quello reale.

Per valutare gli integrali che risultano dall'applicazione del metodo di Galerkin è necessario calcolare le aree e le lunghezze infinitesime  $d\Omega$  e  $dS$  in termini di coordinate locali  $\xi$  e  $\eta$ . A questo scopo, è sufficiente tenere presente che, in un elemento monodimensionale parallelo all'asse  $x$ ,  $d\Omega$  è una lunghezza infinitesima

$$d\Omega = dx = \left( \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi = \left( \sum_{j=1}^r \frac{dN_j^e}{d\xi} x_j^e \right) d\xi \quad (3.102)$$

mentre in un elemento bidimensionale,  $d\Omega$  è un'area infinitesima corrispondente all'area infinitesima  $d\xi d\eta$  nell'elemento genitore, come illustrato in Fig. 3.14. Essa può essere considerata approssimativamente uguale all'area del parallelogramma elementare individuato dai due vettori infinitesimi  $d\mathbf{t}_\xi = \mathbf{t}_\xi d\xi$  e  $d\mathbf{t}_\eta = \mathbf{t}_\eta d\eta$ , in cui  $\mathbf{t}_\xi$  e  $\mathbf{t}_\eta$  sono i vettori tangenti alle linee, rispettivamente, a  $\xi$  e  $\eta$  costanti e sono definiti come

$$\mathbf{t}_\xi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t}_\eta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

Poiché l'area di un parallelogramma è uguale al modulo del prodotto dei due vettori che lo identificano, si può scrivere  $d\Omega = |d\mathbf{t}_\xi \times d\mathbf{t}_\eta| = |\mathbf{t}_\xi \times \mathbf{t}_\eta| d\xi d\eta$ . Poi, ricordando che

$$|\mathbf{t}_\xi \times \mathbf{t}_\eta| = \text{abs} \left( \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \right) = |\det \mathbf{J}| \quad (3.104)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

si può scrivere

$$d\Omega = \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (3.105)$$

dove  $\det \mathbf{J}$  è dato dall'Eq. (3.101) e il simbolo di valore assoluto è stato omissso perché, se i sistemi di coordinate locali  $(\xi, \eta)$  e di coordinate globali  $(x, y)$  sono equiorientati, lo Jacobiano risulta automaticamente positivo, a meno che gli elementi non siano eccessivamente distorti. Con le definizioni delle funzioni di forma riportate al Paragrafo 3.5, i sistemi di coordinate risultano equiorientati se, nella descrizione degli elementi reali, i nodi vengono listati

- secondo la direzione positiva della coordinata globale, nel caso degli elementi monodimensionali;
- in senso antiorario, partendo da un nodo d'angolo, nel caso degli elementi bidimensionali, come nell'esempio mostrato in Fig. 3.3.

L'equazione (3.105) fornisce anche indicazioni sul significato dello Jacobiano della trasformazione, che può essere interpretato come il valore del rapporto tra un'area infinitesima nell'elemento reale e la corrispondente area infinitesima nell'elemento genitore.

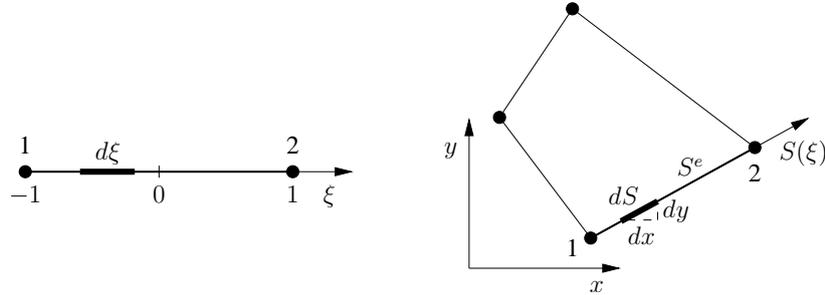
Infine, sempre in un elemento bidimensionale, ogni lato del contorno corrisponde ad un elemento monodimensionale come illustrato nella Fig. 3.15, mentre  $dS$  è una lunghezza infinitesima definita sul contorno dell'elemento stesso. Interpretando  $S$  come una coordinata curvilinea globale tale per cui si abbia  $x(S) = x[S(\xi)] = x(\xi)$  e  $y(S) = y[S(\xi)] = y(\xi)$ , si può scrivere

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad (3.106)$$

dove

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum_{j=1}^r \frac{dN_j^e}{d\xi} x_j^e \quad \frac{dy}{d\xi} = \sum_{j=1}^r \frac{dN_j^e}{d\xi} y_j^e \quad (3.107)$$

L'estensione dei concetti precedentemente esposti al caso di elementi tridimensionali presenta difficoltà legate solamente alla maggior complicazione matematica. Per brevità, quindi, le espressioni delle derivate cartesiane delle funzioni di forma e le espressioni delle superfici e dei volumi infinitesimi  $dS$  e  $d\Omega$  non vengono riportati.



**Figura 3.15:** Esempio di elemento monodimensionale corrispondente ad un lato del contorno di un elemento bidimensionale.

### 3.7 INTEGRAZIONE NUMERICA

Gli integrali che risultano dall'applicazione del metodo di Galerkin, per effetto della proprietà descritta dall'Eq. (3.44), comportano l'integrazione di funzioni del tipo  $f(x)$  o  $f(x,y)$  su domini monodimensionali  $\Omega^e$  o  $S^e$ , costituiti dagli elementi monodimensionali o dai contorni degli elementi bidimensionali, oppure di funzioni del tipo  $F(x,y)$  su domini bidimensionali  $\Omega^e$ , costituiti dagli elementi bidimensionali. Grazie alla mappatura introdotta al paragrafo precedente, tali integrali possono essere valutati con riferimento all'elemento genitore, mono- o bidimensionale.

Nel caso di elementi monodimensionali paralleli all'asse  $x$ , tenendo conto dell'Eq. (3.102), si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega^e} f(x) d\Omega = \int_{\Omega^e} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f[x(\xi)] \left( \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.108)$$

mentre, nel caso di elementi bidimensionali, tenendo conto dell'Eq. (3.105), si ha

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega^e} F(x,y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi,\eta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi,\eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.109)$$

Infine, nel caso di contorni di elementi bidimensionali, ricordando che  $S = S(\xi)$ ,

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

$x = x[S(\xi)]$  e  $y = y[S(\xi)]$  e tenendo conto dell'Eq. (3.106), si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S^e} f(x,y) dS = \int_{S^e} f[x(S),y(S)] dS = \int_{S^e} f(S) dS \\ &= \int_{-1}^1 f(\xi) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.110)$$

Gli integrali precedenti, in genere, non sono valutabili analiticamente e, pertanto, è necessario ricorrere a tecniche di integrazione di tipo numerico. Una trattazione approfondita sui diversi metodi utilizzabili può essere facilmente reperita nei testi di analisi numerica, mentre qui verrà brevemente illustrata solamente la tecnica che risulta essere la più adatta per la valutazione degli integrali che si ottengono dalla applicazione del metodo di Galerkin. Si tratta del metodo di Gauss, in base al quale l'integrale viene approssimato tramite la somma dei valori della funzione integranda in un certo numero  $p$  di punti di integrazione, moltiplicati per opportuni fattori di pesata  $w_i$  relativi agli stessi punti.

Per le integrazioni in una dimensione, la formula di integrazione può essere scritta come

$$I_1 = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \cong \sum_{k=1}^p g(\xi_k) w_k \quad (3.111)$$

dove  $\xi_k$  è la coordinata locale del punto di integrazione  $k$ -esimo. Si può dimostrare che utilizzando  $p$  punti di integrazione si integra esattamente un polinomio di grado minore o uguale a  $(2p - 1)$ . Ovviamente, più elevato è il numero di punti di integrazione, migliore è l'accuratezza ottenibile nella valutazione dell'integrale di una funzione generica. Tuttavia cresce di pari passo anche l'onere di calcolo.

Il valore ottimale del numero di punti di integrazione  $p$  normalmente viene correlato empiricamente all'ordine  $P$  degli elementi usati assumendo

$$p = P + 1 \quad (3.112)$$

cioè,  $p = 2$  con elementi lineari ( $P = 1$ ) e  $p = 3$  con elementi parabolici ( $P = 2$ ). I pesi e le coordinate locali dei punti di integrazione sono riportati nella Tabella 4.1.

Per le integrazioni in due dimensioni, la formula di integrazione può essere ottenuta combinando quelle per le integrazioni in una dimensione

$$I_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi,\eta) d\xi d\eta \cong \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p G(\xi_k,\eta_l) w_k w_l \quad (3.113)$$

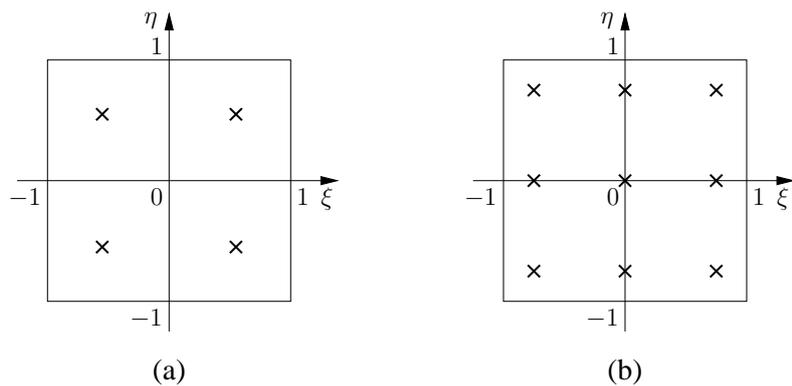
Tabella 4.1 Pesì e coordinate locali dei punti di Gauss.

$p$	$k$	$\xi_k$	$w_k$
2	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	1	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	2	0	$\frac{8}{9}$
	3	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

dove  $(\xi_k, \eta)$  sono le coordinate locali del punto di integrazione  $(k, l)$ .

Per integrazioni in più di una dimensione, l'Eq. (3.112) deve essere utilizzata per stabilire il numero di punti in ciascuna direzione. In due dimensioni, pertanto, si utilizzano, rispettivamente,  $2 \times 2 = 4$  e  $3 \times 3 = 9$  punti con elementi bilineari e elementi parabolici. Nella Fig. 3.16 sono mostrate le posizioni dei punti di integrazione in un elemento genitore bidimensionale per  $p = 2$  e  $p = 3$ .

L'estensione della procedura di integrazione sopra esposta al caso tridimensionale



**Figura 3.16:** Posizioni dei punti di integrazione in un elemento genitore bidimensionale: (a)  $2 \times 2$  punti di integrazione ( $p = 2$ ); (b)  $3 \times 3$  punti di integrazione ( $p = 3$ ).

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

è banale e si useranno 2 o 3 punti di integrazione in ogni direzione, rispettivamente, per gli elementi trilineari a otto nodi e per quelli parabolici a venti o ventisette nodi. In totale si avrà, quindi,  $2 \times 2 \times 2 = 8$  punti per  $p = 2$  e  $3 \times 3 \times 3 = 27$  punti per  $p = 3$ .

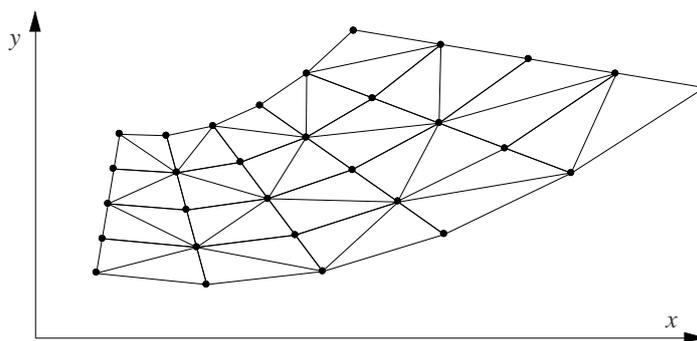
## 3.8 ELEMENTI TRIANGOLARI

Nella soluzione di problemi bidimensionali, oltre che elementi quadrangolari è possibile utilizzare elementi triangolari a tre nodi. Infatti, come già accennato, tali elementi sono talvolta preferiti perché permettono una più agevole generazione della griglia quando è necessario discretizzare domini di forma complessa. Tuttavia, in generale, almeno nella soluzione di problemi di termofluidodinamica, consentono di ottenere risultati meno accurati di quelli che si possono ottenere con elementi quadrangolari, a parità di numero di nodi totali della discretizzazione. Inoltre, osservando la Fig. 3.17 in cui è riportata, a titolo di esempio, la suddivisione in elementi finiti triangolari a tre nodi dello stesso dominio considerato nella Fig. 3.1, si può facilmente notare che, parità di numero di nodi, la suddivisione in triangoli richiede un numero doppio di elementi.

Anche nel caso di elementi triangolari a tre nodi, può essere scritta, per la variabile incognita, una approssimazione del tipo

$$t \cong \tilde{t}^e = N_1^e t_1^e + N_2^e t_2^e + N_3^e t_3^e \quad (3.114)$$

Tuttavia, con gli elementi triangolari a tre nodi, è possibile utilizzare funzioni di forma definite in termini di coordinate globali, in contrapposizione a quelle definite in termini di coordinate locali normalizzate, di solito utilizzate con gli elementi



**Figura 3.17:** Esempio di suddivisione di un dominio in elementi finiti triangolari a tre nodi.

### 3.8. ELEMENTI TRIANGOLARI

quadrangolari. Le espressioni per le funzioni di forma  $N_i^e$  possono essere ricavate osservando che la variabile incognita all'interno di ogni elemento viene approssimata da una funzione lineare bidimensionale

$$t \cong \tilde{t}^e = a^e + b^e x + c^e y \quad (3.115)$$

e che, inoltre, nei nodi deve valere

$$\begin{cases} t_1^e = a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \\ t_2^e = a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \\ t_3^e = a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \end{cases} \quad (3.116)$$

Dall'equazione precedente si possono ricavare le espressioni di  $a^e$ ,  $b^e$ , e  $c^e$

$$\begin{aligned} a^e &= \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_1^e t_1^e + \alpha_2^e t_2^e + \alpha_3^e t_3^e) \\ b^e &= \frac{1}{2\Omega^e} (\beta_1^e t_1^e + \beta_2^e t_2^e + \beta_3^e t_3^e) \\ c^e &= \frac{1}{2\Omega^e} (\gamma_1^e t_1^e + \gamma_2^e t_2^e + \gamma_3^e t_3^e) \end{aligned} \quad (3.117)$$

dove i coefficienti

$$\begin{aligned} \alpha_1^e &= x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e ; & \alpha_2^e &= x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e ; & \alpha_3^e &= x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e \\ \beta_1^e &= y_2^e - y_3^e ; & \beta_2^e &= y_3^e - y_1^e ; & \beta_3^e &= y_1^e - y_2^e \\ \gamma_1^e &= x_3^e - x_2^e ; & \gamma_2^e &= x_1^e - x_3^e ; & \gamma_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned}$$

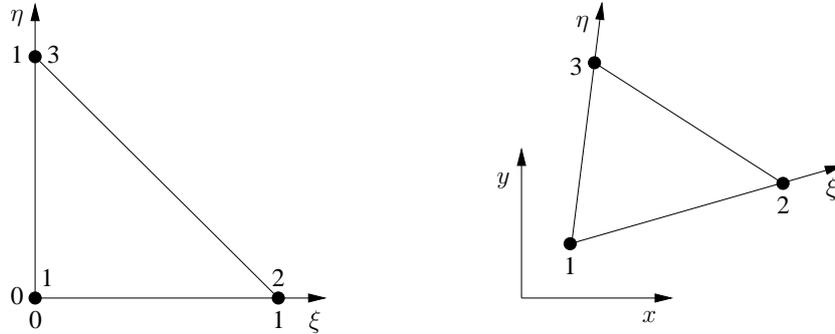
e l'area dell'elemento

$$\Omega^e = \frac{1}{2} (\beta_2^e \gamma_3^e - \beta_3^e \gamma_2^e) \quad (3.118)$$

sono esprimibili in termini di coordinate cartesiane dei nodi. Sostituendo nell'Eq. (3.115) le espressioni dei coefficienti  $a^e$ ,  $b^e$ , e  $c^e$  date dalle equazioni da (3.117) a (3.118), e confrontando il risultato con l'Eq. (3.114), si ottengono le seguenti espressioni per le funzioni di forma

$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x + \gamma_1^e y) \\ N_2^e &= \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x + \gamma_2^e y) \\ N_3^e &= \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_3^e + \beta_3^e x + \gamma_3^e y) \end{aligned} \quad (3.119)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



**Figura 3.18:** Mappatura di un elemento bidimensionale triangolare a tre nodi.

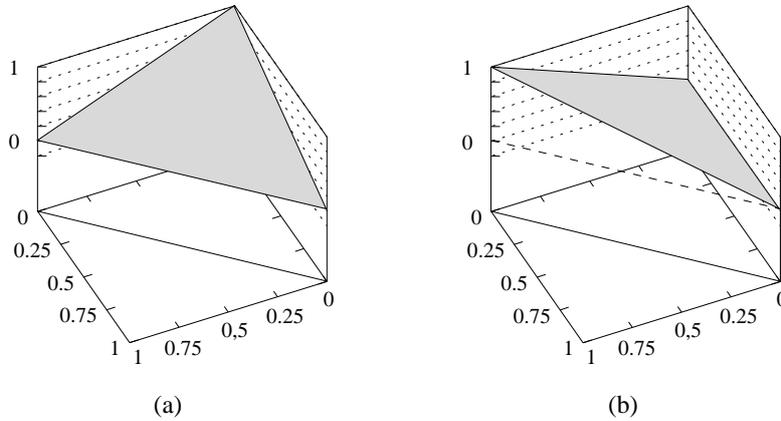
Una caratteristica importante degli elementi triangolari a tre nodi è rappresentata dalla possibilità, quando le proprietà termofisiche sono costanti nell'elemento, di valutare analiticamente gli integrali che risultano dall'applicazione del metodo di Galerkin. Tuttavia, anche con gli elementi triangolari lineari risulta spesso vantaggioso fare riferimento all'elemento genitore perché ciò consente di calcolare le funzioni di forma solamente una volta (per l'elemento genitore) e di eseguire per via numerica le integrazioni se queste non possono essere eseguite analiticamente, come, ad esempio, nel caso di proprietà termofisiche non costanti.

L'elemento genitore (triangolo di riferimento) è costituito da un triangolo rettangolo isoscele con vertici  $(\xi_1, \eta_1) = (0,0)$ ,  $(\xi_2, \eta_2) = (1,0)$  e  $(\xi_3, \eta_3) = (0,1)$ , come mostrato in Fig. 3.18, dove si vede chiaramente che le linee  $\xi = 0$  e  $\eta = 0$  corrispondono, rispettivamente, ai lati 1-3 e 1-2 dell'elemento reale. Nelle coordinate del triangolo di riferimento, le funzioni di forma diventano

$$N_1^e = 1 - \xi - \eta \quad N_2^e = \xi \quad N_3^e = \eta \quad (3.120)$$

e, con riferimento al nodo posto nel vertice dell'angolo retto e ad uno di quelli posti nei vertici degli angoli a  $45^\circ$  sono mostrate in Fig. 3.19. La trasformazione di coordinate è ancora espressa dall'Eq. (3.91), ma con  $r = 3$ . Ovviamente, come nel caso degli elementi quadrangolari, la valutazione degli elementi delle matrici e dei vettori richiesta dall'applicazione del metodo di Galerkin comporta che si debba calcolare la matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate, che per un elemento triangolare lineare a tre nodi è uguale a

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_2^e - x_1^e & x_3^e - x_1^e \\ y_2^e - y_1^e & y_3^e - y_1^e \end{bmatrix} \quad (3.121)$$



**Figura 3.19:** Funzioni di forma dell'elemento bidimensionale di riferimento a tre nodi: (a) nodo al vertice dell'angolo retto; (b) nodo al vertice di uno degli angoli a  $45^\circ$ .

Siccome i coefficienti della matrice sono indipendenti da  $x$  e  $y$ , lo Jacobiano assume un valore costante in tutti i punti dell'elemento e rappresenta il rapporto tra l'area dell'elemento reale e quella dell'elemento genitore.

Da un punto di vista analitico, con gli elementi triangolari è spesso conveniente utilizzare un sistema di coordinate ridondanti dette coordinate di area (o coordinate triangolari) perché, in questo modo, risultano semplificate sia la definizione delle funzioni di forma, in particolare per gli elementi di ordine superiore al primo, sia le integrazioni sull'elemento. Le coordinate di area di un generico punto  $P$  all'interno di un elemento triangolare come quello mostrato nella Fig. 3.20(a) sono

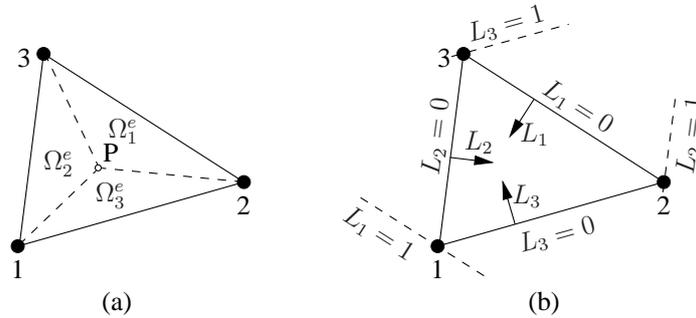
$$L_1 = \frac{\Omega_1^e}{\Omega^e} \quad L_2 = \frac{\Omega_2^e}{\Omega^e} \quad L_3 = \frac{\Omega_3^e}{\Omega^e} \quad (3.122)$$

dove  $\Omega_1^e$ ,  $\Omega_2^e$  e  $\Omega_3^e$  sono le aree dei triangoli con un vertice nel punto  $P$  e un lato opposto, rispettivamente, ai nodi 1, 2 e 3. Pertanto, il sistema di coordinate è definito come in Fig. 3.20(b) e le coordinate di area  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  hanno valore unitario nei nodi 1, 2 e 3 e assumono valore nullo lungo i lati, nell'ordine, 2-3, 3-1 e 1-2, mentre altre linee, parallele agli stessi lati sono caratterizzate da valori costanti delle coordinate.

Chiaramente le tre coordinate non sono indipendenti l'una dall'altra in quanto deve valere  $\Omega_1^e + \Omega_2^e + \Omega_3^e = \Omega^e$  e, quindi

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.123)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI



**Figura 3.20:** Coordinate di area per l'elemento bidimensionale a tre nodi: (a) triangoli corrispondenti alle tre coordinate; (b) definizione del sistema di coordinate.

Le coordinate  $(x,y)$  del punto P sono legate alle coordinate di area dalle relazioni

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1^e + L_2 x_2^e + L_3 x_3^e \\ y &= L_1 y_1^e + L_2 y_2^e + L_3 y_3^e \end{aligned} \quad (3.124)$$

le quali, se confrontate con l'Eq. (3.114), consentono di concludere che le coordinate di area devono essere uguali alle funzioni di forma, cioè, che  $L_1 = N_1^e$ ,  $L_2 = N_2^e$  e  $L_3 = N_3^e$ , e, vista l'Eq. (3.120), anche che

$$L_1 = 1 - \xi - \eta \quad L_2 = \xi \quad L_3 = \eta \quad (3.125)$$

L'uso delle coordinate di area risulta particolarmente conveniente anche per il calcolo degli integrali sull'elemento perché si può dimostrare che, data una funzione del tipo  $f(L_1, L_2, L_3) = L_1^a L_2^b L_3^c$ , dove  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono esponenti interi positivi, vale la seguente relazione esatta

$$\int_{\Omega^e} L_1^a L_2^b L_3^c d\Omega = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2\Omega^e \quad (3.126)$$

la quale va applicata ricordando che  $0! = 1$ . Se non risulta possibile o, comunque, conveniente applicare la precedente relazione, gli integrali sull'elemento possono essere calcolati per via numerica applicando il metodo di Gauss con riferimento all'elemento genitore, in maniera analoga a quella vista per gli elementi quadrangolari. Si utilizzano relazioni simili a quelle riportate nel Paragrafo 3.7, con, ovviamente delle differenze di dettaglio dovute alla forma triangolare degli elementi. Si rimanda ai testi specializzati per una trattazione approfondita dell'argomento.

### 3.9. SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI

Talvolta vengono utilizzati elementi triangolari di ordine superiore al primo, eventualmente con lati curvilinei. Particolarmente utili sono gli elementi triangolari del secondo ordine (quadratici), che hanno sei nodi, tre ai vertici come quelli lineari e tre in posizione intermedia, lungo i lati. Vale, inoltre, la pena notare che, in alcuni casi, è opportuno realizzare griglie ibride, costituite in parte da elementi triangolari ed in parte da elementi quadrangolari. Questo approccio è particolarmente indicato nella soluzione di problemi di deflusso in geometrie complesse in quanto risulta così possibile discretizzare con elementi quadrangolari allungati nella direzione del deflusso le zone del dominio in prossimità delle pareti solide, dove si sviluppano gli strati limite, e poi trarre il vantaggio dalla flessibilità degli elementi triangolari nella discretizzazione delle altre parti del dominio. Si ricorda, infine, che gli elementi tridimensionali corrispondenti ai bidimensionali triangolari sono quelli tetraedrici, la cui trattazione, però, al pari di quella relativa agli elementi triangolari bidimensionali di ordine superiore sopra citati, viene qui omessa.

### 3.9 SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI

Il metodo degli elementi finiti, nella formulazione ai residui pesati, viene utilizzato comunemente nella soluzione dei problemi di termofluidodinamica in cui è necessario risolvere anche le equazioni di Navier-Stokes. Come si è visto nei paragrafi precedenti, scelte diverse delle funzioni di pesata caratterizzano le differenti versioni del metodo e consentono, quando è opportuno, di introdurre effetti di “upwinding”. Qualunque sia la scelta delle funzioni di pesata, la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes precede la soluzione dell’equazione dell’energia. A loro volta, i sistemi di equazioni algebriche ottenuti dall’applicazione dei metodi di Galerkin alle equazioni di Navier-Stokes che governano il deflusso di fluidi incomprimibili possono venir risolti simultaneamente, per tutte le variabili, oppure in forma sequenziale, prendendo in considerazione una variabile dopo l’altra. Storicamente, i codici agli elementi finiti hanno dato la preferenza all’approccio integrato, in analogia a quanto si fa nei problemi strutturali. In questo modo, si conseguono dei vantaggi in termini di stabilità soprattutto per valori elevati del numero di Reynolds. Tuttavia, le soluzioni integrate diventano eccessivamente onerose con l’aumentare del numero di punti di calcolo e man mano che cresce il numero delle variabili del problema. Per questo motivo si preferisce utilizzare quasi sempre, anche con gli elementi finiti, procedimenti di calcolo sequenziali, cosiddetti di tipo “projection”, come quelli descritti nel Capitolo 1, Paragrafo 1.7.

Nei procedimenti di soluzione integrati, le equazioni ottenute dalla discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes e della continuità sono considerate un sistema unico

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

---

di equazioni algebriche e vengono risolte simultaneamente per tutte le variabili. Nella Fig. 3.21(a) è mostrata la struttura del sistema di equazioni algebriche lineari che si ottengono nel caso di problemi bidimensionali. Se  $n$  è il numero di nodi della griglia, la matrice ha dimensioni  $3n \times 3n$ , mentre i vettori hanno dimensione  $3n$ . È importante notare che, mentre le sottomatrici  $\mathbf{H}_v^u$  e  $\mathbf{H}_u^v$ , di dimensioni  $n \times n$ , possono essere nulle o meno a seconda che alcuni termini del tensore degli sforzi nelle equazioni di Navier-Stokes siano stati semplificati utilizzando l'equazione di continuità oppure no, la sottomatrice di dimensioni  $n \times n$  in basso a destra è sempre nulla e ciò comporta la presenza di zeri sulla diagonale principale.

Nella soluzione di un problema in regime transitorio, sono sempre necessari molti passi di integrazione temporale, mentre nella soluzione di problemi in regime stazionario, a causa della non linearità delle equazioni, è, in genere, necessario ricorrere a procedimenti di tipo iterativo. Come si è già rilevato, poichè ad ogni iterazione o ad in ogni passo temporale, tutte le velocità e le pressioni incognite sono calcolate simultaneamente, ne risulta un procedimento stabile anche per numeri di Reynolds elevati ed una strategia di soluzione del tutto simile a quella tradizionalmente impiegata nei codici per l'analisi strutturale. Però, a causa dei molti valori nulli sulla diagonale principale delle matrici dei sistemi di equazioni lineari che risultano dall'applicazione della procedura di discretizzazione, ci sono vincoli notevoli nella scelta dei metodi di soluzione dei sistemi stessi. Infatti, solutori di tipo indiretto (iterativo) possono essere utilizzati solo applicando tecniche di preconditionamento della matrice del sistema piuttosto sofisticate, per cui, i metodi diretti di soluzione sono praticamente una scelta obbligata. Pertanto, al crescere della dimensione dei problemi, l'occupazione di memoria ed il tempo di calcolo crescono così rapidamente da impedire, nella pratica, l'uso dei codici di questo tipo per le moderne necessità della fluidodinamica computazionale.

Un'alternativa possibile è quella di separare i calcoli relativi alla velocità da quelli riguardanti la pressione, pur mantenendo procedure di soluzione dirette per i sistemi di equazioni lineari. Uno dei metodi classici per disaccoppiare la determinazione del campo di moto da quella del campo di pressione, è l'introduzione, anche nella soluzione di problemi relativi al deflusso di fluidi incomprimibili, dell'ipotesi di una modesta comprimibilità del fluido, in accordo con il metodo detto di "penalizzazione" ("penalty method"). Secondo questo approccio, l'equazione di continuità può venir sostituita da

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = -\varepsilon p \quad (3.127)$$

dove  $p$  è la pressione,  $\mathbf{w}$  è il vettore velocità e  $\varepsilon$  ha un valore molto piccolo, ma diverso da zero. Risulta così possibile esprimere la pressione in termini di divergenza della

### 3.9. SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{H}_u^u & \mathbf{H}_v^u | \mathbf{0} & \mathbf{H}_p^u \\ \hline \mathbf{H}_u^v | \mathbf{0} & \mathbf{H}_v^v & \mathbf{H}_p^v \\ \hline \mathbf{H}_u^c & \mathbf{H}_v^c & \mathbf{0} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{array}
 =
 \begin{array}{l} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^v \\ \mathbf{0} \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{H}_u^u & \mathbf{H}_v^u | \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{H}_u^v | \mathbf{0} & \mathbf{H}_v^v \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array}
 =
 \begin{array}{l} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^v \end{array}$$

$$\mathbf{H}^p \quad \mathbf{p} = \mathbf{f}^p$$

(b)

$$\mathbf{H}_u^u \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}^u$$

$$\mathbf{H}_v^v \quad \mathbf{v} = \mathbf{f}^v$$

$$\mathbf{H}^p \quad \mathbf{p} = \mathbf{f}^p$$

(c)

**Figura 3.21:** Struttura dei sistemi di equazioni lineari da risolvere nel caso di problemi bidimensionali: (a) approccio integrato; (b) approccio parzialmente segregato con metodi di tipo “projection”; (c) approccio completamente segregato con metodi di tipo “projection”.

velocità moltiplicata per il numero molto grande  $1/\varepsilon$  (parametro di penalizzazione)

$$p = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{w} \tag{3.128}$$

In questo modo, la pressione può venir eliminata dalle equazioni della quantità di moto a spese dell'introduzione di un termine di penalizzazione che tende a riportare il fluido verso una situazione nella quale la massa è conservata, sia pur solo con buona approssimazione. L'influenza del valore assunto dal parametro di penalizzazione sull'accuratezza della soluzione e il fatto che il sistema di equazioni discretizzate risultante dall'applicazione del metodo sia mal condizionato e, di conseguenza, imponga l'uso di solutori diretti rappresentano i principali svantaggi di questo tipo di approccio. Inoltre, le equazioni della quantità di moto risultano necessariamente accoppiate tra di loro e quindi tutte le componenti della velocità devono essere determinate simultaneamente. Per questi motivi, i metodi di penalizzazione sono considerati

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

---

ancora troppo pesanti nel caso di problemi con molte incognite anche se, di fatto, eliminano la pressione dalla formulazione del problema. Pertanto, questi metodi sono stati quasi completamente abbandonati ed hanno ormai solamente un interesse storico.

Una metodologia più semplice per separare il calcolo delle velocità dal calcolo della pressione è quella illustrata nel Capitolo 1, consistente nella determinazione di una equazione differenziale per la pressione a partire dal vincolo di conservazione della massa. In tal caso infatti, i termini contenenti la pressione possono venir considerati noti nelle equazioni della quantità di moto consentendo, così, il disaccoppiamento delle equazioni differenziali relative alle velocità dall'equazione differenziale relativa alla pressione. Le procedure di questo tipo, tra l'altro, consentono di utilizzare solutori iterativi per i sistemi di equazioni algebriche e quindi sono considerate estremamente competitive per problemi che vengono discretizzati utilizzando un gran numero di nodi. Chiaramente, nell'ambito di questo tipo di algoritmi, sono possibili diverse strategie di soluzione a seconda che le equazioni della quantità di moto vengano ancora risolte simultaneamente (procedure parzialmente disaccoppiate) o separatamente, una dopo l'altra (procedure completamente sequenziali). Le strutture dei sistemi di equazioni algebriche lineari che si ottengono nei due casi sono mostrate, rispettivamente, in Fig. 3.21(b) e in Fig. 3.21(c).

Tra le procedure disaccoppiate, sono considerati molto affidabili gli algoritmi detti di proiezione, o anche a passo frazionato, come quelli illustrati nel Paragrafo 1.7. Il nome di proiezione deriva dal fatto che i campi di velocità approssimati, trovati nella prima fase del calcolo, vengono successivamente "proiettati" in campi a divergenza nulla tenendo conto delle pressioni di correzione. Il nome equivalente di passo frazionato deriva dal fatto che nella prima fase del calcolo si stima la prima frazione delle componenti dell'accelerazione, quella associata alle pressioni di tentativo ed ai termini advettivo e diffusivo delle equazioni di Navier-Stokes, mentre nella seconda parte si stima la frazione residua associata alle pressioni di correzione.

Si può dimostrare che per garantire la stabilità dei metodi di tipo integrato bisogna rispettare i vincoli imposti dalla cosiddetta "LBB condition" (condizione di Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi), che si traduce nella necessità di approssimare la pressione mediante elementi di ordine inferiore rispetto a quelli utilizzati per l'approssimazione della velocità ("unequal order interpolation"). In caso contrario, infatti, la distribuzione di pressione che si ottiene alla fine del processo di soluzione risulta caratterizzata da oscillazioni spaziali prive di significato fisico; tale effetto è noto con il nome di "checkerboarding". Per quanto riguarda gli algoritmi di tipo "projection", nelle procedure derivate manipolando le equazioni differenziali valide nel continuo è possibile l'utilizzo di elementi dello stesso ordine, cioè, di funzioni di forma dello stesso grado, sia per l'approssimazione della velocità sia per quella della pressione ("equal order interpolation"), mentre in quelle ottenute dalla mani-

polazione delle equazioni di conservazione discretizzate nello spazio la pressione deve venire approssimata utilizzando elementi di un ordine inferiore (“unequal order interpolation”), cioè, dev’essere rispettata la “LBB condition”. Entrambi i tipi di procedure presentano vantaggi e svantaggi che però sarebbe troppo lungo analizzare in questa sede. Vale infine la pena ricordare che le procedure a cui si è precedentemente accennato si possono applicare alla soluzione di problemi relativi a deflussi non solo laminari ma anche turbolenti, purchè, ovviamente, gli algoritmi vengano integrati con opportuni modelli di turbolenza, come quelli presentati nel Capitolo 4.

A titolo di esempio, viene di seguito presentata la forma discretizzata, ottenuta impiegando elementi tutti dello stesso ordine, dell’algoritmo sequenziale di tipo “projection” descritto al Paragrafo 1.7. Viene poi descritto un algoritmo, per molti aspetti simile al precedente, che però, essendo ricavato partendo dalle equazioni scritte non con riferimento al continuo, ma discretizzate nello spazio, richiede l’uso di elementi di ordine diverso per velocità e pressione. È interessante notare che l’impiego di elementi di ordine inferiore per la pressione corrisponde all’utilizzo di griglie sfalsate nell’ambito del metodo dei volumi finiti, mentre l’approssimazione di velocità e pressione mediante elementi dello stesso ordine corrisponde all’uso di griglie collocate, come descritto nel Capitolo 2. In tutti i casi, dalla discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes si ottengono equazioni matriciali formalmente molto simili all’Eq. (3.69), ottenuta discretizzando l’equazione dell’energia.

### 3.9.1 Esempio di procedura “equal order”

La procedura agli elementi finiti basata sull’algoritmo illustrato nel Paragrafo 1.7 viene presentata con riferimento all’analisi di deflussi bidimensionali laminari di fluidi incomprimibili con proprietà termofisiche costanti. La formulazione agli elementi finiti è ottenuta con il metodo di Galerkin nella forma classica, applicando la formula di Green ai termini di tipo diffusivo delle equazioni e utilizzando funzioni interpolanti dello stesso ordine per tutte le variabili (“equal order interpolation”). Ciò è possibile in quanto l’algoritmo di proiezione è applicato con riferimento ad equazioni scritte per il continuo che, solo successivamente, vengono discretizzate nello spazio. Secondo la strategia delineata nel Capitolo 1, ad ogni passo temporale il vettore  $\mathbf{p}^*$  dei valori nodali della pressione di tentativo viene assunto uguale a quello delle pressioni nodali alla fine del passo precedente ( $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^n$ ). Quindi, i vettori  $\mathbf{u}^*$  e  $\mathbf{v}^*$  dei valori nodali delle componenti della velocità di tentativo vengono determinati risolvendo le equazioni discretizzate nel tempo e nello spazio corrispondenti all’Eq. (1.93)

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta \vartheta} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{u}^* + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n] + \mathbf{D}^u \mathbf{p}^* + \rho g_x \beta \mathbf{e} = 0 \quad (3.129)$$

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta \vartheta} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{v}^* + (1 - \gamma) \mathbf{v}^n] + \mathbf{D}^v \mathbf{p}^* + \rho g_y \beta \mathbf{e} = 0 \quad (3.130)$$

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

dove  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione termica e  $g_x$  e  $g_y$  sono le componenti del vettore accelerazione di gravità.

Il vettore  $\mathbf{p}'$  dei valori nodali della pressione di correzione può essere poi ottenuto risolvendo l'equazione discretizzata corrispondente all'Eq. (1.97)

$$\mathbf{K}\mathbf{p}' = -\frac{\rho}{\Delta\vartheta} (\mathbf{D}^u\mathbf{u}^* + \mathbf{D}^v\mathbf{v}^*) \quad (3.131)$$

mentre i vettori  $\mathbf{u}'$  e  $\mathbf{v}'$  dei valori nodali delle componenti della velocità di correzione vengono calcolati risolvendo le equazioni discretizzate corrispondenti all'Eq. (1.94)

$$\frac{\rho}{\Delta\vartheta}\mathbf{M}_L\mathbf{u}' = -\mathbf{D}^u\mathbf{p}' \quad (3.132)$$

$$\frac{\rho}{\Delta\vartheta}\mathbf{M}_L\mathbf{v}' = -\mathbf{D}^v\mathbf{p}' \quad (3.133)$$

Nelle equazioni precedenti,  $\mathbf{M}$  è la matrice di massa,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{K}$  sono le matrici di advezione e di diffusione,  $\mathbf{D}^u$  e  $\mathbf{D}^v$  sono le matrici gradiente/divergenza, e  $\mathbf{e}$  è il vettore che contiene le componenti nodali dei termini di galleggiamento e, infine,  $\mathbf{M}_L$  è la matrice di massa condensata (diagonale), ottenuta ponendo a zero tutti gli elementi eccetto quelli sulla diagonale principale, che vengono posti uguali alla somma degli elementi della riga corrispondente della matrice originale. I vettori dei valori nodali delle componenti della velocità e della pressione alla fine del passo temporale, calcolati secondo le equazioni (1.100) e (1.98), sono dati da

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}' \quad (3.134)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}' \quad (3.135)$$

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^* + \mathbf{p}' \quad (3.136)$$

mentre il vettore  $\mathbf{t}^{n+1}$  dei valori nodali della temperatura viene calcolato risolvendo l'equazione dell'energia (1.101) discretizzata nel tempo e nello spazio con il classico metodo di Galerkin

$$\rho c_p \mathbf{M} \frac{\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}^n}{\Delta\vartheta} + (\lambda \mathbf{K} + \rho c_p \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{t}^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{t}^n] = 0 \quad (3.137)$$

Le espressioni degli elementi delle matrici e dei vettori che compaiono nelle equazioni precedenti sono riportati di seguito

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (3.138)$$

### 3.9. SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.139)$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} N_i \left( u^n \frac{\partial N_j}{\partial x} + v^n \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.140)$$

$$D_{ij}^u = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \quad (3.141)$$

$$D_{ij}^v = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \quad (3.142)$$

$$e_i = \int_{\Omega} N_i (t^n - t_0) d\Omega \quad (3.143)$$

$$(M_L)_{ij} = \int_{\Omega} N_i \delta_{ij} d\Omega \quad (3.144)$$

dove  $t_0$  è la temperatura di riferimento. Si noti che le definizioni di  $A_{ij}$  e  $K_{ij}$  sono leggermente diverse da quelle riportate nei paragrafi precedenti in cui non si era fatto esplicitamente riferimento al caso di proprietà termofisiche costanti, che, pertanto, non potevano essere portate fuori dai segni di integrale. Gli elementi lineari sia per la velocità sia per la pressione sono quelli più frequentemente usati con questo algoritmo. Nella soluzione delle equazioni precedenti, le condizioni al contorno vanno imposte in maniera coerente con quanto esposto nel Paragrafo 1.7.2, per quanto riguarda le equazioni di Navier-Stokes, e nel Paragrafo 1.3.3, per l'equazione dell'energia.

L'algoritmo sopra descritto, sebbene risulti, in generale, efficace, accurato e di semplice implementazione, in alcuni casi può generare campi di pressione caratterizzati da oscillazioni spaziali prive di significato fisico e manifestare una certa instabilità. Per questi motivi, sono stati proposti e descritti nella letteratura scientifica metodi di stabilizzazione, qui omessi per brevità, che consentono un miglioramento delle prestazioni globali.

#### 3.9.2 Esempio di procedura “unequal order”

Viene ora descritto un altro algoritmo di tipo “projection” del tutto analogo al precedente nella logica, ma sviluppato a partire dalle equazioni discretizzate nello spazio e che, pertanto, deve essere implementato utilizzando per l'approssimazione della pressione, elementi di ordine inferiore rispetto a quelli utilizzati per l'approssimazione della velocità (“unequal order interpolation”). Anche in questo caso, all'inizio di

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

ogni passo temporale si assume una distribuzione di pressione di tentativo  $\mathbf{p}^*$  uguale a quella  $\mathbf{p}^n$  ottenuta alla fine del passo precedente. Come nell'algoritmo "equal order" precedentemente descritto, i vettori  $\mathbf{u}^*$  e  $\mathbf{v}^*$  dei valori nodali delle componenti della velocità di tentativo vengono determinati risolvendo le equazioni discretizzate nel tempo e nello spazio corrispondenti all'Eq. (1.93).

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta \vartheta} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{u}^* + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n] + \mathbf{G}^u \mathbf{p}^* + \rho g_x \beta \mathbf{e} = \mathbf{g}^u \quad (3.145)$$

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta \vartheta} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{v}^* + (1 - \gamma) \mathbf{v}^n] + \mathbf{G}^v \mathbf{p}^* + \rho g_y \beta \mathbf{e} = \mathbf{g}^v \quad (3.146)$$

Tuttavia, in questo caso le equazioni discretizzate sono state scritte tenendo conto già in questa fase delle modifiche ai vettori e alle matrici conseguenti all'introduzione delle condizioni al contorno del primo tipo (Dirichlet) sulla velocità con modalità analoghe a quelle corrispondenti all'ultima delle tre possibilità descritte nell'Appendice di questo capitolo, al Paragrafo 3.11.1. I vettori  $\mathbf{g}^u$  e  $\mathbf{g}^v$  contengono, infatti, proprio i termini nei quali compaiono i valori imposti della componenti della velocità e che, pertanto, sono dei termini noti. Le matrici  $\mathbf{G}^u$  e  $\mathbf{G}^v$  rappresentano la forma discreta dell'operatore gradiente che si ottiene quando si utilizza l'integrazione per parti per abbassare l'ordine di derivazione nei termini contenenti la pressione. Questa pratica è sempre necessaria nel caso di "unequal order interpolation".

A questo punto è utile notare che, per applicare le condizioni di Dirichlet sulla velocità, oltre a raggruppare i termini noti nei vettori  $\mathbf{g}^u$  e  $\mathbf{g}^v$ , è necessario eliminare le equazioni corrispondenti ai nodi vincolati e ricompattare le matrici e i vettori. Pertanto, anche se qui la cosa non viene evidenziata mediante l'utilizzo di simboli diversi, in generale, le matrici e vettori che compaiono nell'Eq. (3.145) hanno dimensioni diverse da quelle identificate dallo stesso simbolo, che compaiono nell'Eq. (3.146). Infatti se indichiamo con  $n$  il numero di nodi utilizzati per l'approssimazione della velocità, con  $r_u$  il numero di nodi in cui è imposto il valore della componente  $u$  della velocità e con  $r_v$  quello in cui è imposto il valore della componente  $v$ , il numero di valori nodali incogniti sarà  $n_u = n - r_u$  per la componente  $u$  e  $n_v = n - r_v$  per la componente  $v$ . Infine, se indichiamo con  $n_p$  in numero di nodi utilizzati per l'approssimazione della pressione, possiamo concludere che le matrici  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{A}$  avranno dimensioni  $n_u \times n_u$  nell'Eq. (3.145) e  $n_v \times n_v$  nell'Eq. (3.146), mentre le matrici gradiente  $\mathbf{G}^u$  e  $\mathbf{G}^v$  avranno dimensioni, rispettivamente,  $n_u \times n_p$  e  $n_v \times n_p$ . I vettori che compaiono nelle Eq. (3.145) e (3.146) avranno, ovviamente, le dimensioni appropriate. Le espressioni degli elementi delle matrici e dei vettori che compaiono nelle equazioni precedenti sono ancora quelle riportate nelle equazioni da (3.138) a (3.144), mentre i generici elementi delle matrici  $\mathbf{G}^u$  e  $\mathbf{G}^v$  sono definiti come

$$G_{ij}^u = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{N}_j d\Omega \quad (3.147)$$

### 3.9. SOLUZIONE DEI PROBLEMI TERMOFLUIDODINAMICI

$$G_{ij}^v = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{N}_j d\Omega \quad (3.148)$$

dove  $N_i$  sono ancora le funzioni di forma utilizzate per l'interpolazione della velocità e  $\hat{N}_j$  sono le funzioni di forma di ordine inferiore utilizzate per l'interpolazione della pressione.

I vettori  $\mathbf{u}'$  e  $\mathbf{v}'$  dei valori nodali delle componenti della velocità di correzione vengono ancora calcolati risolvendo le equazioni discretizzate corrispondenti all'Eq. (1.94)

$$\frac{\rho}{\Delta\vartheta} \mathbf{M}_L \mathbf{u}' = \frac{\rho}{\Delta\vartheta} \mathbf{M}_L (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) = -\mathbf{G}^u \mathbf{p}' \quad (3.149)$$

$$\frac{\rho}{\Delta\vartheta} \mathbf{M}_L \mathbf{v}' = \frac{\rho}{\Delta\vartheta} \mathbf{M}_L (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*) = -\mathbf{G}^v \mathbf{p}' \quad (3.150)$$

ma l'equazione discretizzata che consente di calcolare il vettore  $\mathbf{p}'$  dei valori nodali della pressione di correzione non viene più ottenuta discretizzando l'Eq. (1.97), bensì moltiplicando da sinistra, rispettivamente per  $(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{M}_L^{-1}$  e  $(\mathbf{G}^v)^T \mathbf{M}_L^{-1}$ , il secondo e il terzo membro delle equazioni (3.149) e (3.150), sommando membro a membro e tenendo conto della seguente forma discretizzata dell'equazioni di continuità

$$(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{u}^{n+1} + (\mathbf{G}^v)^T \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{g}^D \quad (3.151)$$

Nell'Eq. (3.151) si sono assunte funzioni di pesata uguali alle funzioni di forma usate per l'approssimazione della pressione, il vettore  $\mathbf{g}^D$  contiene i termini originati dall'imposizione delle condizioni al contorno di Dirichlet sulla velocità, mentre le matrici  $(\mathbf{G}^u)^T$  e  $(\mathbf{G}^v)^T$ , trasposte delle matrici gradiente, rappresentano, a meno del segno, la forma discreta dell'operatore divergenza. L'equazione che consente di determinare il vettore  $\mathbf{p}'$  è quindi data da

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^u + (\mathbf{G}^v)^T \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^v] \mathbf{p}' \\ & = \frac{\rho}{\Delta\vartheta} [(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{u}^* + (\mathbf{G}^v)^T \mathbf{v}^* - \mathbf{g}^D] \end{aligned} \quad (3.152)$$

Infine, i vettori dei valori nodali delle componenti della velocità e della pressione alla fine del passo temporale, calcolati secondo le equazioni (1.100) e (1.98), sono dati dalle equazioni da (3.134) a (3.136) mentre il vettore  $\mathbf{t}^{n+1}$  dei valori nodali della temperatura viene calcolato risolvendo l'equazione dell'energia (1.101) discretizzata nel tempo e nello spazio con il classico metodo di Galerkin, cioè, l'Eq. (3.137)

La combinazione di elementi di ordine diverso più utilizzata con questo algoritmo è rappresentata da elementi lineari per la velocità ed elementi con un solo nodo centrale per la pressione. Ogni funzione di forma  $\hat{N}_i$  ha valore unitario in tutti i punti dell'elemento che contiene il nodo  $i$ -esimo, mentre vale zero al di fuori. Pertanto,

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

---

in ogni elemento, la pressione assume un valore costante. L'algoritmo appena descritto permette di rispettare i vincoli imposti dal principio di conservazione della massa in maniera più rigorosa di quanto sia consentito dall'algoritmo sviluppato a partire dalle equazioni scritte per il continuo, ma risente negativamente della minor accuratezza con cui viene approssimata la pressione e del fatto che per poter risolvere l'Eq. (3.152) si deve necessariamente utilizzare la matrice di massa concentrata  $M_L$  al posto della  $M$ , che consentirebbe di ottenere risultati migliori. Anche con riferimento a

questo algoritmo sono riportate nella letteratura scientifica le descrizioni di modifiche e perfezionamenti, qui omessi per brevità, che consentono di migliorarne le prestazioni globali.

#### 3.10 SOMMARIO

In questo capitolo sono state espone le basi del metodo degli elementi finiti nella versione ai residui pesati, con riferimento alla soluzione di problemi di convezione in deflussi laminari bidimensionali.

- Sono state descritte le modalità con cui viene approssimata la variabile incognita.
- Sono stati illustrati i concetti di base relativi all'applicazione del metodo dei residui pesati e delle formule di Gauss-Green.
- Il metodo di Galerkin è stato poi presentato con riferimento all'equazione della conduzione e dell'energia, sia in regime stazionario sia in quello transitorio.
- Sono state quindi illustrate le tecniche per la mappatura degli elementi non rettangolari e per l'integrazione numerica.
- Infine, dopo una panoramica sulle principali strategie di soluzione delle equazioni di Navier-Stokes mediante il metodo degli elementi finiti, sono state illustrate, a titolo di esempio, due procedure di tipo "projection".
- Nell'Appendice di questo capitolo, vengono illustrate le modalità di introduzione delle condizioni al contorno del primo tipo e di calcolo dei flussi nodali incogniti. Sono inoltre riportate le espressioni di alcune matrici che si ottengono con l'applicazione del metodo di Galerkin alla soluzione dell'equazione dell'energia. Infine, viene fatto un breve cenno ai metodi per la soluzione dei sistemi di equazioni algebriche lineari.

### 3.11 APPENDICE

In questa Appendice sono illustrate le modalità con cui si introducono le condizioni al contorno del primo tipo e si calcolano i flussi nodali incogniti. Sono inoltre riportate, a titolo di esempio, le espressioni di alcune matrici che si ottengono applicando il metodo di Galerkin alla soluzione dell'equazione dell'energia quando si utilizzano elementi monodimensionali a due nodi o elementi bidimensionali rettangolari a quattro nodi.

#### 3.11.1 Introduzione delle condizioni al contorno

Viene di seguito descritta la procedura con cui si impongono le condizioni al contorno del primo tipo (valore imposto della variabile incognita) prima della soluzione del sistema di equazioni lineari. Bisogna innanzitutto notare che in ogni equazione corrispondente ad un nodo in cui il valore dell'incognita è vincolato, sarà presente, nel secondo membro, un termine incognito  $z_i$  dovuto alla "reazione" del nodo all'imposizione del vincolo. Nel caso di un problema di trasmissione del calore, la "reazione" corrisponde, a meno del segno, al flusso termico necessario per mantenere nel nodo la temperatura imposta. Pertanto, il vettore  $\mathbf{z}$  dei valori nodali delle "reazioni" sarà legato a quello dei flussi termici nei nodi vincolati che compare nell'Eq. (3.32) dalla relazione  $\mathbf{z} = -\mathbf{r}_1$ .

Si supponga, per esempio, di voler introdurre la condizione  $t_2 = (t_p)_2$  nel sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 + z_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (3.153)$$

Prima di applicare la procedura per calcolare la soluzione utilizzando, ad esempio, uno dei metodi descritti in questa Appendice, al Paragrafo 3.11.3, si può riscrivere il sistema in modo da garantire che l'incognita  $t_2$  assuma il valore imposto  $(t_p)_2$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ H_{31} & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - H_{12}(t_p)_2 \\ (t_p)_2 \\ f_3 - H_{32}(t_p)_2 \end{Bmatrix} \quad (3.154)$$

dove i coefficienti della seconda riga sono stati ugualizzati a zero, eccetto il coefficiente sulla diagonale, che è stato posto uguale a uno, mentre il termine a secondo membro della seconda equazione è stato posto uguale a  $(t_p)_2$ . Inoltre, i coefficienti della seconda colonna, eccetto quello sulla diagonale, sono stati moltiplicati per il valore noto  $(t_p)_2$  e portati a secondo membro.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

Dopo aver risolto il sistema si può, poi, calcolare la “reazione” incognita utilizzando la seconda equazione nella sua forma originale

$$z_2 = H_{21} t_1 + H_{22} t_2 + H_{23} t_3 - f_2 = -(r_1)_2 \quad (3.155)$$

In alternativa, prima di procedere alla soluzione, si può modificare il sistema portando a secondo membro la seconda colonna con i coefficienti moltiplicati per il valore noto della variabile e a primo membro la “reazione” incognita

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} \\ H_{21} & -1 & H_{23} \\ H_{31} & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ z_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - H_{12} (t_p)_2 \\ f_2 - H_{22} (t_p)_2 \\ f_3 - H_{32} (t_p)_2 \end{Bmatrix} \quad (3.156)$$

In questo modo la simmetria della matrice  $\mathbf{H}$  è persa, ma in compenso la “reazione”  $z_2$  compare esplicitamente nel vettore delle incognite.

Infine, è possibile adottare una terza strategia, secondo la quale si elimina semplicemente la seconda equazione e si porta a secondo membro la seconda colonna con i coefficienti moltiplicati per il valore noto della variabile

$$\begin{cases} H_{11} t_1 + H_{13} t_3 = f_1 - H_{12} (t_p)_2 \\ H_{31} t_1 + H_{33} t_3 = f_3 - H_{32} (t_p)_2 \end{cases} \quad (3.157)$$

Il sistema originale viene quindi riscritto come

$$\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.158)$$

in cui gli indici dei coefficienti delle equazioni sono stati opportunamente ridefiniti

$$\begin{aligned} H'_{11} &= H_{11} ; & H'_{12} &= H_{13} ; & H'_{21} &= H_{31} ; & H'_{22} &= H_{33} \\ t'_1 &= t_1 ; & t'_2 &= t_3 \\ f'_1 &= f_1 - H_{12} (t_p)_2 ; & f'_2 &= f_3 - H_{32} (t_p)_2 \end{aligned}$$

Questo approccio risulta più complicato dei due precedenti, ma consente di risolvere un sistema di dimensioni ridotte, cioè, con un numero inferiore di equazioni. Anche in questo caso, come nel primo, è possibile utilizzare la seconda equazione del sistema nella forma originale per calcolare la “reazione” incognita secondo l’Eq. (3.155).

### 3.11.2 Matrici per alcuni elementi momo- e bidimensionali

Espressioni di alcune matrici che si ottengono con l'applicazione del metodo di Galerkin alla soluzione dell'equazione dell'energia quando si utilizzano elementi monodimensionali a due nodi di lunghezza  $L^e$  o elementi bidimensionali rettangolari a quattro nodi con lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$  e dimensioni  $L^e \times H^e$ .

Elemento monodimensionale a due nodi: matrice di capacità

$$\mathbf{C}^e = \rho c \frac{L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Elemento monodimensionale a due nodi: matrice di conducibilità

$$\mathbf{K}^e = \frac{\lambda}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Elemento monodimensionale a due nodi: matrice di advezione

$$\mathbf{A}^e = \rho c \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Elemento rettangolare a quattro nodi: matrice di capacità

$$\mathbf{C}^e = \rho c \frac{L^e H^e}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Elemento rettangolare a quattro nodi: matrice di conducibilità

$$\mathbf{K}^e = \frac{\lambda H^e}{6L^e} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\lambda L^e}{6H^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

Elemento rettangolare a quattro nodi: matrice di advezione ( $u, v$  uniformi)

$$\mathbf{A}^e = \rho c \frac{u H^e}{12} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \rho c \frac{v L^e}{12} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

Espressioni relative a matrici di elementi di ordine superiore possono essere reperite nei testi specializzati.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

#### 3.12 NOMENCLATURA

<b>A</b>	matrice di advezione
<b>b</b>	vettore di convezione
<b>B</b>	matrice di convezione
<i>c</i>	calore specifico, J/(kg K)
<i>c<sub>p</sub></i>	calore specifico a pressione costante, J/(kg K)
<b>C</b>	matrice di capacità
<b>D<sup>u</sup>, D<sup>v</sup></b>	matrici gradiente/divergenza
<b>e</b>	vettore di galleggiamento
<b>f</b>	vettore dei termini noti del sistema di equazioni lineari
<b>g<sup>D</sup></b>	vettore dei termini noti (equazione di continuità)
<b>g<sup>u</sup>, g<sup>v</sup></b>	vettore dei termini noti (equazioni della quantità di moto)
<b>G<sup>u</sup>, G<sup>v</sup></b>	matrici gradiente
<b>H</b>	matrice del sistema di equazioni lineari
<b>J</b>	matrice Jacobiana
<b>K</b>	matrice di conduzione/diffusione
<i>L<sup>e</sup></i>	lunghezza di un elemento, m
<i>L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub></i>	coordinate di area, adimensionali
<i>m</i>	numero totale di elementi
<b>M, M<sub>L</sub></b>	matrice di massa, matrice di massa concentrata
<i>n</i>	numero totale di nodi
<b>n</b>	normale esterna al contorno
<b>N</b>	matrice delle funzioni di forma
<i>p</i>	numero di punti di integrazione
<b>p</b>	vettore delle pressioni nodali
<i>q''</i>	componente del flusso termico specifico normale al contorno, W/m <sup>2</sup>
<i>q̇</i>	potenza termica generata per unità di volume, W/m <sup>3</sup>
<i>r</i>	numero di nodi in un elemento
<b>r</b>	vettore dei flussi termici nodali
<b>s</b>	vettore dei termini sorgente nodali
<i>S</i>	contorno esterno del dominio
<i>t</i>	temperatura, °C
<b>t</b>	vettore delle temperature nodali
<b>u, v</b>	vettori delle componenti nodali della velocità
<i>u, v</i>	componenti della velocità nelle direzioni <i>x, y</i> , m/s
<i>w<sub>i</sub></i>	fattore di pesata nell'integrazione di Gauss
<i>W<sub>i</sub></i>	funzione di pesata
<i>x, y</i>	coordinate cartesiane, m

$\mathbf{x}$	vettore delle “reazioni” nodali
$\alpha$	coefficiente di convezione, $W/(m^2 K)$
$\beta$	coefficiente di dilatazione termica, $K^{-1}$
$\gamma$	fattore di pesata temporale
$\delta_{ij}$	delta di Kronecker
$\lambda$	conducibilità termica, $W/(m K)$
$\vartheta$	tempo, s
$\rho$	densità, $kg/m^3$
$\xi, \eta$	coordinate locali, adimensionali
$\Omega$	dominio di definizione

**Pedici**

$c$	convettivo
$C$	centro
$f$	fluido
$i, j$	nodo o posizione
$p$	prescritto
0	riferimento
1	primo tipo (temperatura imposta)
2	secondo tipo (flusso termico specifico imposto)
3	terzo tipo (convezione)

**Apici**

$e$	elemento
$n$	livello temporale
*	valore di tentativo
'	valore di correzione
~	approssimato

**3.13 BIBLIOGRAFIA**

Baker, A.J. (1983), *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, Hemisphere, Washington, DC.

Bathe, K.J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.

Comini, G. e Del Giudice, S. (1982), Finite-Element Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 5, pp. 463-478.

### 3. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

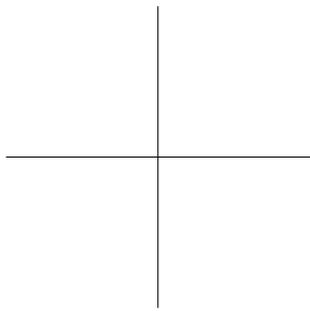
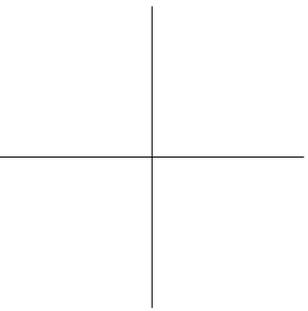
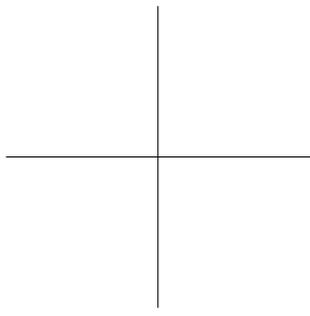
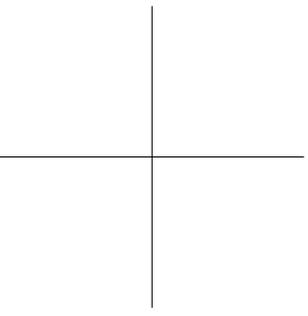
---

- Comini, G., Del Giudice, S. e Nonino, C. (1994), *Finite Element Analysis in Heat Transfer: Basic Formulation and Linear Problems*, Taylor & Francis, Philadelphia.
- Comini, G. e Del Giudice, S. (1988), Parabolic Systems: Finite Element Method, Chap. 4, in *Handbook of Numerical Heat Transfer*, (Edito da Minkowycz, W.J., Sparrow, E.M., Schneider, G.E. e Pletcher, R.H.), Wiley, New York.
- Cuvelier, C., Segal, A. e van Steenhoven, A.A. (1986), *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*, Reidel, Dordrecht.
- Dhatt, G. e Touzot, G. (1984), *The Finite Element Method Displayed*, Wiley, Chichester.
- Dhondt, G. (2004), *The Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications*, Wiley, Chichester.
- Gockenbach, M.S. (2006), *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, Philadelphia.
- Gresho, P.M. (1990), On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and its Implementation via a Finite Element Method That Also Introduces a Nearly Consistent Mass Matrix. Part 1: Theory, *Int. j. numer. methods. fluids*, Vol. 11, pp. 587-620.
- Gresho, P.M. e Chan, S.T. (1990), On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and its Implementation via a Finite Element Method That Also Introduces a Nearly Consistent Mass Matrix. Part 2: Implementation, *Int. j. numer. methods. fluids*, Vol. 11, pp. 621-659.
- Gresho, P.M. e Sani, R.L. (2000), *Incompressible Flow and the Finite Element Method*, Vol.1 e 2, Wiley, Chichester.
- Haroutunian, V., Engelman, M.S., e Hasbani, I. (1993), Segregated Finite Element Algorithms for the Numerical Solution of Large-Scale Incompressible Flow Problems, *Int. j. numer. methods. fluids*, Vol. 17, pp. 323-348.
- Heinrich, J.C. e Pepper, D.W. (1999), *Intermediate Finite Element Method: Fluid Flow and Heat Transfer Applications*, Taylor & Francis, Philadelphia.
- Hinton, E. e Owen, D.R.J. (1979), *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea.

### 3.13. BIBLIOGRAFIA

---

- Huebner, K.H. e Thornton, E.A. (1995), *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, Chichester.
- Irons, B. e Ahmad, S. (1979), *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester.
- Lewis, R.W., Nithiarasu P. e Seetharamu, K.N. (2004), *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, Wiley, Chichester.
- Nonino, C. e Comini, G. (1997), An Equal-Order Velocity Pressure Algorithm for Incompressible Thermal Flows. Part 1: Formulation, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 32, pp. 1-15.
- Nonino, C. (2003), A simple pressure stabilization for a SIMPLE-like equal-order FEM algorithm, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 44, pp. 61-81.
- Owen, D.R.J. e Hinton, E. (1980), *A Simple Guide to Finite Elements*, Pineridge Press, Swansea.
- Rao, S.S. (2004), *The Finite Element Method in Engineering*, Fourth Ed., Elsevier, Amsterdam.
- Reddy, J.N. e Gartling, D.K. (2001), *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*, Second Ed., CRC Press, Boca Raton.
- Smith, I.M. e Griffiths, D.V. (1998), *Programming the Finite Element Method*, Wiley, Chichester.
- Zienkiewicz, O.C. e Morgan, K. (1983), *Finite Elements and Approximation*, Wiley, Chichester.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L. (2005), *The Finite Element Method Set*, Sixth Ed., Vol. 1, 2 e 3, Elsevier Butterworth Heinemann, Amsterdam.



## Capitolo 4

# La turbolenza e i suoi modelli

M. Ciofalo

### 4.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo, il punto di partenza sarà le equazioni di continuità, quantità di moto (Navier-Stokes) ed energia, valide per un fluido newtoniano comprimibile o incomprimibile e già introdotte nel Capitolo 1. Usando la notazione tensoriale con la cosiddetta convenzione di Einstein (somma implicita su indici ripetuti), e omettendo per il momento sia forze di massa sia termini legati alla generazione interna di calore, esse possono scriversi nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho c_p t) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho c_p u_i t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x_j} \right) \quad (4.3)$$

L'Eq. (4.3) è superflua se il moto è isoterma. Inoltre, la sua soluzione (il campo termico) non ha effetti sulla soluzione delle due precedenti equazioni (il campo di moto) se le proprietà fisiche del fluido non variano con la temperatura.

È accettato da tempo (Spalding, 1978) che le Eq. (4.1)-(4.3), con appropriate condizioni al contorno, descrivano in modo praticamente esatto il comportamento di un fluido sia in condizioni laminari che turbolente. La natura estremamente complessa e apparentemente stocastica della turbolenza non nasce quindi né da fonti esterne di *rumore* (fluttuazioni nelle condizioni al contorno) né da una inadeguata formulazione matematica del problema, ma è una proprietà intrinseca di certe soluzioni

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

delle equazioni stesse. Nella successiva Sezione 4.2 si discuteranno schematicamente, avvalendosi di esempi, alcuni aspetti generali della turbolenza idrodinamica, con particolare riguardo alle scale spazio-temporali coinvolte e alla distribuzione spettrale delle fluttuazioni. Si farà inoltre cenno al punto di vista contemporaneo che inquadra la turbolenza nella teoria dei sistemi dinamici non lineari a comportamento caotico.

Da quanto detto segue che, nelle condizioni in cui un sistema fisico presenta un comportamento turbolento, una soluzione diretta (numerica o, in linea di principio, analitica) delle Eq. (4.1)-(4.3), purché sufficientemente accurata, manifesterà lo stesso comportamento (e viceversa). Il problema sta nelle condizioni che devono essere soddisfatte perché la soluzione possa considerarsi accurata. Queste saranno discusse in dettaglio per uno specifico problema nella Sezione 4.3, ove si mostrerà che il punto cruciale sta nella risoluzione spazio-temporale necessaria perché il trasferimento di energia meccanica dalle scale più grandi alle scale cosiddette dissipative del moto sia adeguatamente simulato. Come si vedrà, molti problemi di grande interesse pratico sfuggono e sfuggiranno per molto tempo - nonostante il rapido incremento della potenza di calcolo - alla possibilità di simulazioni dirette; ciò giustifica il ricorso a *modelli di turbolenza*.

Applicare un modello di turbolenza allo studio di un problema fluidodinamico consiste, in ultima analisi, nel rinunciare a studiare nei dettagli l'effettivo comportamento del fluido, sostituendolo con un fluido equivalente (generalmente non-newtoniano) descritto da opportune equazioni costitutive, e tale da manifestare nelle condizioni date un comportamento spazio-temporale sufficientemente regolare e predicibile. Da questo punto di vista, la modellazione della turbolenza presenta forti punti di contatto con la meccanica dei fluidi non newtoniani, come riconosciuto, ad esempio, da Speziale (1985).

Possono individuarsi due approcci fondamentali alla modellazione della turbolenza: il primo si basa su un processo di filtraggio spaziale, e conduce alla cosiddetta *Large Eddy Simulation* (simulazione a grandi vortici, LES); il secondo si basa concettualmente su un analogo filtraggio temporale, ma si riduce il più delle volte alla media su tempo infinito o alla media d'insieme, dando vita alla cosiddetta chiusura secondo Reynolds (modelli RANS, o *Reynolds Averaged Navier Stokes*). Questi due approcci saranno discussi in dettaglio nelle Sezioni 4.4 e 4.5, rispettivamente. Si noti che l'ordine di presentazione è invertito rispetto a quello consueto, in cui i modelli RANS (storicamente i primi sviluppati, e tuttora di uso assai più diffuso) precedono invariabilmente la LES.

La Sezione 4.6 è dedicata alla turbolenza in convezione naturale e mista. Saranno illustrati gli aspetti fisici del problema e saranno derivati e commentati i termi-

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

ni che vanno aggiunti o modificati nelle equazioni di trasporto degli sforzi di Reynolds o dell'energia cinetica turbolenta per tenere conto degli effetti di *buoyancy* (galleggiamento termico).

Infine, nella Sezione 4.7 saranno tratte alcune conclusioni comparative sui diversi modelli, sia dal punto di vista della capacità di riprodurre correttamente risultati sperimentali sia dai punti di vista del rigore concettuale, della generalità di applicazione e dell'onere computazionale associato. In tutto il capitolo si cercherà, nei limiti del possibile, di illustrare i vari problemi con esempi tratti dall'esperienza personale dell'autore o dalla letteratura più rilevante.

Le brevi note che seguono possono solo dare un panorama sommario della turbolenza idrodinamica, uno degli argomenti più complessi e affascinanti di tutte le scienze fisiche. Trattazioni molto più adeguate possono trovarsi in testi e trattati quali Tennekes e Lumley (1972), Hinze (1975), Lesieur (1990) o Pope (2000). Inoltre, è consigliabile a chiunque sia interessato allo studio della turbolenza di trascorrere un certo tempo osservando fluidi reali in moto turbolento; e di tenere presente che problemi quotidiani, come la forma del getto che esce da un umile rubinetto, o - più poeticamente - la forma delle nuvole, sono di fatto molto al di là delle nostre attuali capacità di predizione.

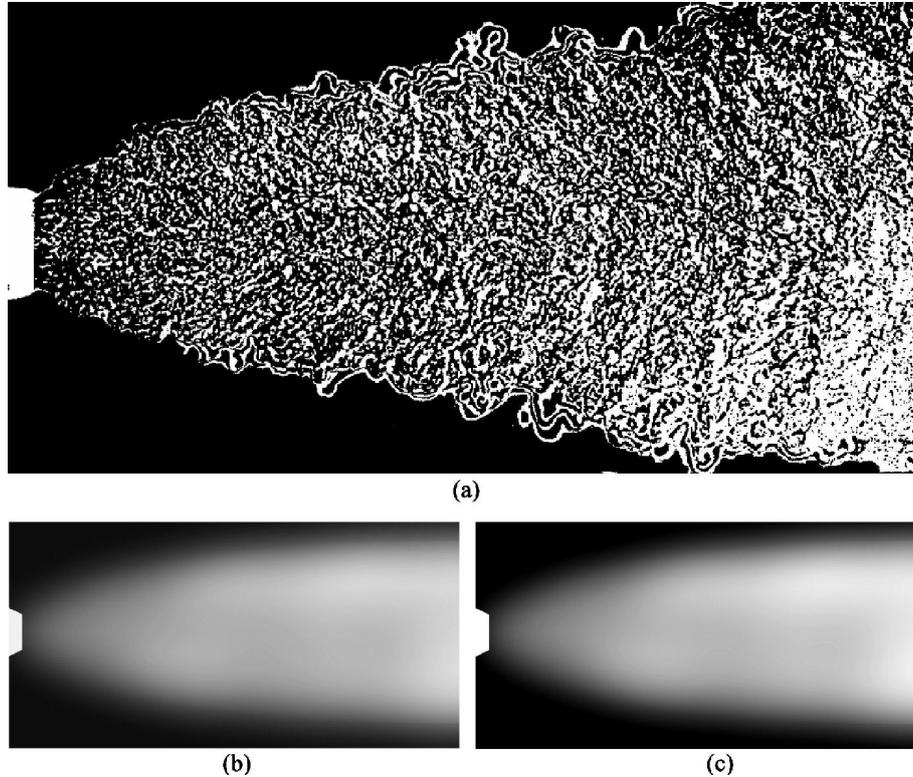
## 4.2 CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

### 4.2.1 Decomposizione e fluttuazioni

La Fig. 4.1(a) riporta la struttura istantanea di un getto fluido turbolento a sezione circolare (fiamma) che penetra nel mezzo circostante. La densità del fluido, e quindi la sua temperatura  $t$ , sono state visualizzate qui con una tecnica interferometrica. Sulla complessa struttura mostrata in figura possono effettuarsi *due* distinte operazioni di media, o filtraggio.

La prima è un'operazione di media *spaziale*; lungo direzioni omogenee (come, in questo caso, la direzione circonferenziale  $\phi$ ) la media può estendersi all'intero dominio di interesse (da 0 a  $2\pi$ ), mentre, lungo direzioni non omogenee in cui esista un gradiente di grande scala (come, in questo caso, le direzioni assiale e radiale  $x$ ,  $r$ ) ha senso solo eseguire una media corrente, o una più sofisticata operazione di filtraggio, con ampiezza intermedia fra le dimensioni integrali del problema e quelle delle più piccole strutture turbolente. Ad esempio, la media azimutale istantanea ( $\vartheta=\text{costante}$ ) della temperatura in Fig. 4.1(a) apparirebbe all'incirca come in Fig. 4.1(b); la generica grandezza mediata rimane ancora funzione delle rimanenti variabili spaziali  $x$  e  $r$ , nonché del tempo  $\vartheta$ , ma con un andamento molto più regolare (*smooth*) che la grandezza primitiva.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.1:** Struttura della turbolenza in una fiamma. a)  $t$  istantanea (adattato da Schumann (1993)); b) media azimutale; c) media temporale.

In alternativa, può effettuarsi sulla struttura (dipendente dal tempo) di Fig. 4.1(a) un'operazione di media *temporale*. Essa produrrebbe un andamento simile a quello schematizzato in Fig. 4.1(c); simmetricamente rispetto al caso precedente, si noti che la generica grandezza (ad es., la temperatura) rimane funzione delle variabili spaziali, ma con andamento più regolare della funzione primitiva.

Si noti che, anche in questo caso, ha senso estendere la media all'intera durata del fenomeno (concettualmente, all'infinito) solo se il problema è statisticamente stazionario; in un transitorio, o in un problema che presenti oscillazioni temporali non stocastiche di grande scala (legate, ad esempio, ad una variazione periodica delle condizioni al contorno, come accade nei problemi meteorologici), ha senso solo mediare nel tempo su durate intermedie fra quella di tali oscillazioni e quella caratteristica delle fluttuazioni turbolente vere e proprie.

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

Valgono in generale le seguenti osservazioni:

- la media su una o più variabili indipendenti riduce la variabilità di una generica grandezza turbolenta anche rispetto alle altre variabili; questa proprietà, dovuta a ovvie ragioni statistiche, è di fatto ciò che rende possibile e utile la modellazione della turbolenza;
- la struttura risultante - per quanto riguarda, ad esempio, il campo di temperatura - è simile a quella che si osserverebbe in un moto laminare a numero di Reynolds molto più basso;
- sotto opportune ipotesi la media (filtraggio) spaziale e quella temporale danno risultati analoghi, Figg. 4.1(b) e (c).

Alcune delle affermazioni che precedono non sono prive di insidie e di definizioni sottilmente circolari; la differenza fra direzioni omogenee e non, e fra transitori e stati (statisticamente) stazionari, può precisarsi solo una volta che il problema sia stato caratterizzato completamente, ma spesso l'operazione di media è compiuta appunto per rendere il problema caratterizzabile! Questi aspetti saranno meglio discussi nei paragrafi che seguono. Qui importa ricordare che:

- l'operazione di media o filtraggio spaziale o temporale, comunque definita, introduce una decomposizione della generica grandezza turbolenta  $\varphi(\mathbf{x}, \vartheta)$  in valore medio (filtrato, risolto)  $\langle \varphi \rangle$  e valore fluttuante (non filtrato, irrisolto)  $\varphi'$ , entrambi, in generale, ancora funzioni dello spazio e del tempo.

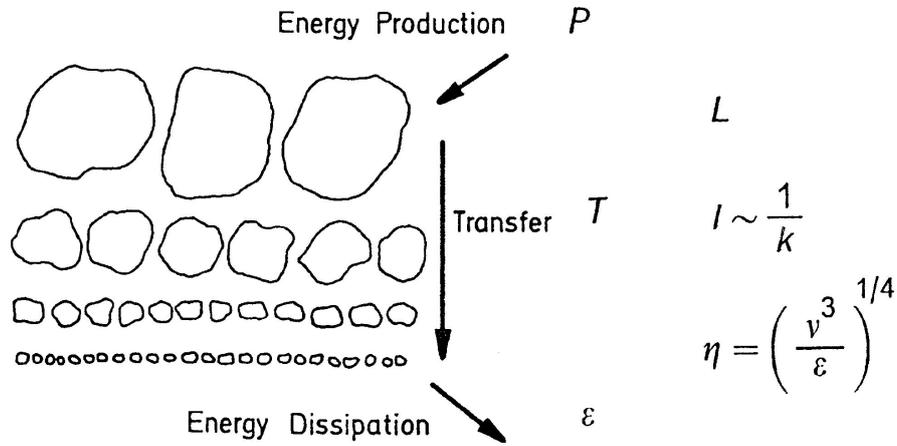
### 4.2.2 La cascata di Kolmogorov

In Fig. 4.1 colpisce la presenza di strutture caratterizzate da diverse scale spaziali, che vanno da quella della geometria fino a quelle delle perturbazioni più piccole.

Tale molteplicità di scale è caratteristica della turbolenza: in un getto laminare, le strutture riconoscibili del campo idrodinamico sarebbero della stessa scala delle strutture geometriche che caratterizzano il problema (ad esempio, il diametro del getto all'uscita). Due scale fondamentali sono la scala integrale della turbolenza,  $L$ , e la scala dissipativa, o di Kolmogorov,  $\eta$ . La prima corrisponde grosso modo alle dimensioni delle strutture geometriche presenti nel dominio di interesse; la seconda caratterizza le più piccole strutture spaziali che possono esistere nel campo di moto.

Nella teoria della turbolenza sviluppata da Kolmogorov già negli anni 1930, e tuttora essenzialmente valida, l'energia meccanica del fluido, fornita ad esso alla scala integrale  $L$  da processi esterni (come gradienti di pressione o agitazione meccanica),

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.2:** Schema della cascata di scale nella turbolenza. Adattato da Schumann (1993).

subisce una progressiva degradazione attraverso *una cascata* di scale da  $L$  fino a  $\eta$ , quando è infine degradata in energia termica dagli attriti viscosi (Fig. 4.2).

Per l'ordine di grandezza della scala dissipativa  $\eta$ , sulla base di considerazioni dimensionali si ottiene (Landau e Lifschitz, 1959):

$$\eta \approx \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (4.4)$$

in cui  $\nu$  è la viscosità cinematica del fluido ed  $\varepsilon$  è il tasso di dissipazione di energia cinetica turbolenta per unità di massa (avente dimensioni  $\text{m}^2\text{s}^{-3}$ ). Nel modello a cascata di Kolmogorov,  $\varepsilon$  è strettamente legata alla funzione di dissipazione  $\Phi$ , ricavata in forma esplicita nel Cap. 1 nel caso di moto bidimensionale. Nel caso più generale (purchè il fluido sia newtoniano e il numero di Mach sia basso)  $\Phi$  può esprimersi, in notazione tensoriale, come:

$$\Phi = f_{ij}S_{ij} = 2\mu S_{ij}S_{ij} \quad (4.5)$$

essendo

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.6)$$

il tensore della velocità di deformazione (*strain rate*), e

$$f_{ij} = 2\mu S_{ij} \quad (4.7)$$

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

il tensore degli sforzi (*stress*) viscosi. {In notazione matriciale si sarebbe ottenuto, rispettivamente:  $\mathbf{S} = (1/2)[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$  e  $\mathbf{f} = 2\mu\mathbf{S}$ . Il valore medio, o filtrato, di  $\Phi$  è quindi

$$\langle\Phi\rangle = 2\mu\langle S_{ij}S_{ij}\rangle \quad (4.8)$$

Scomponendo esplicitamente  $S_{ij}$  come  $\langle S_{ij}\rangle + S'_{ij}$  e sostituendo nell'Eq. (4.5) si ottiene:

$$\langle\Phi\rangle = 2\mu\langle S_{ij}\rangle\langle S_{ij}\rangle + 2\mu\langle S'_{ij}S'_{ij}\rangle + 2\mu(L + C) \quad (4.9)$$

in cui

- il primo termine rappresenta l'energia dissipata per unità di volume e di tempo direttamente per effetti viscosi sul moto di grande scala e, di conseguenza, è prossimo prossimo a zero in quanto, almeno nel caso di turbolenza sviluppata, solo una frazione trascurabile dell'energia meccanica immessa è direttamente degradata in calore da effetti viscosi;
- il secondo termine rappresenta l'energia dissipata per unità di volume e di tempo alla scala di Kolmogorov dei vortici dissipativi cioè, come vedremo meglio in seguito, la funzione *dissipazione di energia cinetica turbolenta per unità di volume*  $\rho\varepsilon$  (Tennekes e Lumley, 1972). Tale energia perviene alle scale di Kolmogorov dopo avere attraversato l'intera cascata in Fig. 4.2, e dopo essere apparsa alle varie scale intermedie come energia meccanica dei vortici turbolenti.
- il terzo termine è uguale a zero se la media è eseguita su intervalli spaziali o temporali infiniti, o su direzioni periodiche, mentre è presente nel caso dei filtraggi finiti, spaziali o temporali e, in tal caso rappresenta il tasso di dissipazione di energia meccanica legato all'interazione fra scale diverse. (La giustificazione di queste affermazioni verrà fornita nel seguito a proposito della *Large Eddy Simulation* in quanto si vedrà come i due addendi:  $L = \langle\langle S_{ij}\rangle\langle S_{ij}\rangle\rangle - \langle S_{ij}\rangle\langle S_{ij}\rangle$  e  $C = 2\langle\langle S_{ij}\rangle S'_{ij}\rangle$  siano analoghi ai termini di *Leonard e incrociati*).

Al capo opposto della cascata di scale, si trova la produzione di energia cinetica turbolenta. Per analogia con l'energia cinetica tradizionale, l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) viene definita come

$$k = \frac{1}{2}\langle u'_i u'_i \rangle \quad (4.10)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

dove le  $u'_i$  sono le componenti fluttuanti delle velocità mentre, in questo caso, la somma implicita è sulla  $i$ . Le fluttuazioni di velocità e, quindi, l'energia cinetica turbolenta, sono generate sulla scala geometrica  $L$  dallo *shear* o da forze di massa (quali le forze di galleggiamento, o *buoyancy*, che agiscono nella convezione naturale). Trascurando, per il momento, gli effetti di *buoyancy* ed anticipando risultati ottenuti nel seguito, si può dire che il tasso di produzione  $P$  di energia cinetica turbolenta è esprimibile mediante la relazione

$$P = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle \langle S_{ij} \rangle = -\tau_{ij} \langle S_{ij} \rangle \quad (4.11)$$

ovvero mediante il prodotto del tensore degli sforzi turbolenti  $\tau_{ij}$ , definito rigorosamente nel seguito, per il tensore della velocità di deformazione media, o di grande scala  $\langle S_{ij} \rangle$  definito dalla (4.6). Pur senza far ricorso all'equazione di trasporto di  $\rho k$ , dal punto di vista fisico si può anche dire che, in uno stato (statisticamente) stazionario e in assenza di trasporto convettivo e diffusivo, i termini di produzione e distruzione di  $\rho k$  si equivalgono in quanto si ha:  $P - \rho K = 0$ .

Il trasferimento di energia turbolenta attraverso la cascata di scale da  $L$  ad  $\eta$  può, comunque, essere meglio apprezzato nel contesto della *analisi spettrale* della turbolenza, discussa qui di seguito.

##### 4.2.3 Spettri della turbolenza

Benché strutture turbolente siano presenti a tutte le scale comprese fra  $L$  e  $\eta$ , l'energia cinetica ad esse associata non è ripartita in modo uniforme, ma presenta una specifica *distribuzione spettrale*.

Se esiste almeno una direzione omogenea  $x$ , la generica grandezza  $\varphi$  avrà, in qualunque istante  $\vartheta$  e per ogni valore delle restanti variabili spaziali, una certa distribuzione secondo  $x$ , che possiamo immaginare complicata e pseudo-casuale e rappresentare come una somma infinita di sinusoidi. La funzione  $\varphi(x)$  può, infatti, rappresentarsi come un *integrale di Fourier* del tipo:

$$\varphi(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} a(n) e^{-i2\pi n x} dn \quad (4.12)$$

in cui  $n$  è il *numero d'onda* (inverso della lunghezza d'onda  $\Lambda$  considerata). La funzione  $a(n)$ , trasformata di Fourier di  $\varphi(x)$ , è in genere complessa. La *densità spettrale*  $P_{\varphi\varphi}(n)$  relativa a  $\varphi$  è data allora da

$$P_{\varphi\varphi}(n) = |a(n)|^2 \quad (4.13)$$

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

a meno di un fattore di normalizzazione, scelto ad esempio in modo da ottenere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\varphi\varphi}(n)dn = \langle \varphi^2 \rangle \quad (4.14)$$

dove le parentesi angolate denotano media spaziale lungo la direzione omogenea prescelta. Si dimostra anche facilmente che la densità spettrale  $P_{\varphi\varphi}(n)$  è la trasformata di Fourier della *funzione di correlazione spaziale*  $R_{\varphi\varphi}(x)$ , definita come:

$$R_{\varphi\varphi}(x) = \langle \varphi(\xi)\varphi(\xi - x) \rangle = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} \varphi(\xi)\varphi(\xi - x)d\xi \quad (4.15)$$

Il tipico spettro energetico della turbolenza sviluppata si presenta come in Fig. 4.3. In ascisse è riportato il numero d'onda  $n$ , in ordinate la densità spettrale  $P_{uu}(n)$  relativa, ad esempio, al modulo della velocità.  $P_{uu}(n)$  rappresenta quindi l'*energia cinetica* della turbolenza per unità di numero d'onda, che può indicarsi semplicemente con  $E(n)$ . Lo spettro presenta un massimo ai numeri d'onda ( $1/L$ ) caratteristici dei termini forzanti (per i quali si ha  $L = \Lambda$ ), un subrange inerziale in cui  $E(n)$  è proporzionale a  $n^{-5/3}$ , in corrispondenza della cascata di strutture turbolente, e un taglio intorno a  $1/\eta$  in corrispondenza della scala dissipativa di Kolmogorov.

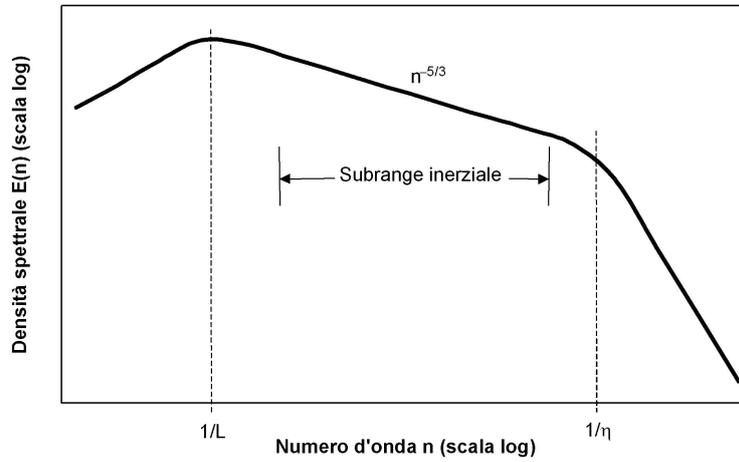
L'andamento di  $E(n)$  nel subrange inerziale può ricavarsi sulla base di ipotesi molto semplici (Lumley, 1992). Innanzitutto si assuma che il flusso  $\Gamma(n)$  di energia cinetica turbolenta attraverso il generico numero d'onda  $n$  (cioè il tasso al quale l'energia viene trasferita da numeri d'onda minori di  $n$  a numeri d'onda maggiori di  $n$ ) sia proporzionale al rapporto fra l'energia cinetica turbolenta associata a  $n$ ,  $u^2(n)$ , e la costante di tempo associata a  $n$ ,  $\Lambda(n)/u(n)$ . Si esprima poi  $u(n)$  come  $[nE(n)]^{1/2}$  e  $\Lambda(n)$  come  $1/n$ . Infine, si osservi che  $\Gamma(n)$  può identificarsi con la dissipazione  $\varepsilon$ , la quale non dipende dal numero d'onda; ciò equivale ad assumere che l'energia meccanica della turbolenza attraversi le varie scale da  $L$  a  $\eta$  e solo alla fine della cascata venga dissipata in calore. Si ricava allora:

$$E(n) = \alpha \varepsilon^{2/3} n^{-5/3} \quad (4.16)$$

dove  $\alpha$  è una costante. È chiaro che l'analisi di cui sopra trova il suo ambito ottimale di applicazione nel contesto di metodi numerici di tipo *spettrale*, basati sull'espansione della generica grandezza  $\varphi$  in serie di autofunzioni ortogonali (in particolare, in serie di Fourier). I metodi spettrali in fluidodinamica sono trattati, ad esempio, da Hussaini e Zang (1987).

Nulla vieta, in linea di principio, di estendere l'analisi di cui sopra a direzioni spaziali *non omogenee*. Tuttavia, in tal caso la distribuzione spettrale della generica grandezza in funzione del numero d'onda rifletterà anche il suo andamento spaziale di grande scala e non solo gli aspetti statistici legati alle fluttuazioni spaziali turbolente.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.3:** Tipico spettro della turbolenza sviluppata.

Infine, considerazioni del tutto analoghe possono farsi per quanto riguarda la distribuzione *temporale* delle varie grandezze viste in un punto fisso dello spazio (spettri euleriani). In particolare, l'Eq. (4.12) sarà sostituita dalla:

$$\varphi(\vartheta) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} a(f) e^{-i2\pi f\vartheta} df \quad (4.17)$$

in cui  $f$  è la frequenza (dimensionalmente pari all'inverso di un tempo). La densità spettrale euleriana  $P_{\varphi\varphi}(f)$  relativa a  $\varphi$  sarà data dall'equivalente della (4.13):

$$P_{\varphi\varphi}(f) = |a(f)|^2 \quad (4.18)$$

Può definirsi una *funzione di correlazione temporale*  $R_{\varphi\varphi}(\vartheta)$ , analoga alla funzione di correlazione spaziale  $R_{\varphi\varphi}(x)$  definita dall'Eq. (4.15):

$$R_{\varphi\varphi}(\vartheta) = \langle \varphi(\tau)\varphi(\tau - \vartheta) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(\tau)\varphi(\tau - \vartheta) d\tau \quad (4.19)$$

e la densità spettrale  $P_{\varphi\varphi}(f)$  risulta essere la trasformata di Fourier di  $R_{\varphi\varphi}(\vartheta)$ . In generale, la relazione fra densità spettrali o funzioni di correlazione spaziali da un lato, e le loro controparti temporali euleriane dall'altro, *non* è semplice. In certi casi si può adottare l'ipotesi di Taylor di *frozen turbulence*, secondo cui la distribuzione temporale osservata in un punto P fisso nello spazio è quella che sarebbe rilevata se

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

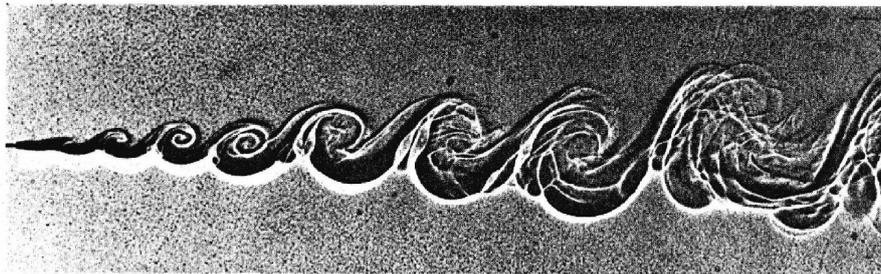
il campo di moto fosse *congelato* e traslasse di fronte a P con la velocità convettiva prevalente  $U$ . Si ottiene allora per la frequenza dei vortici dissipativi (massima frequenza significativa nello spettro temporale euleriano):

$$f_k = \frac{U}{\eta} \approx U \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{-1/4} \quad (4.20)$$

### 4.2.4 Strutture coerenti

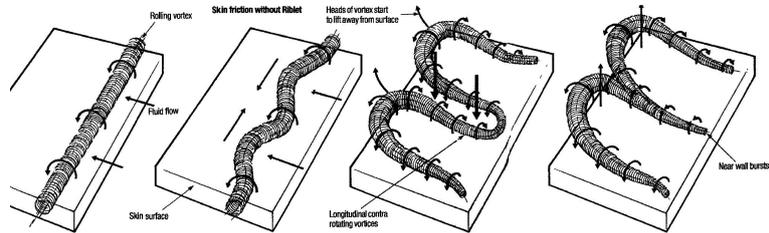
Nonostante la natura pseudo-casuale delle fluttuazioni turbolente, i vincoli posti al campo di velocità dalle equazioni di continuità e di Navier-Stokes (4.1)-(4.2) fanno sì che, a tutte le scale, il moto si presenti altamente strutturato. Le strutture turbolente (*eddies*) non sono, ovviamente, permanenti ma sono caratterizzate da una certa vita media. La ricerca sulle strutture coerenti è stata tra le più feconde nell'ambito degli studi sulla turbolenza e ha condotto a risultati spesso sorprendenti. Alcuni esempi sono:

- le strutture quasi bidimensionali ed altamente organizzate osservate da Brown e Roshko (1974) all'interfaccia turbolenta fra getti piani, Fig. 4.4;
- le strutture allungate osservate nella regione di parete di flussi turbolenti già da Kline e al. (1967), e la cui dinamica è responsabile di gran parte dell'attrito e della dissipazione nella turbolenza di parete, Fig. 4.5;
- le strutture coerenti presenti anche in turbolenza omogenea isotropa, Fig. 4.6.

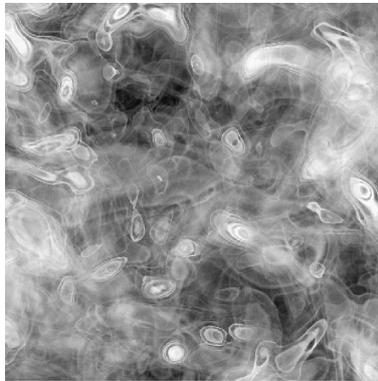


**Figura 4.4:** Vortici quasi-bidimensionali osservati all'interfaccia fra getti piani turbolenti. Adattato da Brown e Roshko (1974).

## 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.5:** Strutture della turbolenza di parete. Adattato da Barrett (1990).



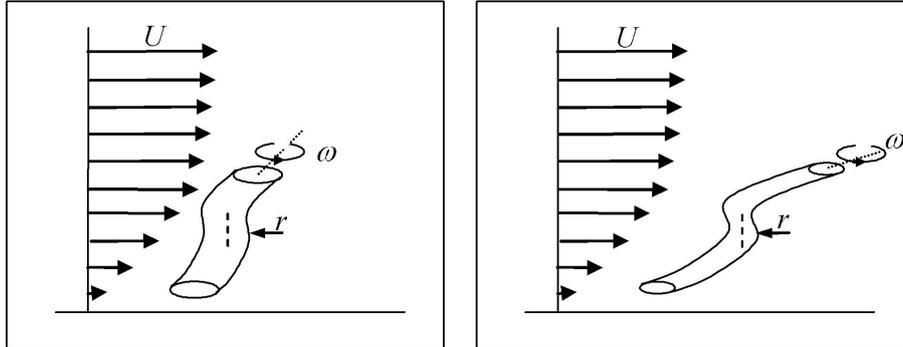
**Figura 4.6:** Distribuzione di vorticità in turbolenza isotropa. Adattato da Yuan e al. (2005) ([www.ima.umn.edu/2005-2006/gallery/yuan](http://www.ima.umn.edu/2005-2006/gallery/yuan)).

### 4.2.5 Turbolenza bidimensionale

La turbolenza è un fenomeno intrinsecamente *tridimensionale*. Tale fatto è discusso in modo particolarmente illuminante da Bradshaw (1978). Egli si sofferma, in particolare, sul fenomeno dello stiramento dei tubi di vorticità ad opera della velocità di deformazione (ovvero del gradiente di velocità) di grande scala, Fig. 4.7.

Il gradiente di velocità di grande scala, prevalente in una certa regione del campo di moto, stira e assottiglia un tubo di vorticità che sia inizialmente presente. In prima approssimazione, mentre la lunghezza  $L$  del tubo di vorticità cresce, il suo raggio  $r$  e la sua velocità angolare  $\omega$  debbono variare in modo da conservarne sia la massa che il momento angolare, proporzionali rispettivamente a  $r^2L$  ed a  $r^4L\omega$ . Ne segue che l'energia cinetica del vortice, proporzionale a  $r^4L\omega^2$ , deve aumentare, e non può che farlo a spese dell'energia del campo di moto di grande scala. Lo stiramento dei

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA



**Figura 4.7:** Stiramento dei tubi di vorticità ad opera dei gradienti di velocità di grande scala in un campo di moto tridimensionale.

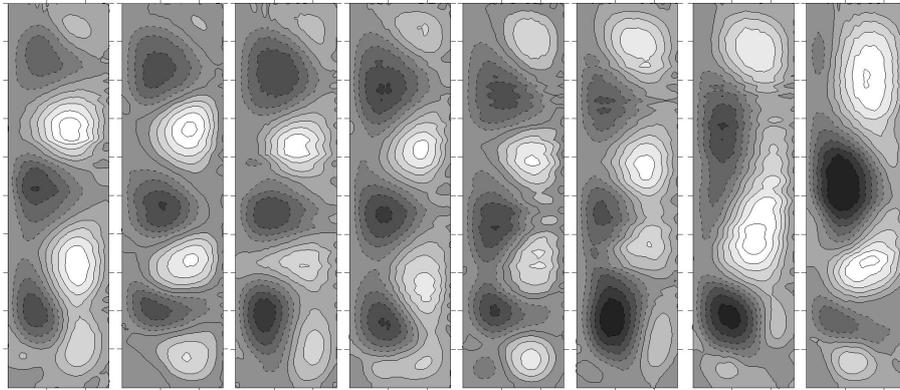
vortici, quindi, trasferisce energia dalle grandi alle piccole scale e gioca un ruolo fondamentale nella cascata di energia.

Lo stiramento dei vortici è, per sua natura, strettamente tridimensionale, ed è del tutto assente in un problema bidimensionale, in cui la vorticità non può che essere ortogonale al piano del moto e i vortici non possono venire stirati dal moto di grande scala. È quindi lecito attendersi che, in due dimensioni, la cascata di energia si sviluppi in modo diverso, lo spettro di Kolmogorov non sia valido, e in generale le caratteristiche della turbolenza siano diverse da quelle della turbolenza reale (tridimensionale).

In effetti, analisi teoriche (Lesieur, 1990), basate sul concetto di cascata di *enstrofia* (varianza della vorticità), prevedono per la turbolenza bidimensionale isotropa uno spettro energetico proporzionale a  $n^{-3}$  ( $n$  è il numero d'onda), più ripido dello spettro di Kolmogorov ( $n^{-5/3}$ ) previsto per la turbolenza isotropa tridimensionale, Fig. 4.3. Inoltre, la scala dissipativa prevista è dell'ordine di  $(\nu^3/\beta)^{1/6}$ , in cui  $\beta$  è un parametro che rappresenta la variazione per unità di tempo dell'enstrofia (in analogia alla dissipazione  $\varepsilon$  che rappresenta la variazione per unità di tempo dell'energia cinetica turbolenta  $k$ ), ed è quindi diversa, in generale, dalla scala dissipativa di Kolmogorov  $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ . Infine, è presente nella turbolenza bidimensionale forzata un fenomeno peculiare, detto *cascata inversa di energia*, per cui l'energia cinetica iniettata nel fluido a numero d'onda  $n_i$  diffonde verso numeri d'onda inferiori, determinando nella regione  $n < n_i$  uno spettro simile a quello tridimensionale ( $k \propto n^{-5/3}$ ), ma con trasferimento di energia meccanica dalle piccole alle grandi scale del moto.

A causa delle differenze descritte, le simulazioni numeriche bidimensionali di situazioni fisiche tridimensionali vanno accolte con cautela anche se, per la loro ridotta

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.8:** Funzione di corrente a istanti successivi nella convezione naturale a basso numero di Prandtl con generazione di calore in cavità rettangolare. Adattato da Di Piazza e Ciofalo (2000).

richiesta di risorse di calcolo, esse sono piuttosto diffuse (Paolucci, 1990; Nobile, 1996). Tali simulazioni, comunque, forniscono risultati del tipo di quelli riportati in Fig. 4.8 dove si vedono istantanee successive riferite alla convezione naturale di un metallo liquido in una cavità rettangolare con generazione interna di calore (Di Piazza e Ciofalo, 2000).

Va ricordato anche che esistono situazioni *fisiche* in cui la struttura della turbolenza, e più in generale del campo di moto, è effettivamente bidimensionale. Un esempio importante è il moto di un fluido fra pareti piane in presenza di una rapida rotazione  $\Omega$  ortogonale alle pareti stesse, di cui la turbolenza atmosferica di grande scala è una approssimazione (Hopfinger, 1987). Un secondo esempio riguarda il moto magnetoidrodinamico di un fluido conduttore in presenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}$  (Moreau, 1990). In entrambi i casi le forze di massa smorzano le fluttuazioni nella direzione parallela a  $\Omega$  o a  $\mathbf{B}$ , dando luogo a *turbolenza bidimensionale*.

#### 4.2.6 Turbolenza e attrattori strani

La teoria dei sistemi dinamici risale essenzialmente a Poincarè e ha, quindi, più di un secolo. Tuttavia, solo negli ultimi due o tre decenni è stato possibile indagare esplicitamente sulla struttura e le proprietà di sistemi dinamici non lineari. Un sistema dinamico *discreto* è definito da  $N$  grandezze  $\varphi_1 \dots \varphi_N$  le quali variano nel tempo secondo equazioni di evoluzione (in generale non lineari) del tipo:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta} = F(\varphi_1 \dots \varphi_N, \vartheta) \quad (4.21)$$

## 4.2. CARATTERISTICHE DELLA TURBOLENZA

(con  $i = 1 \dots N$ ). Un fluido in moto turbolento, descritto dalle Eq. (4.1)-(4.3), è in linea di principio un sistema dinamico *continuo* e possiede quindi infiniti gradi di libertà. Tuttavia, una qualunque rappresentazione numerica discreta del problema (basata, ad esempio, su  $M$  volumi finiti) è riconducibile all'evoluzione di un numero finito di variabili (ad esempio, le  $N = 5M$  variabili rappresentanti le tre velocità, la pressione e la temperatura in ogni volume). Inoltre, come si vedrà più avanti, una simulazione numerica basata su  $M$  volumi finiti può considerarsi completa purchè le dimensioni della griglia siano minori della scala di Kolmogorov  $\eta$  del problema.

Nello spazio delle fasi definito dagli  $N$  assi  $\varphi_1 \dots \varphi_N$  il sistema dinamico è rappresentato da un singolo punto, e la sua evoluzione descrive una traiettoria. Se il sistema è dissipativo, come avviene invariabilmente in fluidodinamica, è certo che, qualunque sia la condizione iniziale, la traiettoria finirà col ricadere in un sottoinsieme limitato dello spazio delle fasi, che è chiamato l'*attrattore* del sistema. Per una definizione rigorosa, si veda ad esempio Lanford (1981).

L'analisi classica aveva individuato alcuni semplici tipi di attrattori: *punti fissi*, caratteristici di stati stazionari; *orbite chiuse* (cicli limite), caratteristiche di sistemi periodici; e orbite aperte confinate su *tori*, caratteristiche di sistemi quasi-periodici che presentino più frequenze fra loro incommensurabili. Studiosi come Lorenz (1963) hanno individuato sistemi non lineari molto semplici i cui attrattori non ricadono nella classificazione di cui sopra; essi sono oggetti *frattali*, infinitamente complessi sebbene di misura nulla nello spazio delle fasi, e sono stati battezzati *attrattori strani*. L'evoluzione di un sistema dinamico su un attrattore strano presenta proprietà peculiari, fra cui la *sensibilità alle condizioni iniziali*: le traiettorie che partono da due punti arbitrariamente vicini divergono rapidamente, dando luogo a evoluzioni del tutto diverse nei dettagli. Strettamente connesso è il concetto di *caos deterministico*.

Tutti questi concetti possono essere meglio specificati in termini quantitativi solo introducendo nozioni quali la *dimensione frattale* dell'attrattore e gli *esponenti di Ljapunov* delle traiettorie. Nonostante la natura decisamente ardua della teoria sottostante, forse a causa del loro pregio estetico, gli attrattori strani sono stati oggetto negli ultimi anni di una esplosiva letteratura, anche divulgativa, e di innumerevoli applicazioni di *computer graphics*.

Quel che interessa qui sottolineare è che, a partire da un celebre lavoro di Ruelle e Takens (1971), la turbolenza idrodinamica è stata reinterpretata alla luce della teoria dei sistemi dinamici, sulla base di alcune intuizioni fondamentali:

- l'oggetto responsabile della turbolenza è un attrattore, di dimensionalità ragionevolmente piccola, immerso nel vasto spazio delle fasi del sistema dinamico che rappresenta il fluido;

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

- il moto sull'attrattore dipende in modo sensibile dalle condizioni iniziali;
- tale dipendenza spiega la natura caotica e apparentemente stocastica del moto turbolento.

Tuttavia, la speranza di Ruelle e Takens che - sulla falsariga del modello di Lorenz - *qualunque* problema turbolento potesse essere interpretato alla luce di un numero ragionevolmente piccolo di variabili, o gradi di libertà, si è rivelata eccessivamente ottimistica. Keefe e al. (1992), partendo da simulazioni numeriche dirette del moto turbolento di Poiseuille a numeri di Reynolds (basati su velocità media e semi-altezza del canale) di circa  $10^3$ , ed elaborandone i risultati alla luce della teoria degli esponenti di Ljapunov, hanno concluso che l'attrattore del sistema dinamico associato deve avere dimensionalità 352 (!). Tali risultati, confermano che la turbolenza nel moto sviluppato in canali è effettivamente *caos deterministico*, legato all'esistenza di un attrattore strano, ma, al tempo stesso, escludono, a causa della enorme dimensionalità di quest'ultimo, la possibilità di modellare il problema sulla base di pochi gradi di libertà, o di dedurre proprietà significative del moto da un'analisi diretta dell'attrattore.

### 4.3 SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA

In qualunque problema fluidodinamico, per risolvere in modo diretto le equazioni del moto occorre ricoprire il dominio di calcolo con un grigliato tridimensionale (discretizzazione spaziale) le cui maglie devono essere più piccole della scala delle strutture significative da risolvere. Inoltre, la simulazione deve essere eseguita con passi  $\Delta t$  (discretizzazione temporale) sufficientemente piccoli da seguire l'andamento nel tempo delle varie grandezze.

Se il numero di Reynolds (rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosi) è abbastanza piccolo, il moto è laminare e le strutture significative del campo di moto hanno dimensioni dello stesso ordine delle strutture fisiche presenti nel dominio di calcolo (pareti, ostacoli ecc.); inoltre, per condizioni al contorno invarianti nel tempo, il problema ammette quasi sempre una soluzione stazionaria o periodica (preceduta, eventualmente, da un transitorio iniziale secondo le condizioni iniziali scelte). In questo caso, quindi, è quasi sempre possibile raggiungere una sufficiente risoluzione spazio-temporale e ottenere una soluzione indipendente dalla discretizzazione usata.

Per valori elevati del numero di Reynolds, il moto del fluido diviene turbolento. In tal caso, il campo di moto è sempre variabile nel tempo (anche in presenza di condizioni al contorno stazionarie), dipende in modo critico dalle condizioni iniziali ed è privo (istante per istante) di simmetrie spaziali anche se il dominio di calcolo è

### 4.3. SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA

caratterizzato da simmetrie geometriche. Come si è discusso in precedenza, le strutture spaziali del campo di moto (vortici) coprono un intervallo di scale che si estende dalla scala del dominio fisico a quella dei vortici dissipativi di Kolmogorov (nei quali ha luogo la degradazione in calore dell'energia meccanica del fluido ad opera degli effetti viscosi). L'intervallo di scale cresce al crescere del numero di Reynolds e, per moti pienamente turbolenti, si estende, in genere, su diversi ordini di grandezza. Benché, come si è accennato, le equazioni del moto continuo a descrivere in linea di principio la fisica del problema, la loro soluzione diretta presenta gravi difficoltà che saranno discusse nel seguito.

#### 4.3.1 Requisiti di risoluzione per il moto turbolento di Poiseuille

Per fissare le idee, si consideri un canale indefinito limitato da pareti piane parallele, all'interno del quale scorra un fluido in moto turbolento (moto di Poiseuille turbolento). Per studiare tale sistema, è possibile individuare come dominio di calcolo un tratto di canale le cui caratteristiche si assumano ripetersi periodicamente nello spazio. Le dimensioni del dominio devono essere tali da rendere trascurabili le correlazioni fra le variabili sui contorni opposti del dominio stesso; ciò equivale a richiedere che tali dimensioni siano grandi rispetto alle strutture turbolente.

Più precisamente, si fissi una terna cartesiana avente l'asse  $x$  nella direzione del moto, l'asse  $y$  ortogonale alle pareti e, ovviamente, l'asse  $z$  ortogonale a  $x$  e  $y$ ; sia inoltre  $\delta$  la semialtezza del canale (Fig. 4.9). Le dimensioni del dominio possono esprimersi come  $L_x = K_x \delta$ ,  $L_y = 2\delta$ ,  $L_z = K_z \delta$ . Ricerche sperimentali (Comte-Bellot, 1963) hanno mostrato che le correlazioni statistiche fra grandezze istantanee diventano trascurabili a distanze dell'ordine di  $4\delta$  nella direzione longitudinale  $x$  e  $2\delta$  nella direzione trasversale  $z$ . Pertanto, si deve assumere  $K_x \geq 4$ ,  $K_z \geq 2$  e, siccome dimensioni maggiori del dominio di calcolo migliorano le statistiche e la qualità generale delle simulazioni, è opportuno che i valori di  $K_x$  e  $K_z$  siano alquanto maggiori di tali minimi.

Inoltre, conviene introdurre, come scala di parete delle velocità, la velocità di attrito

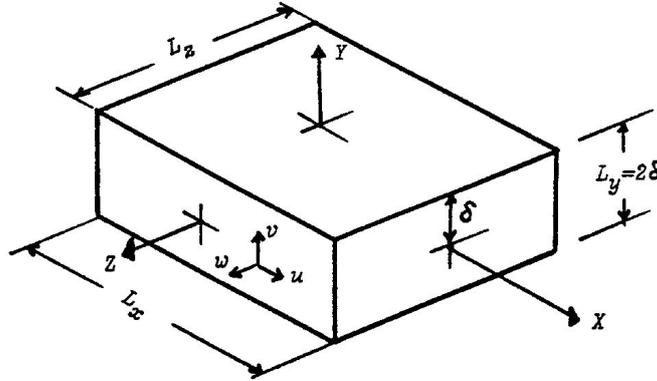
$$u_\tau = (|\tau_w|/\rho)^{1/2} \quad (4.22)$$

in cui  $\rho$  è la densità del fluido e  $|\tau_w|$  è il valore assoluto dello sforzo tangenziale d'attrito alla parete, a sua volta legato al gradiente di pressione longitudinale  $\partial p/\partial x$  da

$$|\tau_w| = \delta \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \quad (4.23)$$

La velocità di attrito dà anche l'ordine di grandezza delle fluttuazioni turbolente di velocità. Sulla base delle definizioni, la velocità di attrito  $u_\tau$  e la velocità media  $U$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.9:** Dominio di calcolo per la simulazione del moto di Poiseuille turbolento.

sono legate fra loro attraverso il coefficiente di attrito di Fanning  $C_f$  dalla relazione

$$u_\tau = \left( \frac{C_f}{2} \right)^{1/2} U \quad (4.24)$$

Di conseguenza, per valori tipici:  $C_f \approx 0.005$  si ha  $u_\tau \approx U/20$ .

Similmente, accanto al numero di Reynolds di *bulk*  $Re = UD_{eq}/\nu$  (basato sulla velocità media e sul diametro idraulico, che per un canale piano è pari a  $4\delta$ ) è opportuno introdurre il numero di Reynolds di attrito  $Re_\tau = u_\tau/\nu$  (basato sulla velocità di attrito e sulla semialtezza del canale). Sempre per  $C_f \approx 0.005$ , tenendo conto delle definizioni si ha quindi:  $Re_\tau \approx Re/80$ .

La durata  $\vartheta_{TOT}$  della simulazione deve rappresentare lo stato statisticamente stazionario del sistema e, di conseguenza, deve essere multipla della massima costante di tempo attesa nell'andamento temporale delle diverse grandezze fluidodinamiche. Tale costante di tempo è detta *Large Eddy TurnOver Time (LETOT)* e corrisponde alla vita media delle più grandi strutture turbolente (vortici). Per il canale piano essa può assumersi pari a  $\delta/u_\tau$  e, pertanto, sulla base delle definizioni riportate, può esprimersi come

$$1 \text{ LETOT} \approx \frac{\delta^2}{\nu} \frac{1}{Re_\tau} \quad (4.25)$$

Si può quindi stimare per  $\vartheta_{TOT}$  l'ordine di grandezza:

$$\vartheta_{TOT} \approx K_\vartheta \frac{\delta^2}{\nu} \frac{1}{Re_\tau} \quad (4.26)$$

### 4.3. SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA

con  $K_\vartheta \geq 10$ .

Una stima del numero di nodi e del passo temporale necessari può compiersi ora a partire dalle scale di Kolmogorov dei vortici dissipativi (4.4), (4.20). Nel caso considerato, la dissipazione di energia turbolenta può identificarsi in pratica con la dissipazione totale di energia meccanica per unità di massa, e questa può calcolarsi a partire dalla velocità media  $U$  e dallo sforzo di parete  $\tau_w$ :

$$\varepsilon = \frac{U\tau_w}{\rho\delta} \quad (4.27)$$

Usando le espressioni sopra riportate per  $Re_\tau$  e  $\tau_w$  e assumendo ancora  $U \approx 20u_\tau$ , le (4.4) e (4.20) diventano nel caso specifico

$$\text{Lunghezza : } \eta \approx 0,5 \delta Re_\tau^{-3/4} \quad (4.28)$$

$$\text{Frequenza : } f_K \approx 40(\nu/\delta^2) Re_\tau^{7/4} \quad (4.29)$$

È necessario che le dimensioni  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  delle maglie nelle tre direzioni siano al più dell'ordine di  $\eta$ , e che il passo temporale  $\Delta\vartheta$  sia al più dell'ordine di  $\vartheta_K = 1/f_K$ . Si ottiene pertanto:

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \leq 0,5\delta Re_\tau^{-3/4} \quad (4.30)$$

$$\Delta\vartheta \leq 0,025(\delta^2/\nu) Re_\tau^{-7/4} \quad (4.31)$$

È facile verificare che, sulla base delle definizioni e delle assunzioni sopra riportate, le (4.30)-(4.31) implicano *al limite* il criterio di Courant:  $\Delta\vartheta < (\Delta x/U)$  (Roache, 1972). Quest'ultimo è un requisito di *stabilità* se si adotta uno schema di avanzamento temporale esplicito, ma rimane comunque un criterio di *accuratezza* anche se si adottano schemi impliciti incondizionatamente stabili.

Dalla (4.30) e dalle definizioni si ottiene ora il numero *minimo* di punti di griglia:

$$N_p = \frac{L_x}{\Delta x} \frac{L_y}{\Delta y} \frac{L_z}{\Delta z} \geq 16K_x K_z Re_\tau^{9/4} \quad (4.32)$$

mentre dalle (4.26) e (4.31) si ottiene il numero *minimo* di passi temporali:

$$N_\vartheta = \frac{\vartheta_{TOT}}{\Delta\vartheta} \geq 40K_\vartheta Re_\tau^{3/4} \quad (4.33)$$

Una stima più accurata di  $N_p$  e  $N_\vartheta$  (che, comunque, porta a risultati confrontabili), può essere condotta tenendo conto esplicitamente della variazione di  $C_f$  con  $Re_\tau$  e della disuniformità della turbolenza nelle regioni di parete (Grötzbach, 1986; Zuniga Zamalloa, 2012). Le (4.32)-(4.33) mostrano chiaramente come lo sforzo computazionale cresca rapidamente al crescere del numero di Reynolds di attrito. In particolare,

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

assumendo (ottimisticamente) che il tempo di calcolo per passo dipenda linearmente dal numero di nodi, il tempo di calcolo totale risulterà proporzionale a  $N_p N_\vartheta$  e crescerà quindi come  $Re_\tau^3$ .

Per fissare le idee, si assuma:  $K_x = 8$ ,  $K_z = 4$ ,  $K_\vartheta = 20$ . Le Eq. (4.32)-(4.33) danno allora  $N_p \geq 512 Re_\tau^{9/4}$  e  $N_\vartheta \geq 800 Re_\tau^{3/4}$ . Per  $Re_\tau = 100$ , che corrisponde a  $Re \approx 8000$  (moto debolmente turbolento), occorrono almeno 16 milioni di nodi e  $25 \cdot 10^3$  passi temporali, un onere computazionale ancora alla portata di un odierno (2014) PC multi-core purché si sia disposti a impiegare tempi di calcolo dell'ordine, probabilmente, di settimane o mesi. Se però si passa a  $Re_\tau = 1000$ , che corrisponde a  $Re \approx 80 \cdot 10^3$  (moto pienamente turbolento),  $N_p$  e  $N_\vartheta$  crescono rispettivamente 178 volte e 5.6 volte, raggiungendo i 2.8 miliardi di nodi e i  $140 \cdot 10^3$  passi temporali e rendendo quindi la simulazione accessibile solo a potenti cluster con parallelismo su larga scala.

Più precisamente si può stimare che, a patto di utilizzare codici ottimizzati per la DNS di canali piani (in quanto basati, ad esempio, su metodi spettrali), il numero di operazioni elementari in virgola mobile sia dell'ordine di  $10^4$  per nodo e per passo temporale. Le stime sopra riportate danno allora un numero totale minimo di operazioni in virgola mobile:  $N_{flop} = 10^4 N_p N_\vartheta \approx 4 \cdot 10^9 Re_\tau^3$ . Detta  $R$  la velocità massima teorica di calcolo di una macchina, espressa in numero di operazioni in virgola mobile al secondo (*flops*, o floating point operations per second), la velocità effettiva sarà:  $\chi R$  (in cui l'efficienza  $\chi$  sarà, tipicamente, del 10-20% tenendo conto della parallelizzazione, dei tempi di I/O e così via). Pertanto, il tempo totale di calcolo in secondi  $tt$  (*throughput time*) sarà

$$tt \approx 4 \cdot 10^9 Re_\tau^3 / (\chi R) \quad (4.34)$$

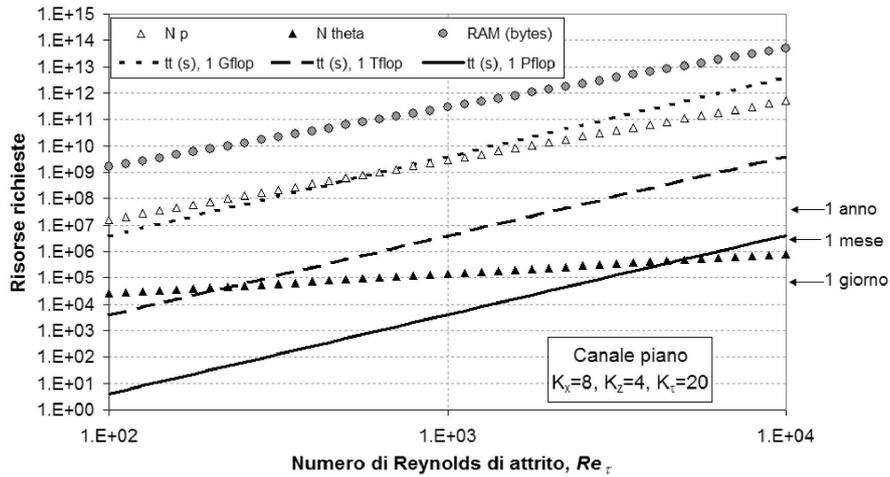
Si può inoltre stimare che il numero minimo di variabili in memoria RAM sia dell'ordine di 25 per nodo. Pertanto, supponendo di usare semplice precisione con 4 bytes per variabile, la memoria RAM impiegata, misurata in bytes, sarà

$$RAM \approx 5 \cdot 10^4 Re_\tau^{9/4} \quad (4.35)$$

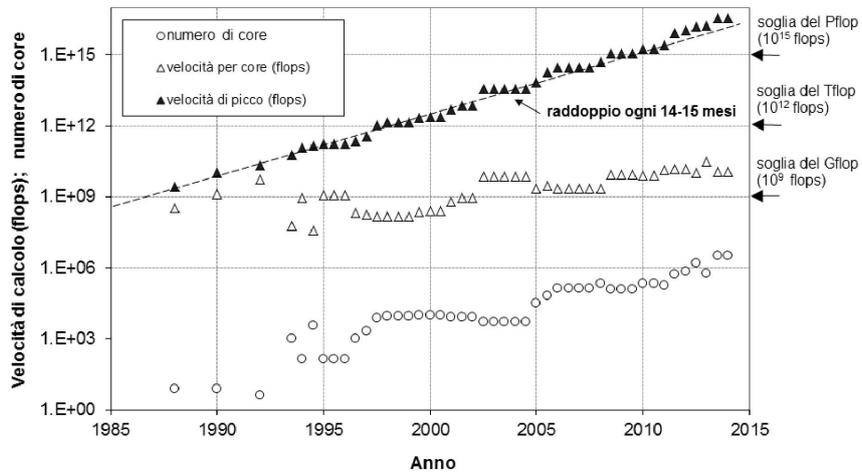
Al momento (2014), per un comune PC multi-core si può assumere  $\chi R = 2 \cdot 10^9$  (2 Gflops) per cui, nell'esempio sopra citato con  $Re_\tau = 100$ , si avrà  $tt \approx 2 \cdot 10^6$  s (23 giorni),  $RAM \approx 1.6 \cdot 10^9$  bytes (1.6 Gbytes). Per i più avanzati *supercluster* esistenti si può assumere  $\chi R = 1 \cdot 10^{15}$  (1 Pflop – si legga "petaflop") per cui, nell'esempio con  $Re_\tau = 1000$ , si avrà  $tt \approx 4 \cdot 10^3$  s (poco più di un'ora) e  $RAM \approx 2.8 \cdot 10^{14}$  bytes (280 Tbytes), requisiti non proibitivi per tali macchine.

La Fig. 4.10 (a) riassume l'andamento di  $N_p$ ,  $N_\vartheta$ ,  $RAM$  e tempo di calcolo complessivo, calcolati con le formule sopra riportate, in funzione del numero di Reynolds

### 4.3. SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA



(a)



(b)

**Figura 4.10:** (a) Risorse di calcolo richieste per la simulazione numerica diretta (DNS) del moto turbolento in un canale piano in funzione del numero di Reynolds e (b) evoluzione della velocità di calcolo nel tempo.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

di attrito ( $Re_\tau$ ) sotto tre diverse ipotesi per la velocità di calcolo effettiva: 1 Gflop, 1 Tflop e 1 Pflop.

Per valutare la fattibilità passata, presente e futura di una simulazione DNS, le stime sopra ricavate vanno messe a confronto con le prestazioni dei calcolatori. La Fig. 4.10 (b) riporta, dal 1985 ad oggi, le prestazioni di calcolo di punta a livello mondiale: numero di *core*, velocità di calcolo per singolo *core* espressa in *flops* e velocità di calcolo complessiva teorica ( $R$ , sempre espressa in *flops*). Come sopra ricordato, la velocità effettiva dipende dalla natura del problema studiato (in particolare, dalla facilità di parallelizzazione) e, per problemi di CFD, spesso non supera il 5% (Lee et al., 2013).

Il grafico mostra che, a partire dagli anni 1990, il tasso di crescita della velocità di calcolo dei singoli processori ha avuto un netto calo rispetto al passato. Tuttavia, contemporaneamente si è introdotto l'utilizzo di *cluster* di processori (spesso a loro volta *multi-core*) in parallelo, dalle poche centinaia di *core* del Numerical Wind Tunnel della Fujitsu (anni 1990) alle migliaia della serie ASCI (anni intorno al 2000) e infine ai milioni dei più potenti superclusters attuali (il primato è attualmente detenuto dalla macchina cinese Tianhe-2 con 3.12 milioni di *core*). Come effetto combinato della (debole) crescita della velocità di calcolo per *core* e della (forte) crescita del numero di *core*, le prestazioni di punta hanno continuato a crescere fino ad oggi (2014) con un tasso simile a quello osservato per tutti gli anni 1970 e 1980, ovvero caratterizzato da un raddoppio ogni 14-15 mesi. (Tale andamento è spesso impropriamente chiamato *legge di Moore*, ma in realtà quest'ultima prevedeva un raddoppio ogni due anni del numero di transistor per chip, un parametro solo indirettamente legato alla potenza di calcolo).

Così, la soglia del Gflops ( $10^9$  operazioni in virgola mobile al secondo) è stata superata nel 1988 (dal Cray-2), quella del Tflops ( $10^{12}$  flops) nel 1997 (da ASCI Red della Intel) e quella del Pflops ( $10^{15}$  flops) nel 2008 (dal computer Roadrunner del DOE). Il già citato Tianhe-2 offre velocità teoriche di circa 34 Pflops. Ovviamente è cresciuta pure la memoria RAM complessiva disponibile, dai 2 Gbyte del Cray-2 agli 1.4 Pbyte di Tianhe-2 (con un tasso di crescita meno rapido di quello della velocità di calcolo).

È chiaro quindi che le frontiere del fattibile in DNS (e in CFD in generale) si stanno spostando rapidamente in avanti. Una DNS a  $Re_\tau = 10^3$  implica  $\propto 4 \cdot 10^{18}$  operazioni in virgola mobile; sui più potenti calcolatori esistenti essa avrebbe richiesto mille anni (anni di macchina, non di *core*!) nel 1988 ( $R = 1$  Gflops) e un anno nel 1998 ( $R = 1$  Tflops), risultando praticamente proibitiva. Successivamente, una tale simulazione è stata effettivamente realizzata già nei primi anni 2000 da Del Alamo et al. (2004), e oggi richiede non più di una o due ore sui più potenti cluster.

### 4.3. SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA

Ovviamente, le capacità massime di calcolo, proprie delle più potenti macchine esistenti, non esauriscono il problema: resta da vedere quali prospettive vi siano per calcoli di livello che potremmo chiamare *dipartimentale*, cioè alla portata di un dipartimento universitario tipico o di una media impresa dove si faccia CFD. È necessario allora considerare non solo tempi e risorse, ma anche, in modo essenziale, i *costi* del calcolo.

Esprimendo per uniformità i costi in dollari e considerando solo costi effettivi commerciali, effettuare  $4 \cdot 10^{15}$  operazioni in virgola mobile (corrispondenti all'intera simulazione a  $Re_\tau = 100$  presa ad esempio più sopra) costa oggi circa 30 \$ sia che lo si faccia su PC o piccoli cluster di scala dipartimentale (la simulazione richiederà allora da giorni a settimane), sia che lo si faccia su un *supercomputer* fra i più avanzati (la simulazione richiederà allora pochi secondi). Nel 1990, la stessa simulazione sarebbe stata praticamente fattibile solo impegnando per diversi mesi un supercomputer del livello del Cray-YMP, a un costo dell'ordine di alcuni milioni di dollari. Quindi, negli ultimi 24 anni il costo per operazione (ovvero per simulazione) è diminuito di un fattore dell'ordine di  $10^5$ , con un tasso corrispondente a un dimezzamento dei costi ogni 17-18 mesi, solo leggermente più lento del tasso di aumento delle prestazioni (raddoppio in 14-15 mesi). Si può anche dire, tenendo conto delle correlazioni ricavate in precedenza, che il valore di  $Re_\tau$  accessibile a un dato costo aumenta di un fattore 10 ogni 15 anni. Se è lecito estrapolare al prossimo futuro, entro il 2030 dovrebbe essere possibile condurre, allo stesso costo di 30 \$, quella simulazione a  $Re_\tau = 1000$  che oggi costa circa  $30 \cdot 10^3$  \$.

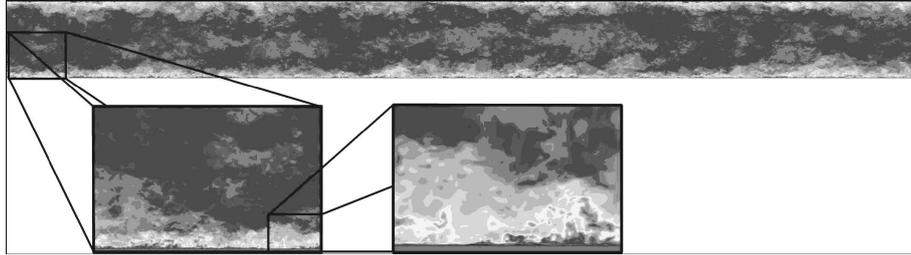
Si noti che dalle stime citate si sono esclusi i costi per l'immagazzinamento dei risultati che, ovviamente, possono facilmente eccedere i costi puri della simulazione se si desidera conservare in modo permanente diversi Tbyte di dati.

#### 4.3.2 Un esempio di simulazione diretta della turbolenza

Le DNS più spinte finora (2014) realizzate (per numero di Reynolds, griglia di calcolo e risorse computazionali) sono quelle condotte da Lee e al. (2013) dell'Università del Texas. Gli autori hanno simulato il moto turbolento incomprimibile a  $Re_\tau = 5200$  in un canale piano del tipo rappresentato in Fig. 4.9 con condizioni al contorno longitudinali e laterali periodiche usando metodi spettrali (espansione in serie di Fourier lungo le direzioni omogenee  $x$  e  $z$  e funzioni *basis-spline* di settimo ordine lungo  $y$ ). Le dimensioni del dominio di calcolo erano  $L_x = 24\delta$ ,  $L_z = 16\delta$  e, ovviamente,  $L_y = 2\delta$  (che nella terminologia del paragrafo precedente, corrispondono a  $K_x = 24$  e  $K_z = 16$ ).

A parte alcune simulazioni preliminari, condotte con griglie sia più grossolane sia più fini, la simulazione principale è stata condotta usando 10240 modi di Fourier

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.11:** DNS del moto in canale piano per  $Re_\tau = 5200$ : distribuzione istantanea della velocità lungo  $x$  su una sezione longitudinale del piano  $xy$  del condotto. Zoom successivi consentono di apprezzare il livello di dettaglio dei risultati. Adattato da (Lee e al., 2013).

lungo  $x$ , 7680 modi di Fourier lungo  $z$  e 1536 nodi di interpolazione lungo  $y$ . Per ragioni che gli specialisti di metodi spettrali chiamano *de-aliasing*, il numero di punti di collocazione, o quadratura, nelle direzioni omogenee  $x$  e  $z$  deve essere pari a  $3/2$  volte il numero di modi di Fourier risolti, per cui i *gradi di libertà* DOF (ovvero *Degrees Of Freedom*) corrispondenti alla griglia sopracitata sono:  $N_x = 15360$ ,  $N_y = 1536$  e  $N_z = 11520$ , per un totale  $N_p = N_x N_y N_z \approx 240 \cdot 10^9$  DOF. Questo numero supera di 15 volte quello relativo alla precedente più spinta DNS in canali piani, condotta da Hoyas e Jiménez (2006) per  $Re_\tau \approx 2000$ . Ciò nonostante, la risoluzione spaziale non soddisfa, a rigore, i requisiti discussi in precedenza: infatti, per  $Re_\tau = 5.200$ ,  $N_x = 24$  e  $N_z = 16$ , l'Eq. (4.32) dà  $N_p \geq 1.4 \cdot 10^{12}$ , molto maggiore dei presenti  $240 \cdot 10^9$  DOF pur tenendo conto della grande accuratezza intrinseca dei metodi spettrali.

Per quel che riguarda il tempo, la simulazione di Lee e al. (2013) ha incluso 13 *flow-through times* (*tempi di attraversamento* del condotto da parte del fluido, molto prossimi ai *LETOT* nella configurazione studiata), ciascuno risolto da  $50 \cdot 10^3$  passi temporali, per un totale di  $650 \cdot 10^3$  passi. Anche la durata della simulazione è inferiore a quella (20 *LETOT*) usualmente ritenuta necessaria per la convergenza statistica dei risultati, ma questo è in parte compensato dalle dimensioni del dominio di calcolo, più ampie di quelle ipotizzate nel paragrafo precedente.

I risultati della simulazione sono illustrati nella Fig. 4.11 dove la distribuzione istantanea della velocità lungo  $x$  è riportata su una sezione longitudinale sul piano  $xy$  dell'intero condotto insieme con ingrandimenti successivi di alcuni particolari che consentono di apprezzare il livello di dettaglio dei risultati.

La simulazione è stata condotta utilizzando oltre  $500 \cdot 10^3$  dei  $760 \cdot 10^3$  *core* del supercomputer Mira degli Argonne National Laboratories di Chicago, che offre velocità di picco di circa 10 Pflops. La velocità effettiva di calcolo è stata molto più bassa,

dell'ordine di 270 Tflops, con un'efficienza inferiore al 3%. Il tempo di calcolo complessivo è stato dell'ordine di 260 milioni di *ore-core*, per cui il *throughput time* è stato:  $tt \approx 500$  ore (circa 3 secondi per passo temporale). In termini economici, stimando in circa  $10^4$  \$/ora il costo reale di Mira, gli autori hanno utilizzato risorse equivalenti a 5 Milioni di dollari per questa sola simulazione!

Lo scopo dichiarato della ricerca è stato quello di chiarire la dinamica della turbolenza nella regione buffer esistente fra il substrato viscoso e il *core-flow*, regione che acquista una significativa estensione spaziale ed una significativa rilevanza solo per numeri di Reynolds sufficientemente elevati. Tuttavia, si è trattato anche (abbastanza esplicitamente) di una spettacolare dimostrazione delle potenzialità odierna del supercalcolo quando venga applicato a problemi come la turbolenza idrodinamica.

## 4.4 LARGE EDDY SIMULATION

### 4.4.1 Aspetti generali: filtraggio e decomposizione

La *Large Eddy Simulation*, o LES (termine che possiamo liberamente tradurre come *simulazione a grandi vortici*) è un approccio alla modellazione della turbolenza basato sul filtraggio *spaziale* del campo di moto. La giustificazione teorica di tale approccio poggia sulla constatazione che in un moto turbolento le strutture di più grande scala (grandi vortici), che sono le principali responsabili del trasporto convettivo di quantità di moto, energia turbolenta e campi scalari, non si prestano ad essere modellate in forma generale (in quanto sono altamente anisotrope e variano considerevolmente da moto a moto), e vanno quindi preferibilmente simulate in modo esplicito; mentre le strutture di piccola scala, prossime alla soglia dissipativa di Kolmogorov, sono tendenzialmente isotrope e universali (indipendenti cioè dallo specifico problema), per cui si prestano meglio ad essere modellate in modo semplificato.

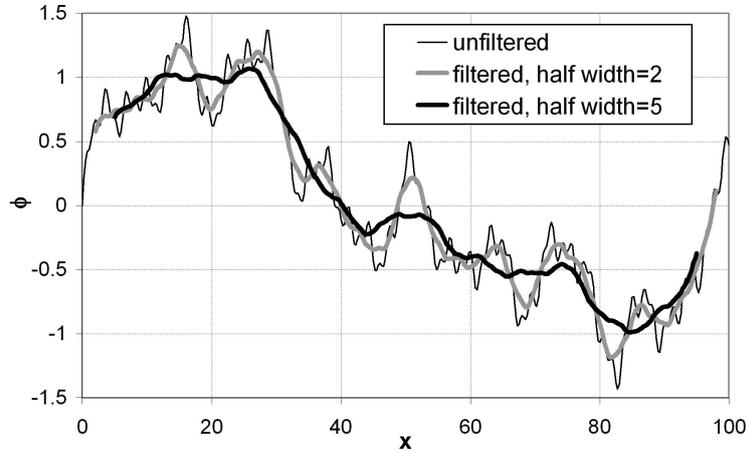
In LES, si introduce innanzitutto una funzione di *filtro spaziale*  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , formalmente funzione delle sei coordinate dei punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  ma spesso funzione solo della distanza  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ; l'applicazione del filtro alla generica grandezza  $\varphi(\mathbf{x}, \vartheta)$  genera una scomposizione di  $\varphi$  in componente *filtrata*, o *risolta*:

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) \rangle = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}, \vartheta) d^3y \quad (4.36)$$

dove le parentesi angolate indicano i valori medi, e componente *residua*, o *irrisolta*:

$$\varphi'(\mathbf{x}, \vartheta) = \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) - \langle \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) \rangle \quad (4.37)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.12:** Effetto dell'applicazione di filtri spaziali  $G$  di diversa semiampiezza ad una generica grandezza  $\varphi$ .

È cruciale qui che il filtro sia un *operatore lineare*. Un esempio della applicazione di un filtro a una generica grandezza  $\varphi$  (supposta per semplicità funzione di una sola variabile spaziale  $x$ ) è riportato in Fig. 4.12.

La grandezza non filtrata è definita fra  $x = 0$  e  $x = 100$  e in essa sono presenti lunghezze d'onda  $\Lambda$  da 0.5 a 50 (cioè numeri d'onda  $n$  da 0.02 a 2). Il filtro è costituito qui da una semplice media corrente fra  $x - \Delta/2$  e  $x + \Delta/2$ ; il suo effetto è mostrato per due valori di  $\Delta/2$ , 2 e 5. L'applicazione del filtro fa scomparire dettagli di lunghezza d'onda minore di  $\Delta$ , conservando l'andamento di grande scala della funzione  $\varphi$ . È importante notare che la funzione filtrata  $\langle \varphi \rangle$  è ancora una *funzione continua*, definita nell'intero dominio di definizione di  $\varphi$  a meno delle regioni di confine.

Differenti funzioni filtro  $G$  sono state proposte e utilizzate in LES. È opportuno considerare l'effetto della generica  $G$  sia nello spazio fisico, o di configurazione, delle coordinate ( $\mathbf{x}$ ) che nel corrispondente spazio trasformato, o di Fourier, dei numeri d'onda ( $\mathbf{n}$ ). Tre funzioni  $G$  alternative sono mostrate schematicamente in Fig. 4.13; in tre dimensioni, le loro forme analitiche sono:

- Filtro a scatola (*box*, o *top-hat*), definito nello spazio fisico  $\mathbf{x}$  come:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/\Delta^3 \quad \text{se } |x_i - y_i| \leq \Delta/2 \quad (i = 1,2,3) \quad (4.38)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{altrimenti} \quad (4.39)$$

- Filtro *passa-basso* (*sharp cutoff*), definito nello spazio  $\mathbf{n}$  come:

$$G(\mathbf{n}) = 1 \quad \text{se } |n_i| \leq \pi/\Delta \quad (i = 1,2,3) \quad (4.40)$$

$$G(\mathbf{n}) = 0 \quad \text{altrimenti} \quad (4.41)$$

- Filtro *gaussiano*, definito nello spazio fisico  $\mathbf{x}$  come:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta} \right)^3 \exp \left[ -\frac{1}{\Delta^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \right] \quad (4.42)$$

e nello spazio trasformato  $\mathbf{n}$  dei numeri d'onda come:

$$G(\mathbf{n}) = \exp \left( -\frac{\Delta^2 n^2}{4} \right) \quad (4.43)$$

Si riconoscerà che il filtro gaussiano è l'unico a rimanere della stessa forma anche nello spazio  $\mathbf{n}$ ; i filtri a scatola e passa-basso possono considerarsi filtri *duali* se visti rispettivamente nello spazio fisico e nello spazio trasformato.

Con riferimento al tipico spettro schematizzato in Fig. 4.3, la larghezza  $\Delta$  del filtro spaziale andrebbe scelta in modo da ricadere nel subrange inerziale della turbolenza. Valori di  $\Delta$  inferiori a  $\eta$  corrisponderebbero in pratica alla simulazione diretta, mentre valori troppo elevati e prossimi alle grandi scale  $L$  lascerebbero fra i termini irrisolti gli effetti dei grandi vortici, troppo legati alla geometria dello specifico problema per essere modellati in modo universale.

#### 4.4.2 Filtraggio delle equazioni di governo

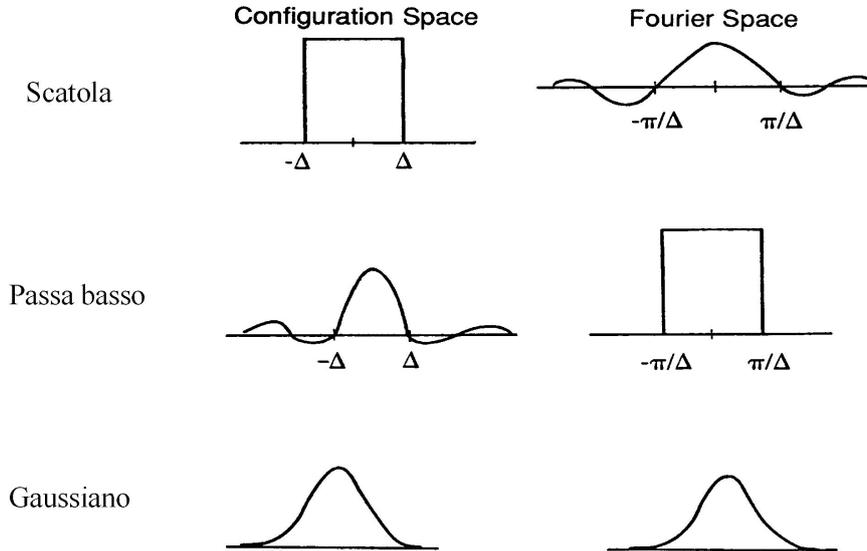
Si consideri innanzitutto l'equazione di continuità (4.1). Nel caso di flussi *incompressibili*, una volta filtrata essa si riduce banalmente a:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (4.44)$$

la quale esprime la condizione che anche il campo di velocità filtrato sia, come quello primitivo, solenoidale. La LES di flussi *compressibili* è meno sviluppata e richiede una versione del cosiddetto *filtraggio di Favre* (Erlebacher e al., 1992).

Si consideri ora la generica equazione della quantità di moto (4.2). Si scomponga ciascuna velocità in una componente media più una fluttuante:  $u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$ , e si faccia lo stesso con la pressione  $p$ ; si filtri infine l'equazione stessa, tenendo

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.13:** Filtri spaziali alternativi nello spazio fisico, o di configurazione,  $\mathbf{x}$  (a sinistra) e nello spazio trasformato, o di Fourier,  $\mathbf{n}$  (a destra).

conto della commutatività fra filtraggio e derivate parziali e considerando costanti le proprietà fisiche  $\rho, \mu$ . Il risultato è:

$$\frac{\partial \rho \langle u_i \rangle}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \rho \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.45)$$

cioè un'equazione formalmente simile all'equazione primitiva di Navier-Stokes (4.2), salvo che:

- le funzioni incognite non sono velocità e pressione primitive, ma le loro versioni *filtrate*;
- compaiono al membro destro, come termini di sorgente, i gradienti degli *sforzi addizionali*  $\tau_{ij}$ , che nascono dalla non-linearità dell'Eq. (4.2).

Eseguendo dettagliatamente i vari passaggi sopra delineati, si dimostra facilmente che gli sforzi addizionali  $\tau_{ij}$  possono scriversi formalmente come:

$$\tau_{ij} = \rho (\langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = \rho (L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}) \quad (4.46)$$

in cui i tre termini  $L_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $R_{ij}$  sono rispettivamente detti:

$$\text{termini di Leonard} \quad L_{ij} = \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (4.47)$$

$$\text{termini incrociati} \quad C_{ij} = \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle + \langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle \quad (4.48)$$

$$\text{termini irrisolti} \quad R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle \quad (4.49)$$

Si noti che i termini di Leonard contengono solo grandezze filtrate (risolte) e non richiedono quindi alcuna modellazione, mentre i termini incrociati contengono una combinazione di grandezze risolte e irrisolte. Leonard (1974) ha dimostrato che, usando il filtro gaussiano, i termini che portano il suo nome ed i termini incrociati possono approssimarsi come segue:

$$L_{ij} \approx (\Delta^2/24) \nabla^2 (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) \quad (4.50)$$

$$C_{ij} \approx (\Delta^2/24) [\langle u_i \rangle \nabla^2 \langle u_j \rangle + \langle u_j \rangle \nabla^2 \langle u_i \rangle] \quad (4.51)$$

I termini  $R_{ij}$ , invece, costituiscono veri e propri sforzi irrisolti, analoghi agli sforzi di Reynolds dei modelli convenzionali di turbolenza, e non possono essere espressi a partire dai termini risolti se non sotto certe ipotesi fisiche, dando luogo a un vero e proprio *problema di chiusura* delle equazioni LES. Va detto che la distinzione fra termini di Leonard, incrociati, e irrisolti dà luogo a complessi e sottili problemi di coerenza e invarianza delle equazioni filtrate ed è stata oggetto di innumerevoli discussioni (Speziale, 1985; Germano, 1992). Come conseguenza, alcuni autori hanno preferito modellare globalmente i termini addizionali  $L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$ , o almeno le somme  $C_{ij} + R_{ij}$ , piuttosto che i soli termini irrisolti  $R_{ij}$ .

Nell'ambito dei metodi di calcolo ai volumi finiti, una notevole semplificazione si realizza se si identifica il filtro spaziale con la media su ciascun volume, implicita nel processo stesso di discretizzazione, indipendentemente dal modello di turbolenza. In tal caso, infatti, i termini di Leonard e incrociati vanno a zero e gli sforzi addizionali si riducono ai soli termini irrisolti  $R_{ij}$  che così possono, a buon diritto, chiamarsi termini *sub-grid*. Il prezzo da pagare è che le funzioni filtrate cessano di essere vere e proprie funzioni continue su tutto il dominio di calcolo, e restano definite solo nei centri dei singoli volumi finiti. Inoltre, il metodo è applicabile in modo semplice solo a griglie cartesiane uniformi, per le quali il filtro spaziale non dipende dalla posizione, mentre, nel caso di griglie selettivamente infittite o *body-fitted*, nascono nelle equazioni filtrate complessi termini addizionali (Schumann, 1975). Nel seguito, per evidenti ragioni di semplicità non ci occuperemo ulteriormente dei termini misti di Leonard  $L_{ij}$  e incrociati  $C_{ij}$  e, quindi, assumeremo che gli sforzi addizionali *globali* siano dati, essenzialmente, dai termini irrisolti, ovvero che si abbia

$$\tau_{ij} \approx R_{ij} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle \quad (4.52)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

e che, di conseguenza, i termini  $\tau_{ij}$ , definiti dalla (4.52), rappresentino gli sforzi turbolenti.

Manipolazioni simili a quelle descritte per le equazioni di Navier-Stokes (4.2) possono essere ripetute per l'equazione di trasporto del calore (4.3). Si dimostra facilmente che ciò conduce a:

$$\frac{\partial \rho c_p \langle t \rangle}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \rho c_p \langle u_j \rangle \langle t \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \lambda \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \quad (4.53)$$

in cui i termini  $q_j$  rappresentano flussi termici addizionali i quali, a parte contributi misti del tipo di  $L_{ij}$  e  $C_{ij}$ , sono dati essenzialmente dalle correlazioni di velocità e temperature irrisolte

$$q_j \approx \rho c_p \langle u_j' t' \rangle \quad (4.54)$$

Per questo motivo i termini  $q_j$ , definiti dalla (4.54) sono, generalmente, detti flussi termici turbolenti.

#### 4.4.3 Il modello *sub-grid* di Smagorinsky

I termini addizionali (sforzi e flussi) vanno ora modellati per ottenere la chiusura del sistema di equazioni LES. I termini addizionali sono chiamati, per consolidata abitudine, termini *sub-grid*; va però chiarito che una dizione più esatta sarebbe quella di termini *sub-filter*, poiché, concettualmente, la griglia di calcolo può essere molto più fine dell'ampiezza del filtro usato. Ovviamente, come si è accennato sopra, filtro e griglia coincidono se si adotta la media su volumi finiti come filtro implicito.

Un'ampia classe di modelli è basata sulla ipotesi di Bousinesq, secondo la quale la parte deviatorica del tensore degli sforzi addizionali è proporzionale alla parte deviatorica del tensore della velocità di deformazione di grande scala:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\mu_s \left[ \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle S_{kk} \rangle \right] \quad (4.55)$$

Qui  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker; il termine  $\mu_s$  è detto *viscosità sub-grid* ed è, in generale, funzione di  $\langle S_{ij} \rangle$  o altre variabili del moto, secondo una legge da definire.

L'ipotesi di Boussinesq è basata sulla analogia fra sforzi (flussi) irrisolti e flussi molecolari, e poggia in ultima analisi sull'idea che i vortici turbolenti irrisolti si muovano di moto *diffusivo* (browniano) come, su scala più piccola, le molecole del fluido. I modelli descritti dalla Eq. (4.55) si dicono basati sull'*ipotesi di diffusione per gradiente semplice* (ovvero *SGDH - Standard Gradient Diffusion Hypothesis*). Ovviamente la traccia del tensore  $\langle S_{ij} \rangle$  è nulla nei flussi incomprimibili, per cui si può omettere la sottrazione del termine  $\langle S_{kk} \rangle / 3$  dai termini diagonali ottenendo

$$\tau_{ij} = -2\mu_s \langle S_{ij} \rangle \quad (4.56)$$

Non è, invece, nulla in generale la traccia del tensore degli sforzi addizionali  $\tau_{ij}$ , ma di ciò si può tenere conto conglobandola nella pressione effettiva e scrivendo:

$$\langle p^* \rangle = \langle p \rangle + \tau_{kk}/3 \quad (4.57)$$

con somma implicita su  $k$ .

Applicando le relazioni precedenti, si ottiene la versione a viscosità *sub-grid* delle equazioni di Navier-Stokes filtrate:

$$\frac{\partial \rho \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_s) \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.58)$$

Queste sono analoghe alle equazioni primitive (4.2), salvo che tutte le variabili vanno interpretate come variabili *filtrate* (fermo restando quanto si è detto sulla pressione), e la viscosità molecolare  $\mu$  è sostituita dalla viscosità totale  $\mu + \mu_s$ .

Il problema della *chiusura* delle equazioni del moto è ora ricondotto a quello di esprimere la viscosità *sub-grid* in funzione di termini risolti (filtrati). L'analisi dimensionale mostra che la viscosità può esprimersi come il prodotto di tre termini: la densità, il quadrato di una scala di lunghezza, e una velocità di deformazione. Fra i diversi modelli che è possibile costruire su questa base, di gran lunga il più diffuso è, dagli anni 1960, quello di Smagorinsky (1963):

$$\mu_s = \rho (C_s \Delta)^2 [2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle]^{1/2} \quad (4.59)$$

Qui  $\Delta$  è l'ampiezza locale del filtro (in particolare, la dimensione media della griglia di calcolo se si adotta il metodo dei volumi finiti con filtraggio implicito), e  $C_s$  è una costante dell'ordine di  $10^{-1}$ . Il termine  $2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle = \langle S \rangle^2$  è l'invariante quadratico del tensore della velocità di deformazione di grande scala  $\langle S_{ij} \rangle$ . Tale termine è proporzionale, attraverso la viscosità molecolare  $\mu$ , alla dissipazione *diretta*:  $2\mu \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$  e, attraverso la viscosità *sub-grid*  $\mu_s$ , al termine di produzione di energia cinetica *sub-grid*:  $-\tau_{ij} S_{ij} = 2\mu_s \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$  (omettiamo qui la tediosa sottrazione della traccia dai tensori  $\tau_{ij}$  e  $S_{ij}$ ).

Il modello di Smagorinsky può giustificarsi teoricamente a partire dalla ipotesi di equilibrio locale fra l'energia meccanica trasferita dalle scale risolte alle scale *sub-grid* e la dissipazione viscosa. Una derivazione del modello dalla cosiddetta *Direct Interaction Theory* (DI) della turbolenza è stata data da Yoshizawa (1982). Il valore della costante  $C_s$  è stato ricavato per via teorica da Lilly (1966) per turbolenza isotropa ed è risultato pari a circa 0.23. Tuttavia, valori generalmente più piccoli (da 0.08 a 0.2) sono stati usati dalla maggioranza dei ricercatori che hanno applicato il modello a problemi reali con gradienti di velocità di grande scala (*shear flows*).

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

Per tenere conto dell'attenuazione delle scale della turbolenza dovuta alla vicinanza di pareti solide, il modello di Smagorinsky è spesso modificato moltiplicando la scala spaziale  $C_s \Delta$  che compare nell'Eq. (4.59) per un fattore di smorzamento  $f_\mu$ , ad esempio nella forma proposta da Van Driest (1956):

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \quad (4.60)$$

in cui  $y^+$  è la distanza dalla parete espressa in unità di parete  $\nu/u_\tau$  ( $u_\tau$  = velocità di attrito) e  $A^+$  è una costante dell'ordine di 25.

Per quanto riguarda il trasporto di *calore*, il problema è modellare i flussi *sub-grid*  $q_j$  nell'Eq. (4.53). Coerentemente con l'ipotesi di diffusione per gradiente introdotta per gli sforzi *sub-grid* nell'Eq. (4.55), si può scrivere:

$$q_i = -\rho c_p \alpha_s \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_i} \quad (4.61)$$

in cui  $\langle t \rangle$  è la temperatura risolta, o filtrata, e  $\alpha_s$  è la *diffusività termica sub-grid*. A sua volta, questa può assumersi proporzionale alla viscosità *sub-grid*:

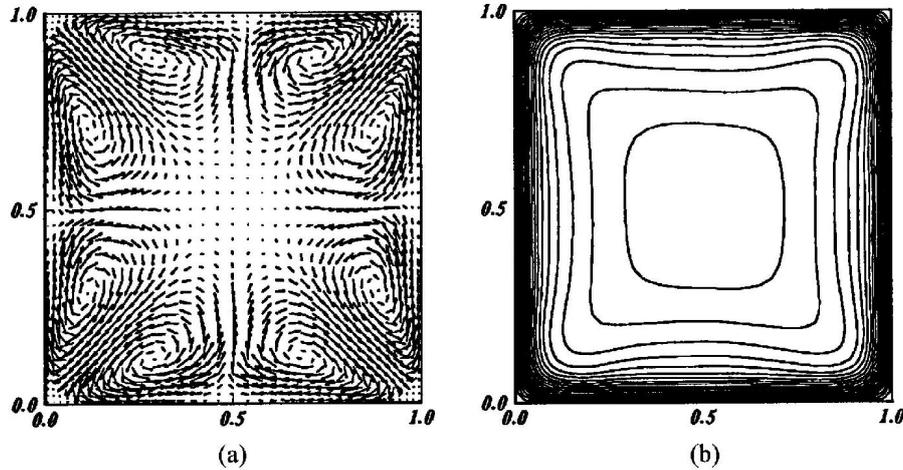
$$\alpha_s = \frac{\mu_s}{\rho \sigma_s} \quad (4.62)$$

in cui la costante di proporzionalità  $\sigma_s$  è detta *numero di Prandtl sub-grid*. Per tale parametro, diversi valori, da 0.25 a 0.85, sono stati proposti come ottimali in letteratura a seconda delle specifiche applicazioni studiate.

Nonostante la sua semplicità, il modello di Smagorinsky (con l'aggiunta, in problemi non isotermi, della ipotesi di proporzionalità fra le diffusività *sub-grid* del calore e della quantità di moto) ha dato risultati soddisfacenti in una grande varietà di applicazioni, sia per geometrie semplici (strato limite atmosferico, moto di Poiseuille, turbolenza isotropa) sia per problemi più complessi.

Ad esempio, la Fig. 4.14 riporta risultati ottenuti da Breuer e Rodi (1994) per il moto in un canale a sezione quadrata a  $Re_\delta \approx 2200$  usando il modello di Smagorinsky e una griglia avente  $62 \times 41 \times 41$  ( $x \times y \times z$ ) nodi. Il problema è lo stesso studiato da Gavrilakis (1992) mediante simulazione diretta con una griglia molto più fine ( $1000 \times 127 \times 127$  nodi). Un aspetto notevole è che, nonostante il modello non consenta di distinguere fra i tre sforzi normali *sub-grid*, la ricircolazione legata all'anisotropia degli sforzi normali turbolenti *complessivi* è correttamente predetta, in quanto le strutture turbolente sono simulate esplicitamente fino alla scala della griglia.

Come ulteriore esempio, la Fig. 4.15 (Ciofalo e al., 1993) confronta la distribuzione sperimentale (ottenuta mediante cristalli liquidi termocromici) e quella calcolata



**Figura 4.14:** Risultati LES per il moto turbolento sviluppato in un canale di sezione quadrata a  $Re_\delta \approx 2200$  ottenuti usando  $62 \times 41 \times 41$  ( $x \times y \times z$ ) nodi. (a) vettori della velocità secondaria nel piano  $yz$ ; (b) linee di livello della velocità secondo  $x$  nello stesso piano (cfr. la Fig. 4.11). Qui  $x$  denota la direzione principale del moto. Adattato da Breuer e Rodi (1994).

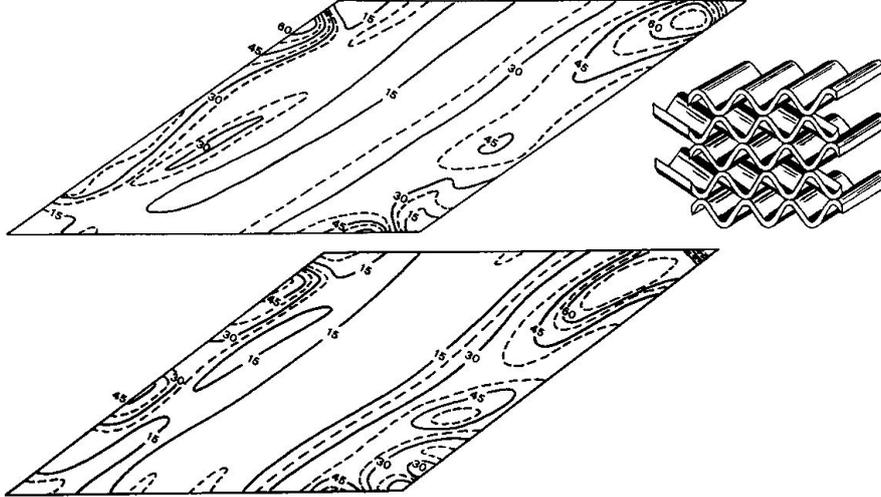
mediante LES per il numero di Nusselt locale sulle pareti della cella unitaria di uno scambiatore di calore rigenerativo a geometria corrugata. La complessa geometria del problema, tale da richiedere griglie *body-fitted*, è mostrata schematicamente nell'inserto. L'accordo, non solo qualitativo ma anche quantitativo, è eccellente e superiore a quello ottenuto con modelli convenzionali di turbolenza. Il numero di Reynolds per questo problema (definito sulla base del diametro idraulico e della velocità media) era circa 3900.

Il limite principale del modello di Smagorinsky è che la costante  $C_s$  rimane un parametro semi-empirico e sembra richiedere un valore diverso per ogni specifica applicazione. Lo stesso vale per la costante  $\sigma_s$  (numero di Prandtl *sub-grid*) nei problemi termici.

#### 4.4.4 Il modello dinamico

Il modello dinamico di Germano (1992) può considerarsi una versione sofisticata del modello di Smagorinsky, in cui però la costante  $C_s$  non solo può variare con la posizione e col tempo, ma viene *calcolata* dalla stessa simulazione invece che essere scelta *a priori*. Questo modello è ritenuto da molti il più completo, coerente

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.15:** Numero di Nusselt locale sulle pareti di uno scambiatore rigenerativo (inserto a destra). In alto: distribuzione sperimentale; in basso: LES con il modello di Smagorinsky e  $\sigma_s = 0.5$ . Adattato da Ciofalo e al. (1993).

e flessibile dei modelli *sub-grid* finora proposti; pertanto, se ne darà una descrizione abbastanza dettagliata nonostante l'inevitabile complessità del formalismo richiesto.

L'idea alla base del modello dinamico si può fare risalire a Bardina e al. (1980) ed è quella di campionare le più piccole scale risolte utilizzando poi le informazioni raccolte per modellare quelle irrisolte. A tal fine, accanto al consueto filtro LES  $G(\varphi \rightarrow \langle \varphi \rangle)$  di ampiezza  $\Delta_G$  (filtro griglia), si introduce un filtro  $F(\varphi \rightarrow \{\varphi\})$  di ampiezza maggiore  $\Delta_F = \gamma \Delta_G$  (filtro test). Si possono così costruire tre distinti sforzi residui (da cui omettiamo, per semplicità, il termine di densità):

$$\sigma_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (4.63)$$

$$T_{ij} = \{\langle u_i u_j \rangle\} - \{\langle u_i \rangle\} \{\langle u_j \rangle\} \quad (4.64)$$

$$L_{ij} = \{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle\} - \{\langle u_i \rangle\} \{\langle u_j \rangle\} \quad (4.65)$$

Qui  $\sigma_{ij}$  è lo sforzo *sub-grid*  $\tau_{ij}/\rho$ , che tiene conto delle scale irrisolte al di sotto del filtro griglia  $G$ ,  $T_{ij}$  è lo sforzo *sub-test*, che tiene conto delle scale al di sotto del filtro test  $F$ , e  $L_{ij}$  è lo sforzo turbolento risolto, che tiene conto delle scale risolte intermedie tra i due filtri  $G$  e  $F$ . [Tale termine è analogo al termine di Leonard, Eq. (4.47), ma è costruito con due filtri diversi  $G, F$  invece che con lo stesso filtro  $G$ ].

I tre termini sopra definiti sono legati da una relazione di identità notevole, ricavabile in modo puramente formale dalle definizioni:

$$L_{ij} = T_{ij} - \{\sigma_{ij}\} \quad (4.66)$$

Pertanto, se si calcolano sia  $\sigma_{ij}$  sia  $T_{ij}$  usando l'ipotesi di diffusione per gradiente (4.55) e si esprime la viscosità turbolenta mediante il modello di Smagorinsky (4.59) con la stessa costante  $C_s$ , si ottiene:

$$\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} = -2 \left[ (C_s\Delta_G)^2 \langle S \rangle \right] \langle S_{ij} \rangle \quad (4.67)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk} = -2 \left[ (C_s\Delta_F)^2 \{ \langle S \rangle \} \right] \{ \langle S_{ij} \rangle \} \quad (4.68)$$

Sostituendo queste ultime relazioni nell'identità (4.66), si ricava per fluidi incomprimibili:

$$L_{ij} = -2 (C_s\Delta_G)^2 M_{ij} \quad (4.69)$$

dove i termini  $M_{ij}$  sono definiti come:

$$M_{ij} = \gamma^2 \{ \langle S \rangle \} \{ \langle S_{ij} \rangle \} - \{ \langle S \rangle \langle S_{ij} \rangle \} \quad (4.70)$$

Poiché entrambi i termini  $L_{ij}$  e  $M_{ij}$  sono costruiti a partire da grandezze risolte (cioè filtrate a livello griglia, e quindi esplicitamente calcolate dalla simulazione), l'Eq. (4.69) consente, in linea di principio, di ricavare localmente e istantaneamente la costante  $C_s$  di Smagorinsky, unico parametro libero del modello, ottenendo così una LES *del tutto priva di parametri empirici*.

In realtà, questo approccio diretto conduce ad oscillazioni e instabilità in quanto, localmente e istantaneamente, sia  $L_{ij}$  che  $M_{ij}$  possono assumere valori nulli o di segno opposto e, di conseguenza, si applica piuttosto l'Eq. (4.69) in senso *statistico* [si veda, ad esempio: (Lilly, 1992)]. In base a tale scelta, entrambi i membri della (4.69) vengono prima contratti tensorialmente con  $M_{ij}$  e poi mediati su un insieme opportuno, che può essere costituito da una o più *direzioni omogenee* (ad esempio piani paralleli alle pareti nel moto di Poiseuille) o, in mancanza di queste, da un intervallo *temporale*. Indicando con barra soprascritta tale imprecisata operazione di media, si ottiene:

$$(C_s\Delta_G)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{L_{kl}M_{kl}}}{\overline{M_{ij}M_{ij}}} \quad (4.71)$$

Lo scambio di calore turbolento può trattarsi in modo simile. I flussi termici turbolenti risolti, analoghi dei termini  $L_{ij}$  di Leonard, sono:

$$Q_i = \{ \langle u_i \rangle \langle t \rangle \} - \{ \langle u_i \rangle \} \{ \langle t \rangle \} \quad (4.72)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

Procedendo come per gli sforzi, questi possono esprimersi come:

$$Q_i = -\frac{(C_s \Delta_G)^2}{\sigma_s} N_i \quad (4.73)$$

in cui i termini  $N_i$ , analoghi termici dei termini  $M_{ij}$  introdotti sopra, sono dati da:

$$N_i = \gamma^2 \{ \langle S \rangle \} \frac{\partial \{ \langle t \rangle \}}{\partial x_i} - \left\{ \langle S \rangle \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_i} \right\} \quad (4.74)$$

Contraendo ambo i membri dell'Eq. (4.74) con  $N_i$ , si ottiene infine:

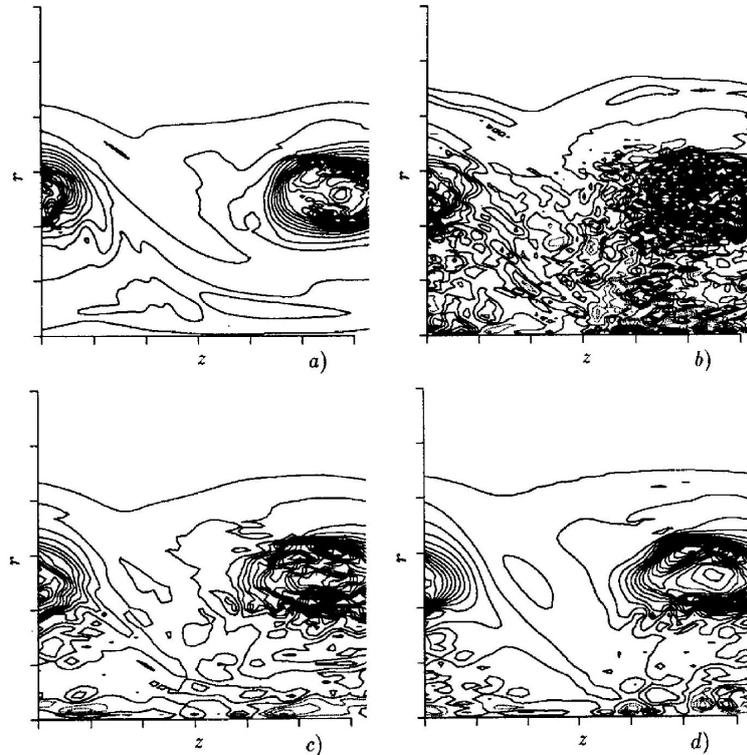
$$\sigma_s = - (C_s \Delta_G)^2 \frac{\overline{N_j N_j}}{Q_k \overline{N_k}} \quad (4.75)$$

in cui, come sopra, la barra soprascritta denota un'opportuna media d'insieme spaziale o temporale. L'Eq. (4.75) consente di *calcolare* il numero di Prandtl *sub-grid* localmente e istantaneamente a partire da grandezze *risolte*, eliminando così *qualunque* costante arbitraria dal modello.

A titolo di esempio, la Fig. 4.16 riporta risultati di Fatica e al. (1994) per un getto circolare. La grandezza rappresentata è la media azimutale istantanea della vorticità azimutale  $\omega_\theta$ . Nella figura, il grafico (a) riporta i risultati di una simulazione diretta, basata su una griglia abbastanza fine da risolvere tutte le scale turbolente. Il grafico (b) riporta i risultati di una simulazione a griglia grossolana senza modello *sub-grid*, nel quale sono presenti oscillazioni numeriche che la dissipazione viscosa non è in grado di smorzare. Infine, i grafici (c) e (d) sono stati ottenuti usando la stessa griglia grossolana, ma con i modelli *sub-grid* di Smagorinsky e dinamico, rispettivamente. Si noti come la dissipazione *sub-grid* sia ora in grado di smorzare le oscillazioni numeriche. Il modello dinamico produce un andamento di  $\omega_\theta$  regolare e un migliore accordo con la simulazione diretta, anche se si deve però rilevare come il modello di Smagorinsky dia risultati accettabili, e come le differenze fra i due modelli siano, tutto sommato, modeste.

#### 4.4.5 Altri modelli *sub-grid*

Un'altra famiglia di modelli *sub-grid* può costruirsi esprimendo la viscosità *sub-grid* come il prodotto di densità, lunghezza e velocità piuttosto che densità, quadrato di una lunghezza e gradiente di velocità. La scala di lunghezza continua ad essere l'ampiezza  $\Delta$  del filtro; per quanto riguarda la scala di velocità, sono possibili varie alternative. Nel modello a *funzione di struttura* di Lesieur (1990), la scala di velocità scelta è in sostanza la deviazione standard (valutata su un opportuno intorno) della distribuzione spaziale di velocità istantanea risolta. Nei modelli a una equazione



**Figura 4.16:** Media azimutale istantanea della vorticità azimutale  $\omega_\vartheta$  in un getto circolare. a) simulazione diretta,  $129 \times 91 \times 129$  ( $z \times r \times \vartheta$ ) nodi; b) simulazione diretta,  $33 \times 65 \times 41$  nodi; c) modello di Smagorinsky, griglia come (b); d) modello dinamico, griglia come (b). Adattato da Fatica e al. (1994).

di Schumann (1975) e Deardorff (1980), la scala di velocità è calcolata a partire dall'energia turbolenta *sub-grid*  $E_s$ , calcolata a sua volta risolvendo una equazione differenziale di trasporto. Quest'approccio è stato applicato nel passato soprattutto a problemi meteorologici.

Una combinazione del modello dinamico di Germano e del modello ad una equazione sopra citato è il cosiddetto *Dynamic One Equation Model* (DOEM) (Davidson, 1997), che offre il vantaggio di non richiedere una direzione omogenea su cui eseguire le medie ed è pertanto particolarmente adatto a geometrie complesse.

I modelli fin qui descritti sono basati sull'ipotesi di *diffusione per gradiente*, descritta dalle Eq. (4.55) e (4.56), cioè sull'assunzione che gli sforzi *sub-grid* siano proporzionali ai corrispondenti gradienti della velocità risolta. Si tratta quindi di mo-

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

delli a *viscosità turbolenta*, intrinsecamente incapaci di predire varie caratteristiche che, in generale, la turbolenza sviluppata può esibire, fra le quali:

- la *anisotropia* degli sforzi *sub-grid* normali, o, più in generale, la mancanza di proporzionalità fra il tensore della velocità di deformazione di grande scala e quello degli sforzi turbolenti (*sub-grid*);
- il *trasferimento spettrale inverso* di energia dalle piccole alle grandi scale (*backscatter*), osservato nella regione di parete e in fenomeni come l'accoppiamento di vortici (*vortex pairing*).

Il problema si presenta sia in LES sia nei modelli convenzionali della turbolenza, e in entrambi i casi l'unica soluzione drastica consiste nel modellare *separatamente* i diversi sforzi turbolenti (qui, *sub-grid*). Ciò può ottenersi o risolvendo 6 equazioni differenziali di trasporto, una per ciascuna componente indipendente del tensore  $\tau_{ij}$  (Deardorff, 1974), o modellando la viscosità *sub-grid* come un *tensore*  $\mu_{s,ij}$  piuttosto che come uno *scalare*  $\mu_s$  (Schumann, 1975). Nessuno di questi modelli ha avuto molto seguito a causa della inevitabile complessità e delle difficoltà computazionali associate. Va detto che, in LES, il problema della anisotropia ha importanza minore che nei modelli di turbolenza convenzionali, a causa della tendenza verso l'isotropia che la turbolenza mostra alle piccole scale. Per quanto riguarda il problema del *backscatter*, sono stati proposti modelli di tipo stocastico (Mason e Thomson, 1992) in grado di tenerne conto mediante semplici modifiche a modelli *sub-grid* del tipo di Smagorinsky.

#### 4.4.6 Condizioni al contorno e iniziali per la LES

In LES possono essere necessari speciali accorgimenti per una corretta descrizione delle condizioni al contorno e iniziali. In questa sede si può solo accennare brevemente a tali problemi e si rimanda, ad esempio, a Ciofalo (1994) per una rassegna più dettagliata.

Innanzitutto, su *pareti solide* le condizioni di non scorrimento (*no slip*) possono applicarsi direttamente solo se la griglia di calcolo è tale da risolvere il substrato viscoso (individuato, in unità di parete  $\nu/u_\tau$ , dalla condizione  $y^+ \leq 11$ ), in cui i profili di velocità possono assumersi lineari. Tuttavia, per problemi ad elevato numero di Reynolds, questa condizione è difficile da soddisfare. Una possibile soluzione è ricorrere a condizioni al contorno *sintetiche* basate su *funzioni di parete* universali (Piomelli e al., 1989), analoghe a quelle che saranno descritte appresso con riferimento ai modelli RANS.

#### 4.4. LARGE EDDY SIMULATION

Un approccio alternativo, introdotto da Spalart e al. (1997) e oggi diffuso sotto il nome di *Detached Eddy Simulation* (DES), consiste nel combinare una simulazione LES (ovviamente non stazionaria) nelle regioni lontane da pareti solide con un approccio RANS, usualmente stazionario e basato su modelli semplificati quali quello ad una equazione, nella regione di parete. Tale approccio offre il vantaggio di consentire la LES di problemi ad elevato numero di Reynolds anche con griglie relativamente grossolane. Per alcune recenti applicazioni e per confronti con metodi RANS e LES *puri* si vedano, ad esempio, Schmidt e Thiele (2002) e Viswanathan e Tafti (2006).

In problemi *periodici*, come il moto sviluppato in condotti, le condizioni di periodicità sostituiscono la specificazione di condizioni di ingresso (*inflow*) e uscita (*outflow*). Negli altri casi, tuttavia, queste condizioni devono essere assegnate. Per le condizioni di *outflow*, non si incontrano di solito difficoltà particolari rispetto ad altre simulazioni fluidodinamiche; ad esempio, si può imporre che siano nulle le derivate prime o seconde delle varie grandezze nella direzione normale alla superficie di uscita. Più difficile è la specificazione coerente di condizioni turbolente di *inflow*; un approccio diffuso è ricavarle, quando è possibile, da simulazioni preliminari periodiche (*fully developed*) del moto a monte. In alcuni problemi, il trasporto da monte di energia turbolenta è trascurabile a fronte della generazione locale (si pensi, ad esempio, alla simulazione del moto con separazione e ricircolazione attorno a ostacoli), e può essere sufficiente imporre condizioni di *inflow* costanti nel tempo e usare semplici profili medi per la dipendenza spaziale delle diverse variabili. Si noti che considerazioni simili valgono anche per la simulazione *diretta* della turbolenza.

Per quanto riguarda le condizioni *iniziali*, tutto dipende dal metodo di discretizzazione spazio-temporale usato per la risoluzione delle equazioni (filtrate o no) del moto e del trasporto di calore. Alcuni algoritmi generano sufficiente *rumore* numerico da innescare spontaneamente la turbolenza nel corso del transitorio, anche a partire da campi di moto regolari (ad esempio, velocità nulle e temperatura uniforme), mentre in altri casi può essere necessario introdurre *perturbazioni* iniziali. In questa seconda ipotesi, occorre distinguere fra algoritmi che tollerano violazioni di continuità (quali, in genere, quelli della famiglia SIMPLE) e altri che, in presenza di tali violazioni, danno luogo a errori e instabilità numeriche. Nel primo caso, è in genere sufficiente sovrapporre a condizioni iniziali regolari delle perturbazioni *random*, senza curarsi che queste soddisfino l'equazione di continuità; nel secondo, occorre invece garantire che il campo di velocità pseudocasuale risultante sia solenoidale (*divergence free*). Ciò può ottenersi, ad esempio, costruendo preliminarmente una funzione di corrente vettoriale pseudocasuale e calcolandone poi il rotore per ottenere la velocità.

## 4.5 MODELLI RANS

### 4.5.1 Aspetti generali

A differenza delle equazioni LES discusse nella sezione precedente, che sono filtrate rispetto allo *spazio*, le cosiddette equazioni RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) illustrate in questa sezione, sono versioni filtrate rispetto al *tempo* delle equazioni primitive di continuità, quantità di moto e calore (4.1)-(4.3). I modelli risultanti sono alla base delle simulazioni più convenzionali e diffuse della turbolenza e, quindi, meritano un'attenzione particolare.

Benché, in linea di principio, si possano introdurre nelle RANS funzioni filtro temporali generalizzate  $G(\vartheta, \vartheta')$ , analoghe delle funzioni filtro spaziali discusse con riferimento alla LES, in pratica l'unico filtro usato è la *media di lungo periodo*, per cui la generica grandezza turbolenta  $\varphi$  viene decomposta in componente *media* (risolta):

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) \rangle = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_{\vartheta}^{\vartheta+\Theta} \varphi(\mathbf{x}, \vartheta') d\vartheta' \quad (4.76)$$

e componente *fluttuante* (residua, o irrisolta):

$$\varphi'(\mathbf{x}, \vartheta) = \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) - \langle \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) \rangle \quad (4.77)$$

Ovviamente, se il limite nell'Eq. (4.76) esiste, esso risulta indipendente dall'istante iniziale  $\vartheta$ , sicché il campo mediato perde del tutto la sua dipendenza dal tempo e si può scrivere  $\langle \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle$ ,  $\varphi'(\mathbf{x}, \vartheta) = \varphi(\mathbf{x}, \vartheta) - \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle$ . È comunque necessario, a tal fine, che il moto sia globalmente (statisticamente) *stazionario*. Occorre, infatti, tener presente che *tutti* i modelli di turbolenza sviluppati a partire dalla decomposizione di Reynolds valgono, a rigore, solo sotto l'ipotesi di stazionarietà. La loro applicazione a problemi per cui *non esista* il limite nella (4.76) (transitori) è concettualmente malferma e può dar luogo a errori.

A stretto rigore, gli unici casi in cui un modello di turbolenza può usarsi anche in presenza di transitori sono quelli in cui le scale temporali del transitorio siano *nettamente separate* dalle scale temporali turbolente propriamente dette. Questa ipotesi è soddisfatta abbastanza bene, ad esempio, in problemi quali l'evoluzione diurna dello strato limite atmosferico (Deardorff, 1974, 1980) o il funzionamento alternato di uno scambiatore rigenerativo (Ciofalo e al., 1993). In altri problemi, quali il moto rotativo di una turbina (Chima e al., 1993) o di una girante per reattori chimici agitati (Brucato e al., 1998), la separazione temporale di scale è soddisfatta solo approssimativamente. Esistono problemi, infine, in cui l'ipotesi della separazione di scale non vale affatto e, a rigore, la decomposizione di Reynolds *non* è applicabile; si pensi, ad esempio, a un qualsiasi moto turbolento con un forzamento periodico ad alta

frequenza. In tali casi, se si vuole mantenere un approccio basato sul filtraggio temporale delle equazioni del moto, sembra inevitabile il ricorso a filtri temporali *finiti*; la ricerca in questo senso, però, è solo agli inizi e pochi lavori sono stati presentati sull'argomento (Collins e al., 1998).

Nel seguito, eviteremo tali complicazioni supponendo che sia soddisfatta l'ipotesi di stazionarietà del moto medio. Supporremo inoltre che l'efflusso sia *incompressibile* (in pratica, negli aeriformi, che il numero di Mach sia molto minore dell'unità, rendendo così trascurabili le fluttuazioni di densità) e che anche le altre proprietà fisiche siano costanti. Partendo allora dalle Eq. (4.1)-(4.3) e procedendo come nel paragrafo precedente, cioè sostituendo la generica variabile  $\varphi$  con  $\langle\varphi\rangle + \varphi'$  e filtrando poi le equazioni ottenute, si ottengono equazioni mediate nel tempo che, a parte l'interpretazione da dare all'operatore  $\langle\cdot\rangle$ , sono formalmente identiche alle Eq. (4.44) (continuità), (4.45) (quantità di moto) e (4.53) (energia).

In questo caso, tuttavia, una notevole semplificazione è data dal fatto che ora la definizione dell'operatore  $\langle\cdot\rangle$ , Eq. (4.76), è tale da rendere sempre identicamente nulli i termini di Leonard e incrociati (discussi in precedenza per la LES). Quindi gli sforzi e flussi aggiuntivi sono sempre dati, semplicemente, da:

$$\tau_{ij} = \rho\langle u'_i u'_j \rangle \quad (4.78)$$

$$q_i = \rho c_p \langle u'_i t' \rangle \quad (4.79)$$

Di conseguenza, come nel caso della LES, il problema della *chiusura* si riconduce a quello di esprimere i termini  $\tau_{ij}$ ,  $q_i$  in funzione di quantità medie (risolte).

### 4.5.2 Modelli a viscosità turbolenta

Questi modelli sono basati sull'ipotesi di Boussinesq per la diffusione della quantità di moto e del calore, espressa da relazioni formalmente identiche alle (4.56) e (4.61)

$$\tau_{ij} = -2\mu_t \langle S_{ij} \rangle \quad (4.80)$$

$$q_i = -\rho c_p \alpha_t \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_i} \quad (4.81)$$

completate dall'assunzione di un *numero di Prandtl turbolento*  $\sigma_t$  prossimo all'unità, in modo da arrivare all'espressione

$$\alpha_t = \frac{\mu_t}{\rho \sigma_t} \quad (4.82)$$

anch'essa formalmente identica alla (4.62), nella quale le grandezze  $\mu_t$  e  $\alpha_t$  sono dette, rispettivamente, *viscosità turbolenta* e *diffusività turbolenta del calore*. Nel

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

contesto dei modelli RANS, le relazioni (4.80) e (4.81) vengono chiamate ipotesi di *diffusione per gradiente semplice* (ovvero *SGDH - Simple Gradient Diffusion Hypothesis*) per distinguerle dall'ipotesi di *diffusione per gradiente generalizzata* (ovvero *GGDH - Generalized Gradient Diffusion Hypothesis*) che sarà introdotta nel Paragrafo 4.5.7.

Attesa la validità della SGDH, le corrispondenti equazioni mediate della quantità di moto e del calore diventano:

$$\frac{\partial \rho \langle u_i \rangle}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \rho \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \rho c_p \langle t \rangle}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \rho c_p \langle u_j \rangle \langle t \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \lambda + c_p \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_j} \right] \quad (4.84)$$

dove la somma  $\mu + \mu_t$  è detta *viscosità efficace*, o totale, e la somma  $\lambda + c_p \mu_t / \sigma_t$  è detta *conducibilità termica efficace*. Il termine  $(1/3)\tau_{kk}$  (con somma implicita su  $k$ ), pari a un terzo della traccia del tensore degli sforzi turbolenti, è conglobato nella pressione efficace  $\langle p^* \rangle$ . Poiché risulta:  $(1/3)\tau_{kk} = (1/3)\rho \langle u'_k u'_k \rangle = (2/3)\rho k$  [in cui  $k = 1/2 \langle u'_k u'_k \rangle$  è l'*energia cinetica turbolenta*], si ha:

$$\langle p^* \rangle = \langle p \rangle + \frac{2}{3}\rho k \quad (4.85)$$

La differenza fra pressione termodinamica e pressione efficace può creare problemi solo nei rari casi in cui si debba specificare esplicitamente una condizione sulla pressione, ed è altrimenti irrilevante.

I consueti argomenti dimensionali già discussi nel quarto paragrafo consentono di esprimere *formalmente* la viscosità turbolenta  $\mu_t$  come il prodotto di densità, quadrato di una lunghezza, e velocità di deformazione (gradiente di velocità). In alcuni problemi (strati limite) è naturale identificare quest'ultima quantità con il gradiente della velocità media principale  $\langle u \rangle$  nella direzione normale alla parete  $y$ ; si ha quindi:

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| \quad (4.86)$$

La quantità  $l$  (lunghezza di miscelamento di Prandtl) può pensarsi come una lunghezza rappresentativa della scala locale dei vortici turbolenti; fra i primi modelli (1920-1940) vanno ricordati quelli dello stesso Prandtl, che assunse  $l$  proporzionale alla distanza  $y$  dalla parete, e di von Karman, che suggerì di calcolare  $l$  come  $|\langle \partial u \rangle / \partial y| / |\langle \partial^2 u \rangle / \partial y^2|$ . Van Driest (1956) propose di tener conto della riduzione delle scale della turbolenza nella regione di parete moltiplicando il valore di  $\mu_t$  dato dall'Eq. (4.86) per il fattore di smorzamento (4.60), già citato nel contesto della *Large-Eddy Simulation*.

Modelli di turbolenza molto semplici, basati essenzialmente sulle ipotesi di cui sopra, sono tuttora abbastanza usati con discreto successo in problemi di strato limite o, comunque, bidimensionali e senza ricircolazione, quali se ne incontrano spesso nelle applicazioni *aeronautiche* e nello studio delle *turbomacchine*. Ad esempio, il modello di Cebeci e Smith (1974) esprime la viscosità turbolenta come:

$$\mu_t = \rho(\kappa y f_\mu)^2 \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right| \quad (y \leq y_c) \quad (4.87)$$

$$\mu_t = \rho K \gamma \delta^* u_e \quad (y > y_c) \quad (4.88)$$

La (4.87) vale nella regione interna, o di parete dove  $\kappa \approx 0.4$  è la costante di von Karman,  $y$  è la distanza dalla parete e  $f_\mu$  è il fattore di smorzamento di Van Driest, Eq. (4.60). La (4.88) vale invece nella regione esterna dove  $K \approx 0.0168$  è la costante di Clauser,  $\gamma = [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1}$  è il cosiddetto fattore di intermittenza di Klebanoff,  $\delta$  e  $\delta^*$  sono rispettivamente gli spessori cinematici e della quantità di moto dello strato limite, e  $u_e$  è la velocità al margine dello strato limite. Il valore di  $y_c$  è quello per il quale la (4.87) e la (4.88) danno risultati coincidenti.

Sono state proposte varie estensioni e riformulazioni del modello di Cebeci-Smith, quali ad esempio il modello di Baldwin e Lomax (1978). Per per un'applicazione di quest'ultimo modello alle turbomacchine si veda, ad esempio, Chima e al. (1993).

I modelli descritti più sopra vengono detti *algebrici*, in quanto forniscono direttamente la viscosità turbolenta in funzione delle variabili medie senza ricorrere a equazioni differenziali. Per questa loro caratteristica, se inseriti in codici di calcolo fluidodinamici comportano un aggravio computazionale trascurabile rispetto alle simulazioni laminari. D'altra parte, si tratta in generale di modelli *ad hoc*, ottimizzati per specifici problemi ma contenenti un rilevante numero di parametri empirici o semi-empirici. Essi poggiano, in ultima analisi, sulla teoria degli strati limite in equilibrio, come esposta ad esempio nel classico lavoro di Schlichting (1968), e sono difficilmente applicabili a problemi completamente tridimensionali, implicanti, ad esempio, separazione e ricircolazione.

Una generalità molto maggiore si ottiene con i modelli *differenziali*, in cui una o più grandezze caratteristiche della turbolenza (quali l'energia cinetica turbolenta, la scala dei vortici, o il tasso di dissipazione) sono ottenute risolvendo opportune equazioni *di trasporto*. Ciò consente di impostare *bilanci* di tali quantità in cui figurino esplicitamente i termini di generazione, distruzione, trasporto convettivo/diffusivo, e - entro i limiti discussi in precedenza - variazione temporale.

Nei modelli differenziali, una equazione di trasporto riguarda invariabilmente l'energia cinetica turbolenta, definita come:

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_j u'_j \rangle = \frac{1}{2} \frac{\tau_{jj}}{\rho} \quad (4.89)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

con somma implicita sull'indice  $j$ . L'equazione di trasporto di  $k$  assume la forma:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_i \rangle k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \rho \varepsilon \quad (4.90)$$

in cui  $\sigma_k \approx 1$  è una costante detta *numero di Prandtl turbolento per  $k$* , mentre  $P$  ed  $\varepsilon$  sono, rispettivamente, i tassi di produzione e dissipazione di  $k$ . Nell'Eq. (4.11) il tasso di produzione di energia cinetica turbolenta per unità di volume è stato espresso come:  $P = -\tau_{ij} \langle S_{ij} \rangle$ . Pertanto, in base all'*ipotesi di diffusione per gradiente semplice (SGDH)*, Eq. (4.80), si può scrivere anche come

$$P = -\tau_{ij} \langle S_{ij} \rangle = 2\mu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle = \mu_t \left( \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \quad (4.91)$$

Termini addizionali sono necessari se la generazione di turbolenza non è dovuta solo allo *shear* ma anche all'azione di *forze di massa*, quali il galleggiamento termico o *buoyancy* (si veda la Sezione 4.6).

Per quanto riguarda la dissipazione  $\varepsilon$ , questa resta formalmente definita (a meno del fattore di densità  $\rho$ ) dall'Eq. (4.9); tuttavia, poiché tale espressione contiene le quantità irrisolte (fluttuanti)  $S'_{ij}$ , occorre ricorrere ad un modello di chiusura. Si noti che la teoria di Kolmogorov della turbolenza, illustrata nel Paragrafo 4.2.2, permette di costruire la scala di lunghezza  $l$  caratteristica dei vortici turbolenti (generalizzazione della lunghezza di miscelamento di Prandtl) come:

$$l = C_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (4.92)$$

in cui  $C_\mu$  è una costante dell'ordine di 0.1 (Landau e Lifschitz, 1959).

Supposte note sia l'energia cinetica turbolenta  $k$  che la scala  $l$  della turbolenza (o la dissipazione  $\varepsilon$ ), la viscosità turbolenta può essere espressa, sulla base delle consuete considerazioni dimensionali, come  $\mu_t \approx \rho l k^{1/2}$ , ovvero, tenendo conto della (4.92), come:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.93)$$

(relazione di Prandtl-Kolmogorov). Sono ora possibili due alternative:

- **Modelli ad una equazione:** in questi, la dissipazione  $\varepsilon$ , o la scala di lunghezza  $l$ , sono assegnate algebricamente in funzione delle caratteristiche del moto medio. L'unica equazione di trasporto rimane quindi la (4.90) che governa il bilancio dell'energia cinetica turbolenta. Questi modelli hanno trovato in passato ampia applicazione nell'ambito di problemi di strato limite, ma sono stati

estesi, con espressioni più o meno *ad hoc* per  $l$  o  $\varepsilon$ , anche a problemi più complessi implicanti separazione e ricircolazione (Thomas e al., 1981). Valgono per essi, sia pure in misura più ridotta, le stesse riserve già espresse più sopra a proposito dei modelli puramente algebrici.

- **Modelli a due equazioni:** in questi, anche la dissipazione  $\varepsilon$  o, in alternativa, altre grandezze ad essa legate (come la frequenza caratteristica dei vortici  $\omega$ ), vengono ottenuta risolvendo un'equazione differenziale di trasporto contenente appropriati termine di generazione, distruzione, convezione/diffusione e variazione temporale. Si ottiene così una maggiore generalità e una minore dipendenza da assunzioni empiriche, a prezzo di una maggiore complessità e di un maggior onere computazionale.

### 4.5.3 Il modello $k - \varepsilon$ e le sue varianti

Fra i modelli a viscosità turbolenta a due equazioni quello che, in passato, ha avuto di gran lunga il maggior successo diventando un vero e proprio modello di riferimento in tutti gli studi della turbolenza, è il modello  $k - \varepsilon$ , inizialmente proposto dal gruppo dell'Imperial College di Londra (Launder e Spalding, 1972) e, successivamente, evolutosi in una vasta famiglia di varianti e generalizzazioni. Nella versione base, la seconda equazione di trasporto riguarda la dissipazione  $\varepsilon$  e prende la forma:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.94)$$

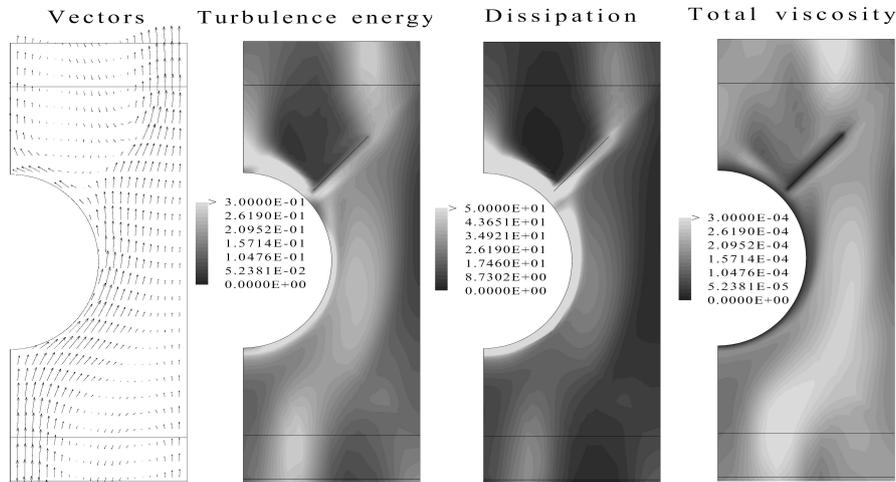
in cui  $\sigma_\varepsilon$  è una costante dell'ordine dell'unità, detta *numero di Prandtl turbolento per  $\varepsilon$* . L'analisi di tale equazione mostra che essa è costruita come la corrispondente equazione (4.90) di  $k$ , con termini di produzione e distruzione proporzionali ai termini corrispondenti di quella attraverso il fattore di scala  $\varepsilon/k$  moltiplicato i fattori numerici correttivi  $C_1$  e  $C_2$ . In realtà, una ulteriore costante è necessaria se si vuole esprimere anche la produzione di dissipazione dovuta a *buoyancy*, ma viene qui omessa per semplicità.

I valori *di consenso* sulle varie costanti che figurano nel modello  $k - \varepsilon$  sono:

- $C_\mu = 0.09$  per la relazione (4.93) di Prandtl-Kolmogorov, e
- $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1$  e  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  per l'Eq. (4.94).

Tali valori sono stati ottenuti con una giudiziosa miscela di considerazioni asintotiche e confronti con risultati sperimentali o con soluzioni esatte estese ad un vasto insieme di problemi.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.17:** Simulazione tridimensionale  $k - \epsilon$  del moto fra piastre piane parallele attorno a un fascio di tubi sfalsati con promotori di turbolenza. Le immagini si riferiscono al piano medio fra piastre consecutive. Da sinistra: campo di velocità; energia cinetica turbolenta; dissipazione; viscosità totale.

A titolo di esempio, la Fig. 4.17 riporta l'andamento delle tre grandezze  $k$ ,  $\epsilon$  e  $\mu_t$  in una tipica simulazione  $k - \epsilon$  tridimensionale; la configurazione considerata riguarda un problema di interesse industriale (moto trasversale di aria rispetto a un fascio di tubi con piastre piane parallele come alettatura; sono presenti inoltre piastre a  $45^\circ$  come promotori di turbolenza). L'energia cinetica turbolenta  $k$  assume i valori più elevati nelle regioni di elevato *shear* (gradiente di velocità) per effetto del termine di generazione  $P = 2\mu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$ . La dissipazione  $\epsilon$  è invece massima nelle regioni di parete. La distribuzione della viscosità turbolenta  $\mu_t$  ricalca, in linea di massima, quella di  $k$  ma con significative differenze dovute al gioco combinato di  $\epsilon$ ; in particolare, in base all'Eq. (4.93),  $\mu_t$  è modesta presso le pareti, dove la viscosità totale si riduce in pratica a quella molecolare.

Negli oltre quarant'anni trascorsi dalla sua introduzione, il modello  $k - \epsilon$  ha avuto innumerevoli applicazioni ed è oggi implementato in tutti i codici termofluidodinamici in grado di trattare flussi turbolenti. Di tutti i modelli basati su medie temporali, esso rappresenta probabilmente il miglior compromesso tra generalità, accuratezza dei risultati, semplicità di implementazione e stabilità computazionale. Interi libri sono stati dedicati alla sua analisi (Mohammadi e Pironneau, 1994), ed è impossibile in questa sede dare una panoramica anche sommaria delle sue applicazioni.

I problemi maggiori nell'utilizzo del modello  $k - \varepsilon$  sono legati da una parte alla sua natura di modello a viscosità turbolenta, dall'altra alla difficoltà di coprire con un unico set di costanti di calibrazione tutto l'arco dei possibili problemi turbolenti. Difficoltà del primo tipo includono, ad esempio, la impossibilità di predire correttamente moti secondari legati alla anisotropia degli sforzi turbolenti normali (Fig. 4.14) e non possono essere eliminate con semplici aggiustamenti. Tra le difficoltà del secondo tipo vanno ricordate la sistematica sottostima della lunghezza di riattacco in flussi separati (ad esempio nel classico problema del *gradino rivolto a valle*) e la sistematica sovrastima del tasso di dispersione laterale di *getti sommersi*. Tali problemi sembrano legati ad una insoddisfacente modellazione del termine di produzione di  $\varepsilon$  nell'Eq. (4.94), che è assunto proporzionale al corrispondente termine di produzione di  $k$  nella (4.90). Sono state proposte numerose correzioni al modello base che, spesso, si riducono a sostituire la costante  $C_1$  con una funzione delle condizioni locali (Hanjalić e Launder, 1980; Chen e Kim, 1987).

Fra le varianti presentate, una che si distingue per la sua robusta base teorica è il cosiddetto modello RNG  $k - \varepsilon$ , dove RNG sta per *Re-Normalization Group*. Il modello affonda infatti le sue radici nella complessa teoria dei gruppi di rinormalizzazione Yakhot e Orszag (1986) ma si riduce, in pratica, a esprimere il fattore  $C_1$  nella (4.94), che nel modello standard è una costante pari a 1.44, come:

$$C_1 = C_1^0 - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta\eta^3} \quad (4.95)$$

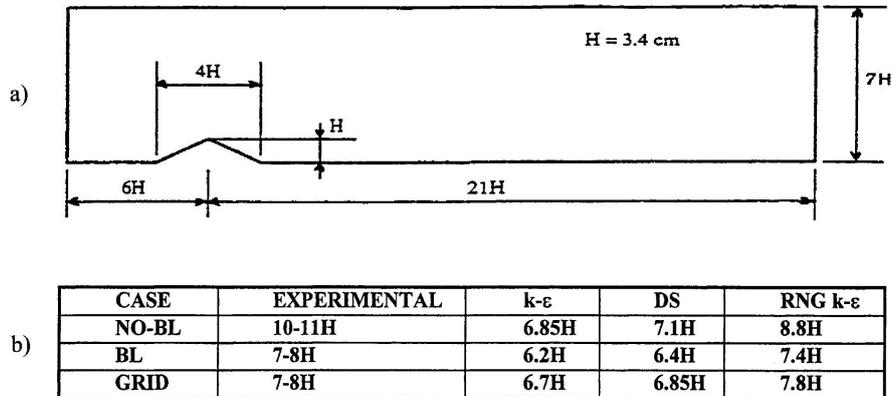
in cui il termine  $\eta$  è definito come:

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \quad (4.96)$$

Nel modello figurano le due nuove costanti  $\beta$  e  $\eta_0$ , per le quali la teoria RNG suggerisce valori intorno a 0.015 e 4.4, rispettivamente. La costante  $C_1^0$  può assumersi pari alla costante  $C_1$  del modello standard (1.44), mentre modifiche minori rispetto ai valori standard possono essere opportune per le costanti  $C_2$  e  $C_\mu$ .

Un esempio dei risultati che si possono ottenere con il modello RNG  $k - \varepsilon$  per flussi separati è dato dalla Fig. 4.18 nella quale la Tabella (b) riporta i valori della lunghezza di riattacco a valle di un ostacolo triangolare, la cui configurazione è schematizzata in (a). Sono inclusi risultati sperimentali (ottenuti in tunnel a vento presso il von Karman Institute usando anemometria Laser-Doppler) e predizioni ottenute usando il codice di calcolo CFD-Flow3D (AEA Technology, 1994) - predecessore dell'attuale ANSYS-CFX - con tre diversi modelli di turbolenza: il  $k - \varepsilon$  standard,

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.18:** Moto turbolento con separazione attorno ad un ostacolo triangolare: a) schema del problema; b) lunghezze di riattacco misurate e predette da tre diversi modelli di turbolenza.

l'RNG  $k - \varepsilon$  e un modello di trasporto degli sforzi di Reynolds del tipo DS (*Differential Stress [Model]*) discusso più avanti. I tre casi riportati differiscono per le condizioni dello strato limite a monte dell'ostacolo (Ciofalo e Palagonia, 1996).

Come si può osservare, il modello RNG  $k - \varepsilon$  fornisce per la lunghezza di riattacco un accordo con i dati sperimentali molto migliore non solo rispetto al modello  $k - \varepsilon$  standard, ma anche rispetto al modello differenziale provato.

Un vantaggio ulteriore del modello RNG  $k - \varepsilon$  è che esso, a differenza del modello standard, può essere esteso alle regioni essenzialmente laminari di parete in quanto la parametrizzazione del termine di produzione di  $\varepsilon$ , data dalle Eq. (4.95)-(4.96), tiene conto implicitamente della accresciuta dissipazione associata a queste zone. Pertanto, il modello può essere usato senza ricorrere alle *funzioni di parete* descritte nel paragrafo che segue e si comporta, da questo punto di vista, come uno dei modelli per basso numero di Reynolds discussi appresso.

#### 4.5.4 Condizioni al contorno e funzioni di parete

Le equazioni di trasporto di  $k$  ed  $\varepsilon$  (4.90) e (4.94), e la relazione di Prandtl-Kolmogorov (4.93), non sono rigorosamente applicabili alla regione di parete ed, in particolare, al substrato viscoso/conduittivo. Nel contesto del modello  $k - \varepsilon$  e dei modelli ad esso riconducibili, al problema sono state date due soluzioni radicalmente alternative:

- *funzioni di parete*: la griglia di calcolo non risolve il substrato viscoso/conduittivo ma, in compenso, le condizioni al contorno sono formulate in modo da tenere conto dell'esistenza di tale substrato in quanto legano la velocità e la temperatura nel nodo di calcolo più vicino alla parete con lo sforzo ed il flusso termico di parete;
- modelli detti *a basso numero di Reynolds*: la griglia di calcolo risolve in modo dettagliato il substrato viscoso/conduittivo di parete, ma le equazioni di trasporto di  $k$  ed  $\varepsilon$  e la relazione di Prandtl-Kolmogorov sono riformulate in modo da rimanere valide anche in tale regione.

Ci occupiamo qui del primo approccio, riservando al secondo il paragrafo che segue. Classicamente (Arpaci e Larsen, 1984; Hinze, 1975) si assume che in prossimità di pareti solide esista un substrato lineare viscoso/conduittivo in cui lo scambio di quantità di moto, calore o altri scalari è controllato dalle rispettive diffusività molecolari e i profili di velocità, temperatura e così via. sono funzioni lineari della distanza  $y$  dalla parete. Tale strato è seguito da una regione esterna dello strato limite, caratterizzata da profili che variano logicamente con  $y$ .

Usando la velocità di attrito  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$  come scala di velocità,  $\nu/u_\tau$  come scala di lunghezza e  $q_w/(\rho c_p u_\tau)$  come scala di temperatura (scale di parete), restano definite le variabili adimensionali  $y^+ = y u_\tau / \nu$ ,  $u^+ = u / u_\tau$ ,  $t^+ = (t - t_w) \rho c_p u_\tau / q_w$ .

Nel caso di pareti lisce, valgono allora i profili *universali* di velocità:

$$u^+ = y^+ \quad (y^+ \leq y_v^+) \quad (4.97)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \quad (y^+ > y_v^+) \quad (4.98)$$

in cui  $\kappa \approx 0,4$  è la *costante di von Karman*, e  $y_v^+ \approx 11$  è lo spessore adimensionale del substrato viscoso. La costante  $E$  si ottiene raccordando i due profili (4.97), (4.98) per  $y^+ = y_v^+$  e risulta pari a circa 9.8.

I profili *universali* di temperatura possono esprimersi in modo analogo a quelli di velocità:

$$t^+ = \sigma y^+ \quad (y^+ \leq y_t^+) \quad (4.99)$$

$$t^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(F y^+) \quad (y^+ > y_t^+) \quad (4.100)$$

in cui  $\sigma$  è il numero di Prandtl  $c_p \mu / \lambda$ . I valori di  $y_t^+$  (spessore adimensionale del substrato conduittivo) e della costante  $F$  dipendono da  $\sigma$  e tale dipendenza è stata investigata in dettaglio, ad esempio, da Jayatilleke (1969). Le (4.99)–(4.100), tuttavia, vanno opportunamente modificate nel caso di pareti *rugose*.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

Ora, si supponga per un momento *nota* la velocità  $u_P$  parallela ad una parete solida in un nodo P posto a distanza  $y_P$  dalla parete stessa. Le Eq. (4.97)–(4.98) possono risciversi come equazioni in  $u_\tau$ :

$$u_\tau = \left( \frac{\nu u_P}{y_P} \right)^{1/2} \quad \text{se } u_P y_P \leq \nu (y_v^+)^2 \quad (4.101)$$

$$u_\tau = \frac{\kappa u_P}{\ln(E y_P u_\tau / \nu)} \quad \text{se } u_P y_P > \nu (y_v^+)^2 \quad (4.102)$$

dalle quali può ricavarsi la velocità di attrito e quindi lo sforzo tangenziale di parete  $\tau_w = \rho u_\tau^2$ . Se è rispettata la sopra citata condizione sulla minima distanza dei nodi dalla parete, varrà la (4.102), che è un'equazione trascendente in  $u_\tau$  da risolversi, ad esempio, iterativamente. La relazione fra  $\tau_w$  e  $u_P$  che si viene così a determinare sostituisce la relazione viscosa (4.101), che può anche scriversi come  $\tau_w = \mu u_P / y_P$  e che traduce, nel caso di moto laminare o di nodi P ricadenti nel substrato viscoso, la condizione di non scorrimento (*no slip*). In ciò consiste, in sostanza, il concetto di *funzioni di parete*. Considerazioni simili valgono per la relazione tra flusso termico di parete  $q_w$  e temperatura  $t_P$ .

Si osservi ora che, in realtà, sia la velocità  $u_P$  in P che il corrispondente sforzo tangenziale di parete  $\tau_w$  saranno in generale incognite del problema complessivo termofluidodinamico. La relazione non lineare fra  $\tau_w$  e  $u_P$  espressa dall'Eq. (4.102) è poco adatta ad una soluzione numerica e obbligherebbe, in sostanza, a ricorrere a tecniche di correzione ritardata (*deferred correction*), in cui lo sforzo di parete all'iterazione generica verrebbe calcolato sulla base della velocità all'iterazione precedente.

Nel contesto del modello di turbolenza  $k-\varepsilon$  e di altri modelli ad esso riconducibili, tale difficoltà viene superata se si adotta come scala di velocità per la formulazione di profili universali non la velocità di attrito  $u_\tau$ , ma la velocità fluttuante quadratica media

$$u^* = C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \quad (4.103)$$

valutata nel nodo P a partire dalla radice quadrata dell'energia cinetica turbolenta  $k_P^{1/2}$  (Launder e Spalding, 1974). La base teorica per tale scelta, che apparentemente fa dipendere una scala universale dalla posizione di un nodo di griglia, risiede nel fatto che, negli strati limite in equilibrio, esiste una regione abbastanza estesa (compresa fra  $y^+ \approx 20$  e  $y^+ \approx 60$ ) in cui si ha:  $k \approx \tau_w / (\rho C_\mu^{1/2})$ . Quindi, purchè il nodo P giaccia in tale regione,  $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$  e  $u^* = C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}$  sono scale equivalenti.

In pratica, le Eq. (4.97)–(4.98) rimangono formalmente valide, ma le quantità adimensionali  $y^+$ ,  $u^+$  e  $t^+$  vengono ridefinite come  $y^+ = y u^* / \nu$ ,  $u^+ = u u^* / (\tau_w / \rho)$  e

$t^+ = (t - t_w) \rho c_p u^* / q_w$ . Si dimostra facilmente che la relazione tra sforzo tangenziale di parete e velocità in P è data allora da:

$$\tau_w = \frac{\mu}{y_P} u_P \quad \text{se } \frac{y_P u^*}{\nu} \leq y_v^+ \quad (4.104)$$

$$\tau_w = \frac{\rho \kappa u^*}{\ln(E y_P u^* / \nu)} \quad \text{se } \frac{y_P u^*}{\nu} > y_v^+ \quad (4.105)$$

ed è quindi una relazione *formalmente lineare* anche se P giace nella regione logaritmica (esterna) dello strato di parete. Ciò semplifica grandemente la risoluzione numerica del sistema di equazioni algebriche che traducono in forma discreta le equazioni di Navier-Stokes.

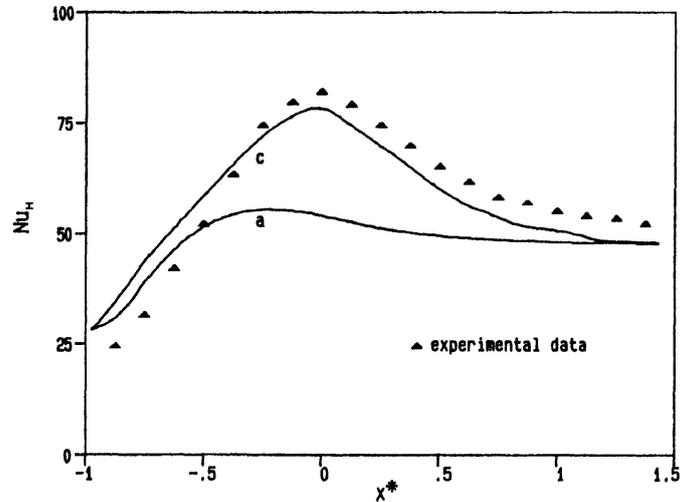
In modo analogo può ricavarsi la relazione che intercorre ora tra flusso termico di parete, temperatura di parete e temperatura nel nodo P; la trattazione si può estendere facilmente ad altri scalari passivi (ad esempio concentrazioni di soluti). Il metodo è usato oggi nella maggioranza dei codici di calcolo che prevedano l'impiego del modello  $k - \varepsilon$  o di modelli simili.

L'uso di funzioni di parete e profili universali in problemi diversi da semplici strati limite in equilibrio locale (come gradienti avversi di pressione, variazioni di sezione e moti complessi tridimensionali) è tuttavia discutibile. Il problema più critico riguarda i moti con separazione e ricircolo, e in particolare le regioni di riattacco di *shear layers* separati, in cui lo sforzo tangenziale di parete e la velocità media parallela alla parete si annullano, mentre le velocità fluttuanti e l'energia cinetica turbolenta raggiungono valori elevati, associati spesso a massimi locali del coefficiente di scambio termico. In tali regioni, ovviamente, sia  $u_\tau$  che  $u^*$  sono scale inadeguate dei profili di velocità e, per ovviare a tale inconveniente, state proposte in letteratura svariate modifiche e generalizzazioni del modello base sopra descritto (Chieng e Launder, 1980; Cruz e Silva Freire, 1998).

Ad esempio, la Fig. 4.19 (Ciofalo e Collins, 1989) riporta i profili del numero di Nusselt locale ( $Nu$ ) sulla parete che segue un gradino rivolto a valle: problema classico della modellazione della turbolenza. Qui l'ascissa è la distanza dal gradino, normalizzata rispetto alla lunghezza di riattacco per eliminare l'effetto sistematico della sottostima fornita dal modello  $k - \varepsilon$ . I valori di  $Nu$  riportati includono i dati sperimentali di Vogel e Eaton (1985) (simboli), le predizioni fornite dal modello  $k - \varepsilon$  con funzioni di parete standard (curva a) e le predizioni ottenute con funzioni di parete modificate (curva c). Il numero di Reynolds ( $Re$ ) era  $28 \cdot 10^3$  per il presente caso nel quale tanto  $Re$  quanto  $Nu$  sono definiti rispetto all'altezza  $H$  del gradino.

È evidente che le funzioni di parete standard portano ad una significativa sottostima del picco di  $Nu$  osservato sperimentalmente in corrispondenza del riattacco

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.19:** Numero di Nusselt locale sulla parete che segue un gradino rivolto a valle. Simboli: dati sperimentali Vogel e Eaton (1985); (a): modello  $k - \varepsilon$  con funzioni di parete standard; (c): modello  $k - \varepsilon$  con funzioni di parete modificate (Ciofalo e Collins, 1989).

( $x^* = 0$ ), mentre le predizioni migliorano notevolmente usando funzioni modificate. Le modifiche, in questo esempio, tengono conto essenzialmente della differenza fra l'intensità locale della turbolenza nella regione di parete e l'intensità che si avrebbe in uno strato limite in equilibrio a parità di velocità locale e distanza dalla parete.

Sono state proposte anche funzioni di parete più complesse, basate su modelli a tre o più regioni dello strato di parete; ad esempio, Amano e al. (1983) distinguono un substrato viscoso per  $y^+ \leq 5$ , una regione esterna pienamente turbolenta per  $y^+ > 30$ , e una regione intermedia (*buffer layer*) per  $5 < y^+ \leq 30$ .

#### 4.5.5 Modelli $k - \varepsilon$ per basso numero di Reynolds

Per trattare le regioni di parete in presenza di flussi turbolenti, un metodo del tutto diverso da quello basato sui profili universali consiste nell'adozione di modelli detti *per basso numero di Reynolds* che, generalmente, possono considerarsi varianti del  $k - \varepsilon$ . In tutti, la relazione di Prandtl-Kolmogorov (4.93) viene riscritta come:

$$\mu_t = \rho f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.106)$$

con l'esplicita inclusione di un fattore di smorzamento  $f_\mu$  che tiene conto della attenuazione delle scale della turbolenza in prossimità di pareti solide. Inoltre, l'e-

quazione di trasporto per la dissipazione (4.94) viene riformulata usando la variabile ausiliaria  $\varepsilon^* = \varepsilon - D$ , e può scriversi ora come:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle \varepsilon^*}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} \right] + f_1 C_1 \frac{\varepsilon^*}{k} P - f_2 C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \rho E \quad (4.107)$$

Le diverse versioni del modello  $k - \varepsilon$  per basso numero di Reynolds differiscono per la forma delle funzioni  $f_1, f_2, f_\mu, D$  ed  $E$ . Ad esempio, le espressioni di tali funzioni sono riassunte nella Fig. 4.20 per i modelli di Lam e Bremhorst (1981), Launder e Sharma (1974) e Nagano e Hishida (1987). In tutti i casi, i numeri di Reynolds  $R_t, R_k$  nelle espressioni di  $f_2$  ed  $f_\mu$  sono definiti come:

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (4.108)$$

e

$$R_k = \frac{k^{1/2} y}{\nu} \quad (4.109)$$

dove  $y$  è la distanza dalla più vicina parete solida. La coordinata adimensionale  $y^+$  è definita ancora come  $y^+ = y u_\tau / \nu$  o come  $y^+ = y C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} / \nu$ .

In tutti i modelli per basso numero di Reynolds, il substrato viscoso/conduittivo può e deve essere esplicitamente risolto dalla griglia di calcolo: è, anzi, opportuno che esso includa numerosi nodi (almeno 10–15). Le condizioni di *no slip* del tipo  $\tau_w = \mu u_P / y_P$  vengono imposte direttamente senza ricorso a funzioni di parete. La condizione al contorno per l'energia cinetica turbolenta  $k$  è di solito la semplice  $k_w = 0$ . Per quanto riguarda la dissipazione, nei modelli basati sulla consueta definizione di  $\varepsilon$ , come quello di Lam e Bremhorst (1981), la condizione al contorno per tale variabile sulle pareti può presentare problemi; una possibile scelta è imporre nulla la derivata normale  $\partial \varepsilon / \partial n|_w$ . Nei modelli in cui l'equazione di trasporto è scritta per la variabile modificata  $\varepsilon^* = \varepsilon - D$ , è invece possibile imporre la semplice condizione  $\varepsilon_w^* = 0$ .

Sono apparsi in letteratura numerosi lavori di confronto fra modelli per basso numero di Reynolds. Ad esempio Patel e al. (1985) valutano ben otto di tali modelli (inclusi i tre in Fig. 4.20) sulla base della loro capacità di riprodurre risultati sperimentali relativi a vari problemi di strato limite (fra cui moto turbolento su piastra piana, strato limite in gradiente avverso di pressione e strato limite in gradiente favorevole di pressione con rilaminarizzazione).

Passando da problemi semplici di strato limite a problemi più complessi (implicanti, ad esempio, ricircolazione o convezione naturale) o a problemi tridimensionali,

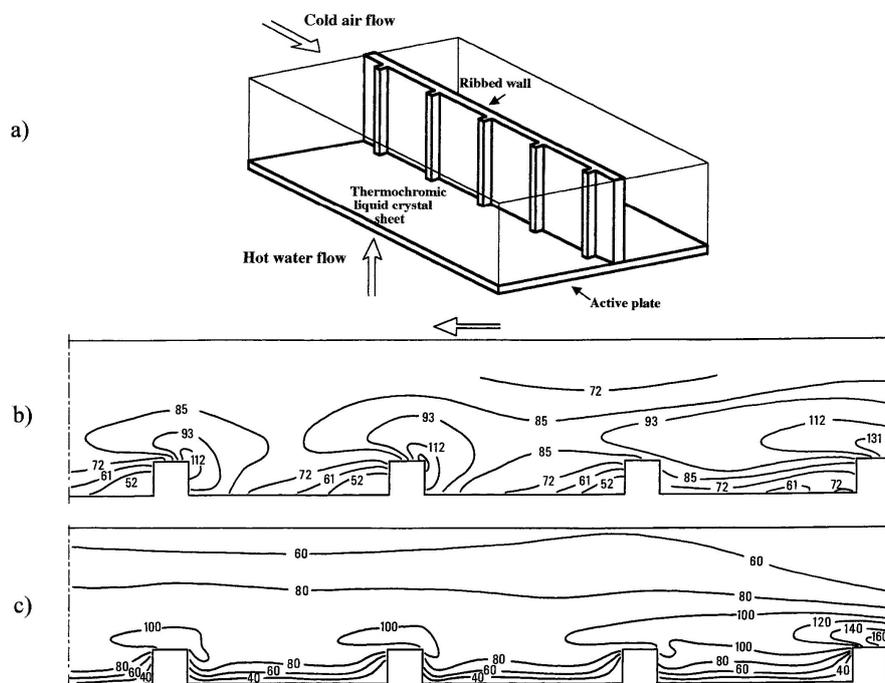
#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

	Lam-Bremhorst	Lauder-Sharma	Nagano-Hishida
$f_1$	$1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu}\right)^3$	1.0	1.0
$f_2$	$1 - \exp(-R_t^2)$	$1.0 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$1.0 - 0.3 \exp(-R_t^2)$
$f_\mu$	$\left[1 - \exp(-0.0165R_k)\right]^2 \left(1 + \frac{20.5}{R_t}\right)$	$\exp\left[\frac{-3.4}{\left(1 + R_k/50\right)^2}\right]$	$\left[1 - \exp\left(\frac{-y^+}{26.5}\right)\right]^2$
D	0	$2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j}\right) \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j}\right)$	$2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j}\right) \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j}\right)$
E	0	$2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2$	$2\nu \nu_t (1 - f_\mu) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2$

**Figura 4.20:** Forma che assumono le funzioni  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_\mu$ ,  $D$  ed  $E$  in tre modelli di turbolenza  $k - \varepsilon$  per basso numero di Reynolds.

non è detto che risultati come quelli citati mantengano la loro validità, e altre considerazioni (quali la robustezza, la facilità di implementazione, e il tempo di calcolo) possono diventare determinanti.

Nell'ambito dell'esperienza dell'autore, buoni risultati sono stati ottenuti, nel complesso, usando i modelli di Lam e Bremhorst (1981) e di Launder e Sharma (1974). Ad esempio, la Fig. 4.21 riporta risultati relativi allo scambio termico fra aria in convezione forzata e una parete piana orizzontale in presenza di una seconda parete verticale recante nervature trasversali (promotori di turbolenza). Predizioni numeriche ottenute usando il modello di Launder e Sharma e il codice di calcolo CFX-4 (AEA Technology) sono confrontate con risultati sperimentali ottenuti, mediante cristalli liquidi termocromici, da Tanda e al. (1995). Si può notare che l'accordo è soddisfacente per quanto riguarda il livello generale del coefficiente di scambio termico, ma meno buono per quanto riguarda la forma dettagliata delle sue linee di livello (che ovviamente corrispondono alla struttura del campo di moto in prossimità della parete). In ogni caso, il modello ha fornito risultati migliori sia rispetto al modello  $k - \varepsilon$  standard che rispetto a un modello differenziale degli sforzi/flussi di Reynolds del tipo discusso nel Paragrafo 4.5.8.



**Figura 4.21:** Scambio termico su una parete laterale in presenza di nervature trasversali (promotori di turbolenza): a) schema della sezione prova; b) risultati sperimentali (Tanda e al., 1995); c) predizioni ottenute con il modello  $k - \varepsilon$  a basso  $Re$  (Launder e Sharma, 1974).

#### 4.5.6 Il modello $k - \omega$

Il modello a due equazioni  $k - \varepsilon$  è basato sulla scelta dell'energia cinetica turbolenta per unità di massa  $k$  e del suo tasso di dissipazione  $\varepsilon$  come grandezze caratterizzanti la turbolenza. In sostanza,  $k$  caratterizza l'intensità delle fluttuazioni turbolente ed  $\varepsilon$  caratterizza la loro scala temporale (proporzionale a  $k/\varepsilon$ ) o spaziale (proporzionale a  $k^{3/2}/\varepsilon$ ). Sono stati proposti numerosi modelli a due equazioni basati sulla scelta di una grandezza alternativa alla dissipazione  $\varepsilon$  come seconda grandezza trasportata. Qui ci limitiamo a illustrare il modello  $k - \omega$  che negli ultimi anni, fra i modelli a viscosità turbolenta, ha superato in popolarità il  $k - \varepsilon$  ed è divenuto – in una delle sue varianti – il modello standard adottato nei più diffusi codici di calcolo.

Il modello può farsi risalire agli studi di Kolmogorov ma è divenuto di uso comune nella forma proposta da Wilcox (1988). In esso, oltre all'energia cinetica turbolenta  $k$ , risolvendo una seconda equazione di trasporto viene calcolata la frequenza caratte-

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

ristica della turbolenza  $\omega$  (che può assumersi proporzionale al rapporto  $\varepsilon/k$ , inverso della durata caratteristica delle strutture turbolente, ovvero del tempo che intercorre fra la loro produzione e la loro dissipazione). La frequenza  $\omega$  congloba il fattore  $C_\mu$ .

Le equazioni di trasporto per il modello  $k - \omega$  sono:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \beta' \rho k \omega \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{5}{9} \frac{\omega}{k} P - \beta \rho \omega^2 \quad (4.111)$$

mentre l'equazione di Prandtl-Kolmogorov (4.93) è sostituita da

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad (4.112)$$

Come nel modello  $k - \varepsilon$ , per il termine di produzione si ha:  $P = -\tau_{ij} \langle S_{ij} \rangle = 2\mu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$ , mentre i valori suggeriti da Wilcox per le costanti sono:  $\beta = 0.075$ ,  $\beta' = C_\mu = 0.09$  e  $\sigma_k = \sigma_\omega = 2$ .

Il modello  $k - \omega$  ha il vantaggio di mantenersi valido nella regione di parete che, in questo modo, può essere risolta dalla griglia di calcolo e trattata come il resto del dominio (come nei modelli per basso numero di Reynolds). Per contro, il modello risulta troppo sensibile all'intensità della turbolenza nella corrente libera e può sovrastimare  $k$  nelle regioni di ristagno.

Al fine di superare questi ultimi problemi, Menter (1993) propose di adottare una combinazione lineare fra il modello  $k - \omega$  nella regione di parete ed il modello  $k - \varepsilon$ , riformulato in termini di  $k$  e  $\omega$  anzichè di  $k$  ed  $\varepsilon$ , nella corrente libera. I due modelli sono pesati con  $F_1$  e  $(1-F_1)$ , dove  $F_1$  è una *blending function* che va da 1 alla parete (modello  $k - \omega$ ) a 0 nella corrente libera (modello  $k - \varepsilon$ ). Il modello risultante è noto come SST (*Shear Stress Transport*).

Data la sua importanza, il modello SST è illustrato nel seguito nella versione (leggermente modificata rispetto alla formulazione originale) descritta dallo stesso autore dieci anni dopo la sua introduzione (Menter et al., 2003). Nella versione modificata, equazioni di trasporto di  $k$  e  $\omega$  si scrivono come:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tilde{P} - \beta^* \rho \omega k \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle \omega}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ &+ \alpha \rho S^2 - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \rho \frac{\sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.114)$$

mentre la relazione di Prandtl-Kolmogorov (4.93) è riformulata come

$$\mu_t = \rho \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, SF_2)} \quad (4.115)$$

Nelle equazioni precedenti valgono le definizioni:

- per il parametro S

$$S = (2\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle)^{1/2} \quad (4.116)$$

- per la *blending function*  $F_1$ , che deve essere uguale a zero lontano dalla parete (modello  $k - \varepsilon$ ) e tendere a uno nello strato di parete (modello  $k - \omega$ )

$$F_1 = \tanh \left( \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\mu}{\rho \omega y^2} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right) \quad (4.117)$$

- per la *blending function*  $F_2$

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\mu}{\rho \omega y^2} \right) \right]^2 \right\} \quad (4.118)$$

- per il parametro  $CD_{k\omega}$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \quad (4.119)$$

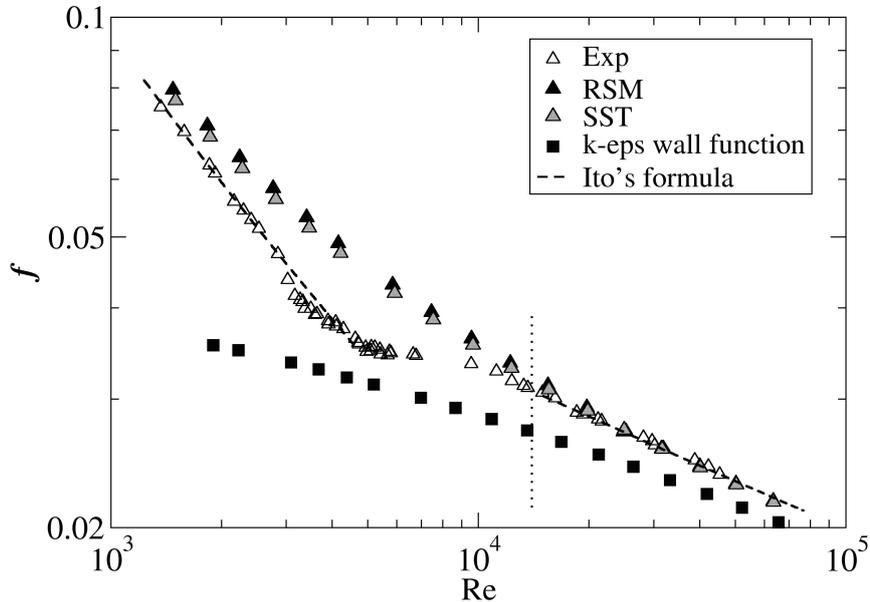
Inoltre, nel termine di produzione  $\tilde{P}$  è utilizzato un limitatore che ha lo scopo di prevenire la sovrastima di  $k$  nelle regioni di ristagno. Il passaggio concettuale è, quindi, il seguente:

$$P = 2\mu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle \Rightarrow \tilde{P} = \min(P, 10\beta^* \rho \omega k) \quad (4.120)$$

Le costanti di questo modello sono definite come:  $\beta^* = 0.09$ , ovvero attraverso le seguenti combinazioni lineari

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 F_1 + \alpha_2 (1 - F_1) \\ \beta &= \beta_1 F_1 + \beta_2 (1 - F_1) \\ \sigma_k &= \sigma_{k1} F_1 + \sigma_{k2} (1 - F_1) \\ \sigma_\omega &= \sigma_{\omega 1} F_1 + \sigma_{\omega 2} (1 - F_1) \end{aligned} \quad (4.121)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.22:** Dati sperimentali e risultati computazionali per il fattore d'attrito di Darcy in un tubo elicoidale a curvatura 0.01 (Di Piazza e Ciofalo, 2010).

nelle quali si utilizzano i valori:  $\alpha_1 = 5/9$ ,  $\beta_1 = 3/40$ ,  $\sigma_{k1} = 0.85$ ,  $\sigma_{\omega1} = 0.5$ ;  $\alpha_2 = 0.44$ ,  $\beta_2 = 0.0828$ ,  $\sigma_{k2} = 1$ ,  $\sigma_{\omega2} = 0.856$ .

In Fig. 4.22, sono confrontate con dati sperimentali e con un'accurata correlazione empirica le predizioni del fattore d'attrito di Darcy  $f$  in tubi elicoidali ottenute mediante: il modello  $k - \varepsilon$  con funzioni di parete, il modello SST  $k - \omega$  e un modello differenziale degli sforzi di Reynolds (RSM - *Reynolds Stress Model*) del tipo descritto nel Sottoparagrafo 4.5.8. L'intervallo di valori del numero di Reynolds utilizzato per il confronto, va dal regime laminare stazionario ( $Re < 3000$ ) al regime pienamente turbolento ( $Re > 10^4$ ). Si può osservare come SST fornisca predizioni simili a quelle del più complesso RSM e molto prossime, per  $Re > 10^4$ , ai risultati sperimentali. SST fornisce risultati accettabili anche nella regione di moto laminare, risultando così in grado di predire automaticamente la laminarizzazione, e commette errori più pesanti solo nella (difficile) regione transazionale  $3000 < Re < 10^4$ . Per contro, il modello  $k - \varepsilon$  con funzioni di parete presenta un andamento errato nella regione laminare e sottostima pesantemente  $f$  anche nella regione turbolenta.

### 4.5.7 Modelli algebrici degli sforzi e flussi di Reynolds

Un limite comune a tutti i modelli a viscosità turbolenta è che, in base all'Eq. (4.80), il tensore degli sforzi turbolenti (o almeno la sua parte deviatorica) risulta di necessità allineato con il tensore della velocità di deformazione. Inoltre non si fa distinzione fra i tre sforzi turbolenti normali  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ , conglobandoli in un'energia cinetica turbolenta di natura scalare; risulta quindi impossibile la predizione di effetti, come i moti secondari in canali rettangolari illustrati in Fig. 4.14, che nascono dalla asimmetria fra questi sforzi.

Un primo possibile rimedio consiste nel rinunciare all'ipotesi di una viscosità turbolenta, modellando separatamente i sei sforzi turbolenti indipendenti  $\tau_{ij}$  come funzioni *algebriche* del campo di moto medio oltre che di  $k$  ed  $\varepsilon$ . Queste ultime grandezze scalari, a loro volta, sono ottenute risolvendo opportune equazioni di trasporto del tipo delle (4.90) e (4.94). Si ottengono così i modelli detti ASM (*Algebraic Stress Models*).

Sono stati presentati in letteratura numerosi modelli di questo tipo. Ci limitiamo qui a segnalare un particolare modello algebrico, il  $k - \varepsilon$  *non-lineare* di Speziale (1987), che si distingue per la profondità e la generalità della sua base teorica. L'autore parte dall'assunzione che il tensore  $\tau_{ij}$  degli sforzi turbolenti possa esprimersi come una funzione del gradiente di velocità medio, della sua derivata temporale *totale* e degli scalari  $k$  ed  $\varepsilon$  (nonché, nel caso di flussi comprimibili, della densità  $\rho$ ):

$$\tau_{ij} = F \left[ \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l}; \frac{D}{Dt} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l}; k; \varepsilon; \rho \right] \quad (4.122)$$

Il modello  $k - \varepsilon$  può pensarsi come la espansione in serie di Taylor di tale equazione troncata al primo termine. Il suo sviluppo fino al secondo termine, condotto imponendo al modello certe proprietà molto generali (quali l'invarianza rispetto al sistema di riferimento, la positività di  $k$  e il corretto comportamento asintotico nel caso di rapida rotazione) conduce invece alla seguente espressione per  $\tau_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = C \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \langle S_{ij} \rangle + C^2 \rho \frac{k^3}{\varepsilon^2} \times \\ \left[ C_D \left( \langle S_{im} \rangle \langle S_{mj} \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle S \rangle^2 \right) + C_E \left( \langle D_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle D_{kk} \rangle \right) \right] \end{aligned} \quad (4.123)$$

in cui  $S_{ij}$  è il tensore della velocità di deformazione media,  $\langle S \rangle^2$  è il suo invariante quadratico e  $\langle D_{ij} \rangle$  è la *derivata di Oldroyd* di  $\langle S_{ij} \rangle$ , definita come:

$$\langle D_{ij} \rangle = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle S_{ij} \rangle + \langle u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle S_{ij} \rangle \right] - \left[ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \langle S_{kj} \rangle + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \langle S_{ki} \rangle \right] \quad (4.124)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

(La derivata di Oldroyd è un operatore tensoriale usato comunemente negli studi sulla reologia di fluidi non newtoniani, ma solo raramente negli studi sulla dinamica dei fluidi newtoniani e sulla turbolenza).

Si riconoscerà che il primo termine dell'Eq. (4.123) coincide (per fluidi incomprimibili) con la consueta relazione di Prandtl-Kolmogorov (4.93) usata nei modelli a viscosità turbolenta purchè sia  $C = 2C_\mu$ . I rimanenti termini sono i contributi non lineari che caratterizzano il modello di Speziale. Per entrambe le costanti  $C_D$ ,  $C_E$  Speziale (1987) suggerisce il valore di 1.68. Nell'articolo citato l'autore dimostra, inoltre, che il modello  $k - \varepsilon$  non lineare consente la corretta predizione dei moti secondari nel deflusso turbolento sviluppato in canali rettangolari e della lunghezza di riattacco in problemi con ricircolazione come il classico gradino rivolto a valle laddove il modello  $k - \varepsilon$  standard, o *lineare*, porta ad una considerevole sottostima.

Per quanto riguarda il trasporto di entalpia e altri scalari, nell'ambito dei modelli algebrici l'ipotesi di *diffusione per gradiente semplice (SGDH)*, Eq.(4.81), può coerentemente sostituirsi con la cosiddetta ipotesi di *diffusione per gradiente generalizzata* (ovvero *GGDH - Generalized Gradient Diffusion Hypothesis*) scritta nella forma:

$$q_i = -\rho c_p C_q \frac{k}{\varepsilon} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_j} \quad (4.125)$$

Rispetto alla (4.81), nella (4.125) la diffusività scalare  $\alpha_t$  è sostituita dalla grandezza tensoriale  $C_q (k/\varepsilon) \langle u'_i u'_j \rangle$ . La costante  $C_q$  è generalmente assunta dell'ordine di 0.3 (Daly e Harlow, 1970). La (4.125) può utilizzarsi al posto della più semplice (4.81) anche nel contesto di modelli a viscosità turbolenta come il  $k - \varepsilon$ , esprimendo ovviamente i momenti di secondo ordine delle velocità fluttuanti come  $2(\mu_t/\rho) \langle S_{ij} \rangle$ : ciò consente di modellare flussi termici turbolenti non allineati con il gradiente medio di temperatura.

##### 4.5.8 Modelli differenziali degli sforzi e flussi di Reynolds

La soluzione più rigorosa ai problemi che nascono dal concetto di viscosità turbolenta consiste nel risolvere esplicitamente equazioni di trasporto separate per le sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi turbolenti  $\tau_{ij} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle$  definite dall'Eq. (4.78) e, nei problemi di scambio di calore, per le tre componenti del vettore flusso termico turbolento  $q_i = \rho c_p \langle u'_i t' \rangle$  definite dall'Eq. (4.79). I modelli risultanti sono indicati in letteratura con vari acronimi come: RSM (*Reynolds Stress Models*), RST (*Reynolds Stress Transport [Models]*) o, più semplicemente, DS (*Differential Stress [Models]*).

Un'equazione di trasporto formalmente esatta per  $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$  si può costruire a partire dalle equazioni di Navier-Stokes (4.2) operando le sostituzioni:  $u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$ ,

e così via per  $j$  e  $k$ , moltiplicando la  $i$ -esima equazione per  $u'_j$  e la  $j$ -esima per  $u'_i$ , sommando e infine mediando rispetto al tempo. Limitandoci al caso di fluidi incomprimibili e tenendo conto delle proprietà

$$\langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle = \langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle = 0$$

discusse in precedenza per l'operatore di media temporale, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \rho \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} = & - \left[ \rho \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \rho \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right] \\ & - 2\mu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \langle u'_i u'_j u'_k \rangle - \mu \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} + \langle p' (\delta_{jk} u'_i + \delta_{ik} u'_j) \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.126)$$

in cui i quattro termini al membro destro rappresentano, rispettivamente: produzione da *shear*, distruzione, redistribuzione e diffusione di  $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$ . Si è usata la consueta convenzione di Einstein di somma implicita su indici ripetuti, e si è indicato con  $\delta_{ij}$  il delta di Kronecker.

Il sistema di sei equazioni (4.126), unitamente alle equazioni di continuità e di Navier-Stokes per le velocità medie (4.44) e (4.45), consentirebbe di ricavare le grandezze medie  $\langle u_i \rangle$ ,  $\langle p \rangle$  e gli sforzi di Reynolds  $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$  se non fosse per la (inevitabile!) presenza di alcuni termini in cui figurano *ulteriori* incognite. Questi termini vanno modellati in modo approssimato per ottenere la chiusura del sistema costituito dalle (4.44), (4.45) e (4.126). Fra i vari possibili approcci, è delineato nel seguito quello classico introdotto da Hanjalić e Launder (1972) e Launder e al. (1975) nel quale, per convenienza espositiva, i vari termini saranno esaminati nell'ordine leggermente modificato di: (a) produzione, (b) distruzione, (c) diffusione e (d) redistribuzione:

a) **Termine di produzione:** è il primo termine nella (4.126) ed, essendo già espresso in funzione degli sforzi di Reynolds, non richiede modelli di chiusura.

b) **Termine di distruzione:** è il secondo termine nella (4.126). Assumendo che le scale dissipative del moto siano *isotropiche*, questo termine si può modellare come:

$$2\mu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \varepsilon \quad (4.127)$$

Si può cioè assumere che i termini di distruzione agiscano solo sugli sforzi di Reynolds *normali*, siano uguali nelle tre direzioni e abbiano come somma il doppio della dissipazione  $\varepsilon$  moltiplicata per la densità  $\rho$ . Il fattore 2 nasce dal fatto che la somma degli sforzi di Reynolds normali è *il doppio* dell'energia cinetica turbolenta  $k$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

moltiplicata per la densità  $\rho$ . L'introduzione di  $\varepsilon$  richiede, ovviamente, che sia aggiunta al sistema e risolta un'opportuna *equazione di trasporto* per tale variabile, modellata sullo schema della (4.94) ma opportunamente modificata per fare figurare esplicitamente i sei sforzi di Reynolds.

c) **Termine di diffusione:** è il quarto termine nella (4.126). In esso la correlazione fra pressione e velocità fluttuanti (terzo addendo nella parentesi quadra), può essere trascurata, mentre il termine molecolare proporzionale a  $\mu$  (secondo addendo nella parentesi quadra) è già espresso in funzione degli sforzi di Reynolds e non richiede modelli di chiusura. L'unico termine da approssimare è il primo addendo: la correlazione tripla  $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$ . Per esso, gli autori citati dimostrano che è lecito scrivere:

$$-\langle u'_i u'_j u'_k \rangle = c_s \frac{k}{\varepsilon} \left[ \langle u'_i u'_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} + \langle u'_j u'_l \rangle \frac{\partial \langle u_k u_i \rangle}{\partial x_l} + \langle u'_k u'_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right] \quad (4.128)$$

in cui  $c_s$  è una costante e il moltiplicatore  $k/\varepsilon$  può interpretarsi come la scala temporale delle strutture turbolente responsabili della diffusione.

d) **Termine di redistribuzione:** è il terzo termine nella (4.126) e nasce dalla correlazione fra le componenti fluttuanti di pressione e gradiente di velocità. Il nome esprime il fatto che questo termine tende a ridurre la differenza fra i tre sforzi turbolenti normali. Sulla base dei pionieristici studi teorici di Chou (1945) e Rotta (1951), gli autori citati esprimono questo termine come la somma di tre contributi  $(\Phi_{ij})_1$ ,  $(\Phi_{ij})_2$ ,  $(\Phi_{ij})_w$ .

Il termine  $(\Phi_{ij})_1$  è legato alla mutua interazione fra le componenti fluttuanti di velocità e può assumersi proporzionale alla componente deviatorica del tensore degli sforzi turbolenti:

$$(\Phi_{ij})_1 = -C_{\Phi 1} \rho \frac{\varepsilon}{k} \left( \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (4.129)$$

in cui  $2.5 < C_{\Phi 1} < 2.8$  è una costante.

Il termine  $(\Phi_{ij})_2$  è legato all'interazione delle componenti fluttuanti di velocità con il gradiente di velocità medio. Riportiamo solo la sua espressione approssimata:

$$(\Phi_{ij})_2 = -\gamma \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (4.130)$$

in cui  $\gamma \approx 0.6$  è una costante,

$$P_{ij} = - \left[ \rho \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \rho \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right] \quad (4.131)$$

è il termine di produzione di  $\rho\langle u'_i u'_j \rangle$ , e

$$P = \frac{1}{2} P_{kk} = -\tau_{ij} \langle S_{ij} \rangle = \rho \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \quad (4.132)$$

è il termine di produzione di energia cinetica turbolenta  $\rho k$ . (Omettiamo qui per brevità espressioni più complesse, implicanti la contrazione dei gradienti di velocità medi con un opportuno tensore del quarto ordine).

Infine, il termine  $(\Phi_{ij})_w$  è il cosiddetto *termine di riflessione*, che modella il contributo di pareti solide alla anisotropia delle tensioni normali. Una sua possibile approssimazione è:

$$(\Phi_{ij})_w = \left[ C_{1w} \rho \frac{\varepsilon}{k} \left( \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + C_{2w} (P_{ij} - B_{ij}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon y} \quad (4.133)$$

in cui  $C_{1w} \approx 0.125$ ,  $C_{2w} \approx 0.015$  sono due costanti,  $P_{ij}$  è stato definito sopra,  $B_{ij}$  è definito come:

$$B_{ij} = - \left[ \rho \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} + \rho \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \right] \quad (4.134)$$

e  $y$  denota la distanza dalla più vicina parete. (Anche in questo caso omettiamo per brevità espressioni più complesse proposte in letteratura).

Tenendo conto delle varie espressioni approssimate descritte sopra, l'equazione di trasporto di  $\rho\langle u'_i u'_j \rangle$  può scriversi nella forma chiusa finale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \rho \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} &= - \left[ \langle \rho u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \rho \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \varepsilon \\ &- C_{\Phi 1} \rho \frac{\varepsilon}{k} \left( \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - \gamma \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\ &+ \left[ C_{1w} \rho \frac{\varepsilon}{k} \left( \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + C_{2w} (P_{ij} - B_{ij}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon y} \\ &- c_s \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{k}{\varepsilon} \left[ \rho \langle u'_i u'_l \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_l} + \rho \langle u'_j u'_l \rangle \frac{\partial \langle u_k u_i \rangle}{\partial x_l} + \rho \langle u'_k u'_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (4.135)$$

In quest'ultima equazione figurano numerose costanti ( $C_{\Phi 1}$ ,  $C_{\Phi 2}$ ,  $C_{1w}$ ,  $C_{2w}$ ,  $\gamma$ ,  $c_s$ ) i cui valori, in ultima analisi, vanno ottimizzati attraverso il confronto con il più ampio possibile insieme di risultati analitici, asintotici e sperimentali. Figurano inoltre, accanto agli sforzi di Reynolds:  $\tau_{ij} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle$ , le quantità  $k$  ed  $\varepsilon$ . L'energia cinetica turbolenta è ovviamente esprimibile come  $k = \langle u'_k u'_k \rangle / 2$ . La dissipazione  $\varepsilon$ , invece,

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

va ottenuta, come si è accennato più sopra, da una ulteriore equazione di trasporto analoga alla (4.94). Una possibile forma di tale equazione è:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \rho \langle u_j \rangle \varepsilon}{\partial x_j} \\ &= -C_{\varepsilon 1} \frac{\rho \varepsilon}{k} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \langle u'_k u'_j \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.136)$$

In essa figurano tre ulteriori costanti per le quali gli autori citati suggeriscono i valori  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.9$  e  $C_{\varepsilon} = 0.15$ .

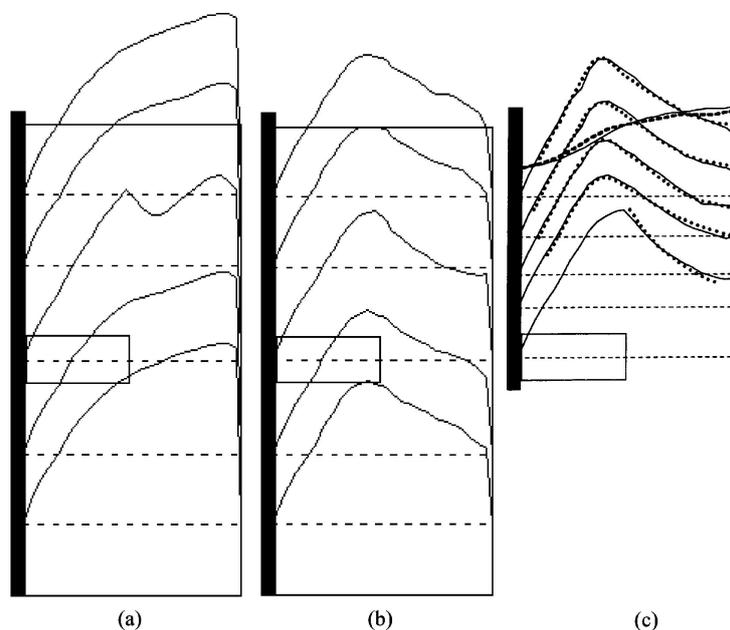
Per quanto riguarda il trasporto di entalpia e altri scalari, anche nell'ambito dei modelli differenziali la *ipotesi di diffusione per gradiente semplice (SGDH)* di cui all'Eq. (4.81), può essere sostituita dalla *ipotesi di diffusione per gradiente generalizzata (GGDH)* di cui all'Eq. (4.125).

Come si vede, i modelli di trasporto degli sforzi di Reynolds (modelli del secondo ordine) danno luogo a espressioni assai complesse e richiedono un grande numero di costanti di calibrazione. Rispetto ai modelli  $k - \varepsilon$ , per problemi tridimensionali essi richiedono la soluzione di sei equazioni di trasporto in luogo della singola equazione per  $k$  e sono quindi molto più impegnativi in termini di memoria e di tempo di calcolo. Infine, poiché i termini diffusivi dei modelli  $k - \varepsilon$  a viscosità turbolenta sono sostituiti da termini non diffusivi, questi modelli possono presentare problemi di stabilità numerica. Nei codici commerciali di calcolo che ne fanno uso, la simulazione basata su modelli differenziali viene di solito preceduta da un certo numero di iterazioni preliminari in cui si utilizza un modello a viscosità turbolenta.

A fronte di questi svantaggi, i modelli del secondo ordine sono in grado, in linea di principio, di descrivere correttamente problemi in cui la anisotropia degli sforzi di Reynolds giochi un ruolo. Esempi spesso citati includono la predizione corretta della lunghezza di riattacco in flussi separati, del tasso di allargamento di getti piani o circolari sommersi, della circolazione secondaria in canali non circolari, e del campo di moto in problemi con rotazione (*swirl*).

Un esempio di quest'ultimo tipo è illustrato in Fig. 4.23. Esso riguarda la simulazione del campo di moto turbolento in un reattore chimico cilindrico del tipo *unbaffled*, cioè senza setti frangiflutti sulla parete laterale, agitato da una girante multipala (Ciofalo e al., 1996).

Per questo problema, solo apparentemente semplice, le simulazioni sono state condotte nel sistema di riferimento rotante della girante, allo scopo di superare i problemi legati al moto relativo fra le pale e il fluido. Le pareti esterne sono state descritte come scorrevoli impostando l'appropriata velocità tangenziale al confine dei volumi



**Figura 4.23:** Profili radiali della velocità azimutale  $u_\theta$  a varie quote in un reattore non settato. a) modello  $k-\varepsilon$ , recipiente chiuso; b) modello differenziale degli sforzi, recipiente chiuso; c) modello differenziale degli sforzi (linee continue) e risultati sperimentali (simboli), recipiente aperto; sono riportati anche i profili calcolati e sperimentali del pelo libero (Ciofalo e al., 1996).

finiti adiacenti alle pareti solide, e al membro destro delle equazioni della quantità di moto sono stati aggiunti opportuni termini per descrivere le forze inerziali (centrifuga e di Coriolis) che nascono nel sistema di riferimento rotante.

I profili radiali di  $u_\theta$  a varie quote calcolati con il modello  $k-\varepsilon$  e con il modello differenziale degli sforzi nel caso di un recipiente *chiuso* superiormente sono riportati nei grafici (a) e (b), rispettivamente. I risultati  $k-\varepsilon$  sono prossimi a quelli che si avrebbero per *moto rigido*, e tendono sempre più a questi al crescere del numero di iterazioni, mentre solo il modello differenziale degli sforzi predice correttamente la struttura a vortice osservata in questa configurazione. Che l'accordo non sia solo qualitativo è confermato dal grafico (c), che riporta predizioni del modello differenziale e risultati sperimentali per un recipiente aperto; sono pure inclusi nel grafico i profili calcolati e sperimentali del pelo libero.

## 4.6 TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA

### 4.6.1 Aspetti fisici e descrizione matematica

Si ha convezione naturale (*buoyancy*) quando siano presenti, simultaneamente:

- una forza di massa come la gravità, che figura come termine aggiuntivo  $f_i = \rho g_i$  (dimensionalmente come forza per unità di volume) al secondo membro della equazione  $i$ -sima della quantità di moto
- un gradiente di densità  $\partial\rho/\partial x_i$  con componente non nulla nella direzione della forza di massa.

Si tenga presente tuttavia che, nei sistemi di riferimento non inerziali, la convezione *naturale* può essere innescata anche dalle forze di massa legate al moto, come la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Inoltre, va notato che la convezione naturale può accompagnarsi alla convezione forzata e, in tal caso, si parla di convezione mista.

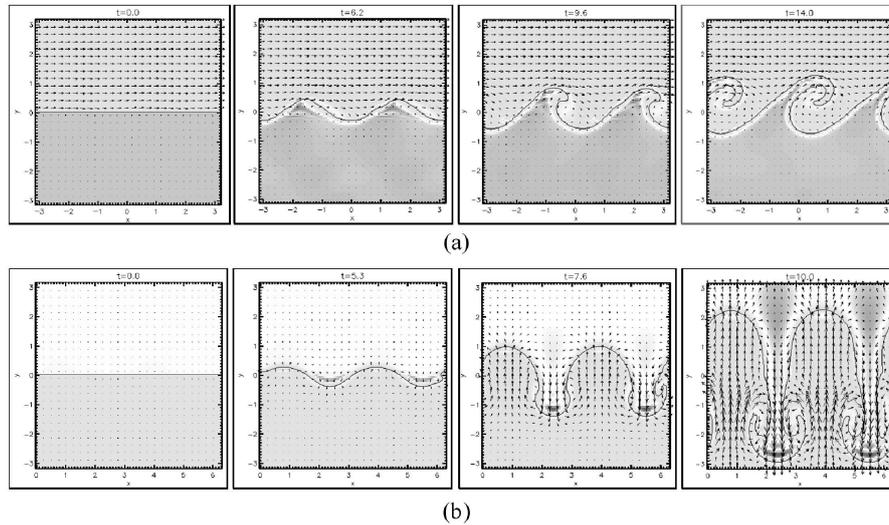
Dal punto di vista fisico, la convezione naturale agisce sulla turbolenza attraverso:

- la modifica (o lo stesso instaurarsi) del moto medio che, a sua volta, produce o sopprime turbolenza attraverso i meccanismi, mediati da sforzi di taglio (*shear*), discussi in precedenza;
- meccanismi propri e specifici di produzione o soppressione, basati sull'instaurarsi di regioni con stratificazione di densità rispettivamente instabile se  $f_i(\partial\rho/\partial x_i) < 0$ , o stabile se  $f_i(\partial\rho/\partial x_i) > 0$ .

In Fig. 4.24, le due vie di azione sono rispettivamente esemplificate dalle due instabilità di Kelvin-Helmholtz, tipica degli strati limite (a), e di Rayleigh-Taylor, tipica delle stratificazioni di densità (b). Le relative sequenze di immagini illustrano schematicamente il modo in cui una perturbazione iniziale diverge nel tempo. Naturalmente, quelli rappresentati in figura non sono gli unici possibili meccanismi di produzione di turbolenza, ma sono stati scelti come rappresentativi dei distinti effetti dello *shear* e della *buoyancy*.

Dal punto di vista della descrizione matematica, nella simulazione diretta (DNS) nessuna speciale modellazione è richiesta per rappresentare gli effetti della convezione naturale sulla turbolenza in quanto tali effetti emergono in modo naturale dalla soluzione in transitorio delle equazioni del moto. Nelle simulazioni LES, gli effetti

## 4.6. TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA



**Figura 4.24:** Tipici meccanismi di instabilità che, nel tempo (qui indicato col simbolo  $t$ ), possono portare alla turbolenza: (a) instabilità di Kelvin-Helmholtz, caratteristica degli strati limite e (b) instabilità di Rayleigh-Taylor, caratteristica delle stratificazioni di densità [adattato da ACT-JST (2014)].

della convezione naturale sono considerati esplicitamente in alcuni modelli *sub-grid* ma, per brevità, non ce ne occuperemo in questa sede.

Nei modelli RANS, infine, occorre distinguere tra le due vie d'azione. La via legata agli strati limite, infatti, viene considerata implicitamente nel modellare la generazione di turbolenza da *shear*. Gli effetti relativi sono espressi dal termine di produzione  $P$  dell'energia cinetica turbolenta  $\rho k$ , definito dall'Eq. (4.91) o, nel contesto degli sforzi di Reynolds, dall'Eq. (4.132), e dai termini di produzione  $P_{ij}$  del generico sforzo di Reynolds  $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$  definiti dall'Eq. (4.131). Al contrario, la via d'azione tipica delle stratificazioni di densità richiede una specifica modellazione, discussa nel Paragrafo 4.6.3 perché, in generale, la stratificazione di densità non è legata tanto alla distribuzione della temperatura media quanto alla distribuzione della temperatura istantanea che, nei modelli RANS, è irrisolta.

### 4.6.2 Contributo della *buoyancy* ai bilanci degli sforzi di Reynolds

Per ragioni che appariranno chiare nel paragrafo che segue, conviene iniziare dall'esame degli effetti della *buoyancy* sui termini di produzione  $P_{ij}$  del generico sforzo di Reynolds  $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$  definiti dall'Eq. (4.131). Una modellazione di tali effetti può de-

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

rivarsi a partire dalle equazioni esatte di trasporto degli sforzi di Reynolds, ottenute manipolando le equazioni di Navier-Stokes. Se queste ultime sono scritte nella forma (4.2), e cioè senza forze di massa, si ottengono per gli sforzi di Reynolds le equazioni di trasporto in forma aperta (4.126) o in forma chiusa (4.135). Se invece nelle (4.2) si aggiunge al membro destro una forza di massa  $f_i$ , e si parte dall'espressione

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i \quad (4.137)$$

si dimostra che alle equazioni di trasporto degli sforzi, scritte nella forma aperta equivalente alle (4.126) o nella forma chiusa equivalente alle (4.135), viene ad aggiungersi un termine di produzione dovuto alla *buoyancy*

$$G_{ij} = \langle u'_i f'_j \rangle + \langle u'_j f'_i \rangle \quad (4.138)$$

nel quale  $f'_i$  è la componente fluttuante della forza di massa per unità di volume  $f_i = \rho g_i$ . Tale aggiunta si colloca al membro destro delle (4.126) o modifica, sempre al membro destro, il termine di produzione  $P_{ij}$  che compare nelle (4.135) consentendo la scrittura simbolica:

$$(P_{ij})_{shear} \Rightarrow (P_{ij})_{shear} + (G_{ij})_{buoyancy} \quad (4.139)$$

Se poi si assume  $g_i = cost$  in tutto il campo di moto, allora  $f'_i$  nasce dalle sole fluttuazioni  $\rho'$  di densità, ovvero

$$f'_i = g_i \rho' \quad (4.140)$$

e la (4.138) si può scrivere nella forma

$$G_{ij} = g_i \langle u'_i \rho' \rangle + g_j \langle u'_j \rho' \rangle \quad (4.141)$$

Si noti che l'ipotesi  $g_i = cost$  è senz'altro valida per le accelerazioni di gravità e centrifuga, ma non per le accelerazioni di Coriolis che dipendono, a loro volta, dalle velocità e presentano, quindi, componenti fluttuanti.

Nel caso particolare del galleggiamento termico (*thermal buoyancy*), in base all'approssimazione di Boussinesq per la correlazione densità-temperatura si ha

$$\rho' = -\beta \rho t' \quad (4.142)$$

essendo  $\beta = -(1/\rho) \partial \rho / \partial t$  il coefficiente di dilatazione cubica del fluido. Pertanto, le correlazioni velocità-densità nell'Eq. (4.141) possono esprimersi come

$$\langle u'_i \rho' \rangle = -\beta \rho \langle u'_i t' \rangle \quad \text{e} \quad \langle u'_j \rho' \rangle = -\beta \rho \langle u'_j t' \rangle \quad (4.143)$$

## 4.6. TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA

e, di conseguenza, la (4.141) diventa

$$G_{ij} = -\beta\rho(g_i\langle u_j't' \rangle + g_j\langle u_i't' \rangle) \quad (4.144)$$

Infine, tenuto conto della (4.79):  $q_j = \rho c_p \langle u_j't' \rangle$ , qui richiamata per convenienza, la (4.144) può essere scritta nella forma alternativa

$$G_{ij} = -\frac{\beta}{c_p}(g_i q_j + g_j q_i) \quad (4.145)$$

in cui compaiono i flussi termici turbolenti che, per quanto visto più volte in precedenza, sono esprimibili in base ad opportune formule di chiusura.

In armonia con le considerazioni riportate all'inizio del paragrafo, si può quindi affermare che, nel caso particolare del galleggiamento termico ed entro i limiti di validità dell'approssimazione di Boussinesq per la correlazione densità-temperatura, le espressioni complete del trasporto del generico flusso di Reynolds, in cui figurano sia la produzione da *shear* sia la produzione da *buoyancy*, si ottengono

- in forma aperta aggiungendo la (4.144) al membro destro delle (4.126), e
- in forma chiusa aggiungendo la (4.145) al termine di produzione  $P_{ij}$  che compare nelle (4.135).

Nel contesto di applicabilità dell'Eq. (4.145), i flussi termici turbolenti possono venir modellati mediante l'ipotesi di *diffusione per gradiente generalizzata (GGDH)* espressa nella forma (4.125). I termini di produzione aggiuntivi nell'Eq. (4.145) diventano allora:

$$G_{ij} = C_q \rho \frac{k}{\varepsilon} \beta (g_i \langle u_j' u_k' \rangle + g_j \langle u_i' u_k' \rangle) \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_k} \quad (4.146)$$

con somma implicita sull'indice  $k$  e, come già ricordato, con:  $C_q \approx 0.3$  (Daly e Harlow, 1970).

### 4.6.3 Contributo della *buoyancy* ai bilanci dell'energia cinetica turbolenta

Come si è già osservato, nel contesto dei modelli a viscosità turbolenta (come, ad esempio, il  $k - \varepsilon$  e il  $k - \omega$ ), gli effetti della generazione di turbolenza da *shear* sono espressi dal termine di produzione  $P$  dell'energia cinetica turbolenta  $\rho k$ , definito dall'Eq. (4.91). Pertanto, nel contesto qui considerato, occorre trovare un termine  $G$  che esprima la produzione aggiuntiva di  $\rho k$  dovuta alla *buoyancy*. Una forma

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

esatta per tale termine si ottiene osservando che, in analogia alla definizione (4.89):  $\rho k = \tau_{jj}/2$ , qui richiamata per convenienza, deve anche essere:  $G = G_{jj}/2$  e, quindi, dalla (4.141) si ottiene

$$G = g_j \langle u'_j \rho' \rangle \quad (4.147)$$

Adottando, come in precedenza, l'approssimazione di Boussinesq per la correlazione densità-temperatura, si ha:  $\rho' = -\rho\beta t'$  e, di conseguenza, si ottiene

$$G = -\rho\beta g_j \langle u'_j t' \rangle \quad (4.148)$$

sempre con somma implicita su  $j$ . In base alla definizione dei flussi termici turbolenti:  $q_j = \rho c_p \langle u'_j t' \rangle$ , si arriva allora alla relazione

$$G = -\frac{\beta}{c_p} g_j q_j \quad (4.149)$$

in cui compaiono, appunto, i flussi termici turbolenti che, al solito, sono esprimibili mediante opportune formule di chiusura.

Nel contesto di modelli a viscosità turbolenta la più semplice formula di chiusura coerente deriva dall'utilizzo dell'ipotesi di *diffusione per gradiente semplice (SGDH)* esplicitata nell'Eq. (4.81). In questo modo, dalla (4.149) si ottiene l'espressione in forma chiusa:

$$G = \beta \rho \alpha_t g_j \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial x_j} \quad (4.150)$$

in cui si ha:  $\rho \alpha_t = \mu_t / \sigma_t$  e  $\sigma_t$  è il numero di Prandtl turbolento.

Se l'unica accelerazione è quella di gravità e l'asse  $x_3 = z$  punta verso l'alto, allora si ha:  $g_3 = -g$ ,  $g_1 = g_2 = 0$  e l'Eq. (4.150) si riduce a

$$G = \beta \rho \alpha_t g \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial z} \quad (4.151)$$

In tal caso, il termine  $G$  è positivo (produzione) se  $\partial \langle t \rangle / \partial z < 0$ , cioè se la temperatura decresce con la quota (stratificazione instabile), mentre  $G$  è negativo (distruzione) se  $\partial \langle t \rangle / \partial z > 0$ , cioè se la temperatura cresce con la quota (stratificazione stabile). Se ne deduce che la stratificazione instabile promuove la turbolenza, mentre la stratificazione stabile tende a sopprimere la turbolenza, se presente.

In convezione mista, una misura dell'importanza della *buoyancy* rispetto alla componente forzata della convezione è data dal *numero di Richardson*, definito come:

$$Ri = -\frac{G}{P} \quad (4.152)$$

#### 4.6. TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA

cioè come il rapporto, cambiato di segno, fra la produzione di turbolenza da *buoyancy* e quella da *shear*.

Si noti che  $P$  è quasi sempre positivo (fa eccezione il caso di accelerazioni spaziali quali si hanno nei convergenti, che tendono a sopprimere la turbolenza); pertanto, in base alla definizione,  $Ri$  è positivo quando  $G$  è negativo, cioè quando gli effetti di *buoyancy* tendono a sopprimere la turbolenza (stratificazione stabile), ed è negativo quando sia lo *shear* che la *buoyancy* agiscono concordemente nel promuovere turbolenza. Più precisamente, si osserva che per  $Ri > 0.25$  il moto è stabile (la soppressione di turbolenza ad opera della stratificazione stabile supera la produzione da *shear*), mentre per  $Ri < 0.25$  il moto è dinamicamente instabile (turbolento). Se entrambi i termini  $P$  e  $G$  sono espressi senza fare uso dell'ipotesi di diffusione per gradiente, e cioè  $G$  in base all'Eq. (4.148) e  $P$ , in base al primo ed al quarto membro dell'Eq (4.132), nella forma

$$P = -\rho \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \quad (4.153)$$

allora  $Ri$  prende il nome di *numero di Richardson di flusso*  $Ri_f$  e viene scritto come

$$Ri_f = -\frac{\rho \beta g_j \langle u'_j t' \rangle}{\rho \langle u'_j u'_k \rangle (\partial \langle u_j \rangle / \partial x_k)} \quad (4.154)$$

Se invece sia  $P$  sia  $G$  sono espressi in forma chiusa sulla base dell'*ipotesi di diffusione per gradiente semplice (SGDH)*, e cioè  $G$  secondo l'Eq. (4.150) e  $P$  secondo la (4.91), richiamata per comodità

$$P = \mu_t \left( \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{x_j} \right) \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i}$$

allora  $Ri$  prende il nome di *numero di Richardson di gradiente*  $Ri_g$  e assume la forma

$$Ri_g = -\frac{\beta}{\sigma_t} \frac{g_j \partial \langle t \rangle / \partial x_j}{(\partial \langle u_j \rangle / \partial x_k + \partial \langle u_k \rangle / \partial x_j) (\partial \langle u_j \rangle / \partial x_k)} \quad (4.155)$$

Per ricavare quest'ultima equazione, si è fatto uso del fatto che:  $\alpha_t = \nu_t / \sigma_t = \mu_t / (\rho \sigma_t)$ .

#### 4.6.4 Contributo della *buoyancy* ai bilanci di dissipazione

Sia nei modelli di trasporto degli sforzi di Reynolds sia in quelli a viscosità turbolenta, resta da vedere come gli effetti della *buoyancy* si riflettano sull'equazione di trasporto della dissipazione  $\varepsilon$  o di grandezze ad essa riconducibili come, ad esempio,  $\omega$  ed  $l$ .

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

Se, per semplicità, ci si limita al modello  $k - \varepsilon$ , si può affermare che l'approccio seguito da quasi tutti gli autori è quello di modificare il termine di produzione di  $\varepsilon$  da *shear* che compare nell'Eq. (4.94), aggiungendo a  $P$  un contributo pesato di  $G$ , secondo la scrittura simbolica:

$$C_1 \frac{\varepsilon}{k} P \quad \Rightarrow \quad C_1 \frac{\varepsilon}{k} (P + C_3 G) \quad (4.156)$$

dove  $C_3$  è un ulteriore parametro del modello, mentre  $P$  e  $G$  sono gli stessi parametri utilizzati nell'equazione di bilancio di  $k$  (che, nel contesto qui considerato, possono venir vantaggiosamente espressi mediante le relazioni discusse nel paragrafo precedente).

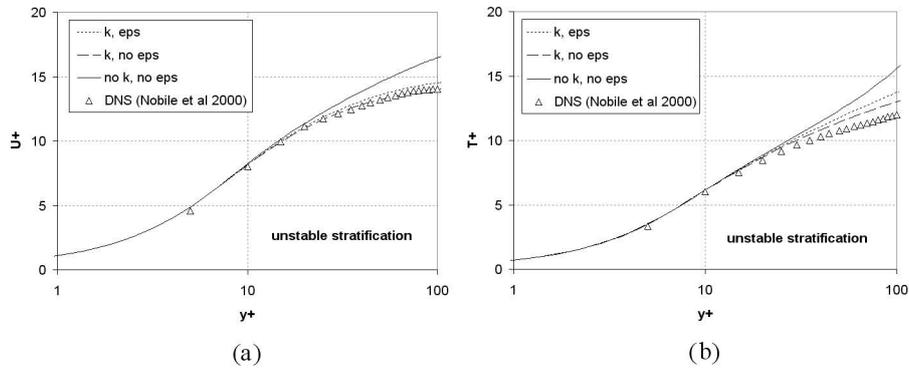
I diversi autori, invece, non concordano sulle espressioni da utilizzare per  $C_3$  e, in proposito, hanno formulato diverse proposte:

- la più semplice è:  $0.5 < C_3 < 1$  costante;
- $C_3 = f(Ri)$  ovvero funzione del numero di Richardson  $Ri = -G/P$  (Rodi, 1987; Yan e Holmsted, 1999; Van Maele e Merci, 2006);
- $C_3 = \tanh |w/u|$  in cui  $w$  e  $u$  sono le componenti verticale e orizzontale della velocità, sicchè  $C_3$  tende a +1 se il moto è verticale ascendente, tende a -1 se il moto è verticale discendente, ed è pari a 0 se il moto è orizzontale (Lam e Bremhorst, 1981; Abe e al., 1994);
- $C_3 = 0$  in stratificazione stabile ( $G < 0$ ) e  $C_3 = 1$  in stratificazione instabile ( $G > 0$ ) (Burns e al., 1989). Quest'ultima opzione evita che nei deflussi stratificati stabilmente, insieme ad un termine di produzione di  $k$  negativo, si possa avere anche un termine di produzione di  $\varepsilon$  negativo, col rischio che la variabile  $\varepsilon$  assuma essa stessa valori negativi.

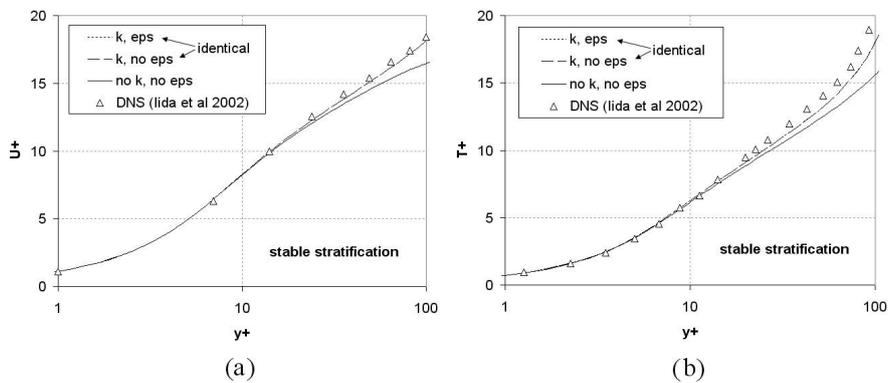
Le figure 4.25 e 4.26 riportano i risultati di un test comparativo condotto dall'autore sulla base dei risultati di simulazioni dirette della convezione mista turbolenta in canali piani, dovute rispettivamente a Nobile e al. (2000) per il caso di stratificazione instabile (Fig. 4.25) e a Iida e al. (2002) per il caso di stratificazione stabile (Fig. 4.26). Sono riportati in unità di parete i profili *cross-stream* di velocità media assiale (a) e temperatura media (b) predetti mediante DNS e calcolati col modello  $k - \varepsilon$  sotto tre distinte assunzioni:

- a) termini di *buoyancy* assenti nelle equazioni di trasporto sia di  $k$  che di  $\varepsilon$ ;
- b) termini di *buoyancy* presenti nell'equazione di trasporto di  $k$  ma assenti in quella di  $\varepsilon$ ;

#### 4.6. TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA



**Figura 4.25:** Profili *cross stream* di velocità longitudinale media (a) e temperatura media (b), entrambi in unità di parete, per il moto turbolento in un canale piano con stratificazione termica instabile. Simboli: risultati DNS (Nobile e al., 2000); linee: predizioni ottenute usando il modello  $k - \varepsilon$  con i termini di *buoyancy* inclusi o no nelle equazioni di  $k$  e  $\varepsilon$ .



**Figura 4.26:** Profili *cross stream* di velocità longitudinale media (a) e temperatura media (b), entrambi in unità di parete, per il moto turbolento in un canale piano con stratificazione termica instabile. Simboli: risultati DNS (Iida e al., 2002); linee: predizioni ottenute usando il modello  $k - \varepsilon$  con i termini di *buoyancy* inclusi o no nelle equazioni di  $k$  e  $\varepsilon$ .

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

- c) termini di *buoyancy* presenti sia nell'equazione di trasporto di  $k$  sia in quella di  $\varepsilon$  dove sono modellati con l'ultima delle opzioni sopra citate ( $C_3 = 0$  se  $G < 0$  e  $C_3 = 1$  se  $G > 0$ ).

Ovviamente, l'assunzione (c) si riduce alla (b) (omettere del tutto i termini di *buoyancy* nell'equazione di  $\varepsilon$ ) nel caso di stratificazione stabile di Fig. 4.26 ( $G < 0$ ).

Il confronto con i risultati DNS mostra chiaramente che l'opzione preferibile è la (b): includere i termini di *buoyancy* nell'equazione di trasporto di  $k$  migliora l'accuratezza delle predizioni, ma includerli anche nell'equazione di  $\varepsilon$  la peggiora sia nel caso di stratificazione stabile sia nel caso di stratificazione instabile.

##### 4.6.5 Esempi di convezione naturale e mista turbolenta

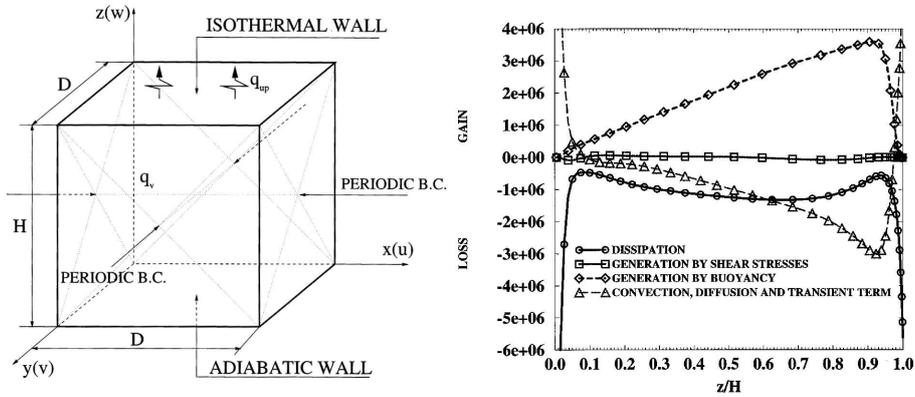
Alcuni esempi tratti da lavori sperimentali, simulazioni dirette e LES, mostrano quale sia il peso relativo dei termini di *buoyancy* nella generazione (o soppressione) di turbolenza in alcune situazioni-tipo.

Il primo esempio, illustrato in Fig. 4.27, è tratto dalle simulazioni dirette (DNS) di Nourgaliev e Dinh (1997) e si riferisce ad un canale piano indefinito (simulato da un parallelepipedo con condizioni laterali periodiche) nel quale si hanno generazione interna di calore, parete superiore fredda e parete inferiore adiabatica. La figura riporta i profili verticali dei principali termini nel bilancio di energia cinetica turbolenta  $k$  e mostra come, fra i termini di produzione, quello da *buoyancy* sia dominante rispetto a quello da *shear*. Risultati simili si ottengono anche per la convezione di Rayleigh-Bènard fra due pareti orizzontali, in cui pure si impone al fluido una stratificazione termica instabile.

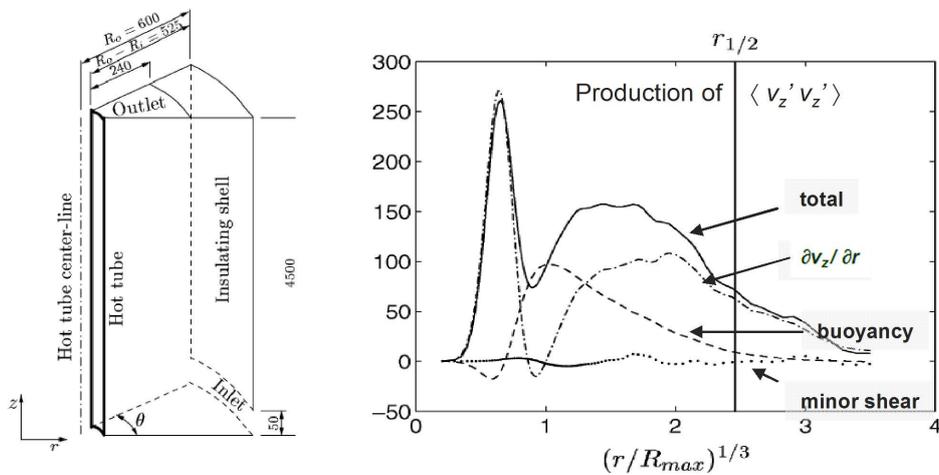
Il successivo esempio, illustrato in Fig. 4.28, è tratto dalle LES di (Barhaghi e al., 2006) e si riferisce alla convezione mista lungo un cilindro verticale caldo a temperatura costante, immerso in un canale isolato verso l'esterno ed aperto agli estremi con un ingresso di fluido freddo in basso ed un'uscita di fluido riscaldato in alto. La figura riporta i profili radiali dei contributi di *buoyancy* e *shear* al bilancio di  $\langle v'_z v'_z \rangle$  (sforzo di Reynolds normale assiale diviso per la densità), che è il principale componente dell'energia cinetica turbolenta. In questo caso la produzione da *buoyancy*, pur mantenendosi quasi ovunque positiva, gioca un ruolo minore rispetto alla produzione totale da *shear* e, in particolare, alla produzione da *shear* legata al gradiente radiale di velocità assiale.

L'ultimo esempio, illustrato in Fig. 4.29, riguarda i dati sperimentali ottenuti da Tian e Karayiannis (2000 a,b) e da Ampofo e Karayiannis (2003) per la convezione naturale turbolenta in una cavità parallelepipeda avente pareti laterali isoterme a due

#### 4.6. TURBOLENZA IN CONVEZIONE NATURALE E MISTA

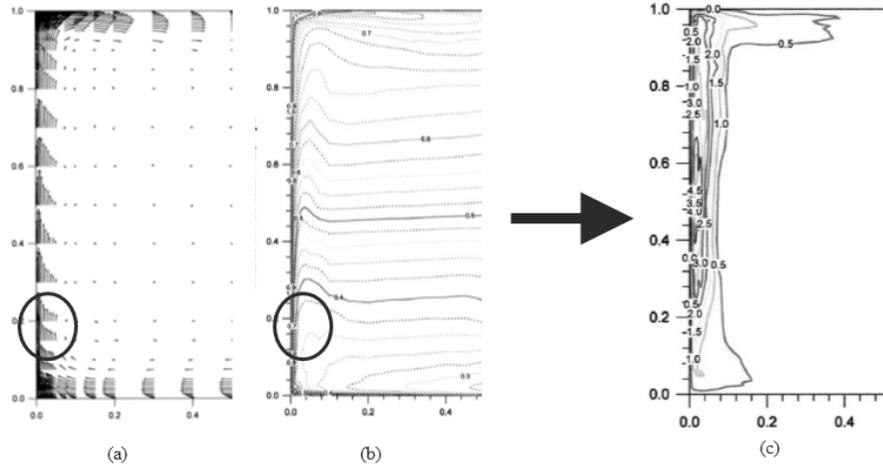


**Figura 4.27:** DNS della convezione naturale con generazione interna di calore fra piastre piane parallele indefinite: (a) rappresentazione schematica del problema e (b) profili verticali dei vari termini nell'equazione di bilancio di  $k$  [adattato da Nourgaliev e Dinh (1997)].



**Figura 4.28:** LES della convezione mista lungo un cilindro verticale caldo: (a) rappresentazione schematica del problema e (b) profili radiali dei vari termini nell'equazione di bilancio dello sforzo di Reynolds normale-assiale (diviso per la densità):  $\langle v'_z v'_z \rangle$  [adattato da (Barhaghi e al., 2006)].

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.29:** Distribuzioni sperimentali di velocità media (a), temperatura media (b) ed energia cinetica turbolenta (c) in vicinanza della parete calda in una cavità differenzialmente scaldata [adattato da Tian e Karayiannis (2000 a,b)].

temperature diverse e pareti anteriore, posteriore, inferiore e superiore adiabatiche. Si tratta di uno dei più accurati e completi database esistenti sulla convezione naturale turbolenta in cavità in quanto le grandezze misurate includono non solo valori medi temporali ma anche sforzi e flussi turbolenti. La figura riporta il campo di moto medio (a), la distribuzione della temperatura media (b) e la distribuzione di energia cinetica turbolenta (c) nella regione prossima alla parete calda. I cerchi evidenziano come, in prossimità di una parete, vi sia elevata produzione positiva di  $k$  da *shear* ( $P > 0$ ) ma anche elevata soppressione di  $k$  da stratificazione stabile ( $G < 0$ ).

L'esame dei risultati mostra che il termine di produzione da *shear*  $P$  è dominato dal contributo positivo  $\mu_t(\partial v/\partial x)^2$  (grafico a), mentre il termine di produzione da *buoyancy*  $G$  è dominato dal contributo negativo di  $-g\beta(\mu_t/\sigma_t)\partial t/\partial x$  (grafico b). La distribuzione di  $k$  nel grafico c è pertanto il risultato di un processo in cui turbolenza viene continuamente creata dallo *shear* nella regione di parete e distrutta dalla stratificazione termica stabile nella regione esterna dello strato limite e nel *core*, sostanzialmente immobile, della cavità.

In sintesi, in convezione naturale e mista la turbolenza è prodotta direttamente da termini positivi di *buoyancy*  $G$  solo in presenza di una stratificazione termica instabile imposta (come nella convezione con sorgenti interne di calore o nella convezione di Rayleigh-Bénard). Negli altri casi, la produzione di turbolenza è mediata dal termine di *shear*  $P$  ed è quindi causata dalla convezione naturale solo in modo indiretto.

#### 4.6.6 Turbolenza nello strato limite atmosferico

Un esempio importante di convezione mista è offerto dallo strato limite atmosferico (*Atmospheric Boundary Layer - ABL*) in cui l'interazione vento-suolo crea sempre turbolenza mentre la stratificazione termica la crea o la distrugge a seconda che sia instabile o stabile (Nieuwstadt e van Dop, 1982).

In primo luogo occorre ricordare che nello studio dell'ABL, per tenere conto della stratificazione di densità lungo la direzione verticale  $z$ , si deve considerare, al posto della temperatura (assoluta)  $T$ , la temperatura potenziale

$$\theta = T \left( \frac{p_{ref}}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (4.157)$$

in cui  $\gamma = c_p/c_v$  e  $p_{ref}$  è una pressione di riferimento (usualmente  $10^5$  Pa  $\approx$  1 atm). Qui  $\theta$  è definita come la temperatura alla quale si porterebbe una massa d'aria secca che si trovasse a temperatura e pressione  $(T, p)$  se potesse espandersi adiabaticamente ed in maniera reversibile da  $p$  a  $p_{ref}$ . Da questa definizione, tenendo conto dell'equazione di stato dei gas ideali:  $p/\rho = RT$  e della relazione:  $p/\rho^\gamma = \text{cost}$ , valida per le trasformazioni adiabatiche reversibili, segue con semplici passaggi:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \approx \frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma \quad (4.158)$$

in cui  $\Gamma = g/c_p \approx 0.01$  K/m è il cosiddetto *gradiente adiabatico secco*. Si avrà allora stratificazione instabile se  $\partial \theta / \partial z < 0$ , ovvero  $\partial T / \partial z < -\Gamma$  (profilo di temperatura super-adiabatico), e stabile altrimenti (profilo di temperatura sub-adiabatico). Ulteriori correzioni possono essere introdotte per tenere conto dell'umidità. In secondo luogo si deve osservare che nell'ABL, detta  $x$  la direzione del vento e  $z$  la direzione verticale, l'unica velocità significativa è  $u$  e gli unici gradienti significativi sono quelli lungo  $z$ . Pertanto, usando  $\theta$  al posto di  $T$  e trattando l'aria come un gas ideale, si ha:  $\beta = 1/T \approx 1/\theta$ , e l'espressione (4.155) del numero di Richardson nella forma di gradiente si semplifica in

$$Ri_g = -\frac{g}{\langle \theta \rangle \sigma_t} \frac{\partial \langle \theta \rangle / \partial z}{(\partial \langle u \rangle / \partial z)^2} \quad (4.159)$$

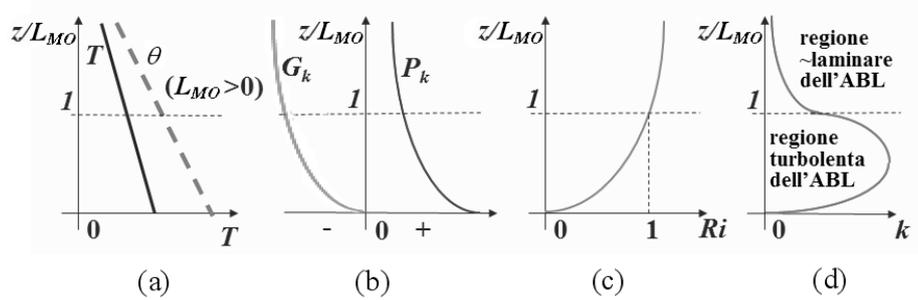
Nella (4.159) sono possibili le assunzioni aggiuntive

$$\mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = \rho u_\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = \frac{\rho u_\tau^2}{\mu_t} \quad (4.160)$$

per legare il gradiente di velocità verticale alla velocità di attrito  $u_\tau$  attraverso la viscosità turbolenta  $\mu_t$ ,

$$-\rho c_p \alpha_t \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = q_s'' \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = \frac{q_s''}{\rho c_p \alpha_t} \quad (4.161)$$

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI



**Figura 4.30:** Profili verticali in uno strato limite atmosferico con stratificazione termica stabile ( $L_{MO} > 0$ ): (a) temperatura effettiva  $T$  e adiabatica  $\theta$ ; (b) produzione da *shear*  $P$  e da *buoyancy*  $G$ ; (c) numero di Richardson  $Ri$ ; (d) energia cinetica turbolenta  $k$ .

per legare il gradiente termico verticale al flusso termico dal suolo all'aria  $q_s''$  attraverso la diffusività termica turbolenta  $\alpha_t$ , e

$$\mu_t = \kappa z \rho u_\tau \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\mu_t}{\kappa \rho u_\tau} \quad (4.162)$$

per esprimere la distanza dal suolo  $z$  attraverso un modello di viscosità turbolenta di Prandtl in cui la distanza dal suolo è la scala di lunghezza,  $u_\tau$  è la scala di velocità e  $\kappa$  è la costante di von Karman. Tenendo conto delle relazioni (4.160) – (4.162) e della definizione di numero di Prandtl turbolento:  $\sigma_t = \mu_t / (\rho \alpha_t)$ , dopo alcuni passaggi algebrici l'Eq. (4.159) può essere scritta nella forma estremamente semplificata

$$Ri_g = \frac{z}{L_{MO}} \quad (4.163)$$

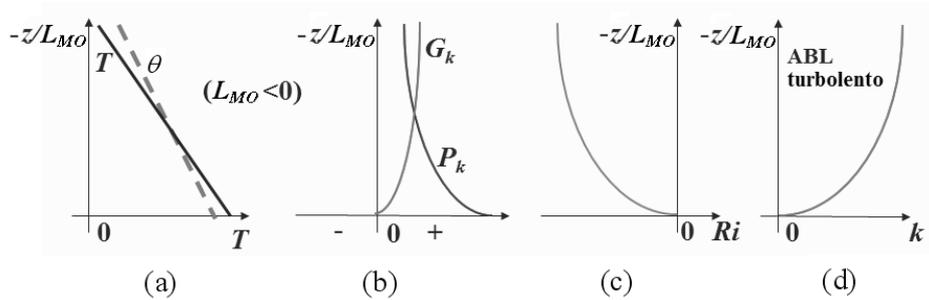
dove

$$L_{MO} = -\frac{\rho c_p \langle \theta \rangle u_\tau^3}{\kappa g q_s''} \quad (4.164)$$

è la *lunghezza di Monin-Obukhov*. Sulla scala di lunghezze (4.164) si basa la teoria della similarità di Monin-Obukhov, volta a definire profili universali delle grandezze turbolente nell'ABL, funzioni solo del rapporto  $z/L_{MO}$  e del gradiente di temperatura. In base alla definizione iniziale (4.152), dalla (4.163) si ottiene infatti

$$\frac{z}{L_{MO}} = -\frac{G}{P} \quad (4.165)$$

Di conseguenza, nel caso illustrato schematicamente in Fig. 4.30 (stratificazione stabile con  $\partial T / \partial z > -\Gamma$ , ovvero  $\partial \theta / \partial z > 0$ ),  $q_s''$  è negativo (cioè l'ABL cede calore



**Figura 4.31:** Profili verticali in uno strato limite atmosferico con stratificazione termica instabile ( $L_{MO} < 0$ ): (a) temperatura effettiva  $T$  e adiabatica  $\theta$ ; (b)  $P$  (produzione da *shear*) e  $G$  (produzione da *buoyancy*); (c) numero di Richardson  $Ri$ ; (d) energia cinetica turbolenta  $k$ .

al suolo),  $L_{MO}$  è positiva (con valori tipici dell'ordine dei 100 metri) e  $G$  è ovunque negativo. Pertanto:

- per  $z/L_{MO} < 1$ , si ha ( $-G < P$ ) in quanto  $G$  è negativo e minore di  $P$  in valore assoluto (ovvero la soppressione di  $k$  da stratificazione stabile è minore della produzione da *shear*), e si hanno elevati livelli di turbolenza;
- per  $z/L_{MO} > 1$ , si ha ( $-G > P$ ) in quanto  $G$  è negativo e maggiore di  $P$  in valore assoluto (ovvero la soppressione di  $k$  da stratificazione stabile è maggiore della produzione da *shear*), e si hanno bassi livelli di turbolenza.

Al contrario, nel caso illustrato schematicamente in Fig. 4.31 (stratificazione instabile con  $\partial T/\partial z < -\Gamma$ , ovvero  $\partial\theta/\partial z < 0$ ),  $q_s''$  è positivo (cioè l'ABL riceve calore dal suolo),  $L_{MO}$  è negativa e  $G$  è ovunque positivo. Di conseguenza, sia  $G$  sia  $P$  concorrono alla produzione di turbolenza a tutte le quote è il risultato è un ABL fortemente turbolento ovunque.

## 4.7 CONCLUSIONI

La rassegna di modelli e applicazioni qui presentata basta appena a dare un'idea dello sforzo teorico, sperimentale e computazionale finora dedicato alla descrizione della turbolenza. Bisogna ricordare che, sia pure a malincuore, si sono dovuti lasciare completamente fuori dalla presente trattazione interi importanti temi quali:

- turbolenza in *fluidi comprimibili*;

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

- turbolenza in sistemi *polifasici* (solido-liquido, gas-liquido *etc.*) e in problemi di *combustione*.

Come si è visto, le simulazioni della turbolenza possono classificarsi nelle tre grandi famiglie delle simulazioni dirette, simulazioni RANS (basate su medie temporali) e simulazioni a grandi vortici, o LES (basate sul filtraggio spaziale).

Le simulazioni *dirette* sono preziose come strumento di indagine sui *meccanismi fondamentali* della turbolenza e si affiancano sempre più spesso alle ricerche sperimentali, rispetto alle quali offrono l'enorme vantaggio di un accesso completo e ordinato all'intero campo di moto e di temperatura. Tuttavia, nonostante l'impetuosa crescita della potenza di calcolo resa possibile dal massiccio uso di architetture parallele (di cui si è brevemente discusso nella Sezione 4.3), le simulazioni *dirette* restano praticamente inattuabili quando le geometrie sono complesse ed i numeri di Reynolds sono elevati. In questi ultimi casi, infatti, le fasi di pre- e/o post-processamento diventano così pesanti e sofisticate da risultare, per il momento (2014), confinate agli ambiti di ricerca.

Le simulazioni RANS, storicamente le prime ad essere realizzate, restano lo strumento più diffuso in tutte le applicazioni di tipo *industriale*, in cui le grandezze di maggiore interesse sono in effetti valori medi temporali, si debbono spesso compiere estesi studi parametrici, e le complicazioni geometriche o la compresenza di fenomeni fisici complessi (combustione, irraggiamento, reazioni chimiche) rendono altri approcci eccessivamente ostici o costosi. Nell'ambito dei modelli di chiusura RANS, si può forse affermare - e qua entra inevitabilmente in gioco il punto di vista soggettivo di chi scrive - che le grandi attese sollevate intorno agli anni 1970 dai modelli diretti, o DS (basati su equazioni di trasporto separate per gli sforzi o i flussi di Reynolds) sono in parte andate deluse; questi modelli restano computazionalmente onerosi e instabili, richiedono un considerevole input empirico, e spesso mancano il loro obiettivo principale, cioè la corretta predizione di parametri importanti del moto e dello scambio termico in problemi termofluidodinamici complessi (si pensi ai risultati di Fig. 4.18). Al tempo stesso, le riserve espresse da molti ricercatori verso i modelli a viscosità turbolenta fin dal loro nascere sono state in gran parte ridimensionate, soprattutto in base a due considerazioni:

- una serie di difetti delle predizioni evidenziati negli anni 1970, si sono rivelati legati più alla insufficiente risoluzione spaziale (allora pressochè inevitabile) che a limiti intrinseci del modello, e si sono in gran parte ridotti quando è stato possibile fare ricorso a griglie di calcolo sufficientemente fini, a schemi alle differenze di ordine superiore e ad un numero adeguato di iterazioni;

- sono stati introdotti modelli come l’RNG  $k - \varepsilon$  e ancor più il  $k - \omega$  (specialmente nella sua variante SST) che superano molti dei ben noti difetti del  $k - \varepsilon$  e forniscono risultati di elevata qualità anche in situazioni classicamente ritenute difficili, come problemi con ricircolazione, convezione naturale o mista, regimi transizionale e turbolenza transitoria.

Non è azzardato, quindi, prevedere ancora una lunga vita per i modelli a viscosità turbolenta, in una o nell’altra delle loro molteplici varianti e reincarnazioni.

Infine, le simulazioni a grandi vortici (LES) sono uscite ormai dagli anni 1980 dalla loro fase pionieristica e hanno dimostrato ampiamente di poter diventare validi strumenti predittivi per problemi complessi. Modelli *sub-grid* per LES sono ormai da tempo inclusi fra le opzioni standard dei più evoluti codici di calcolo termofluidodinamici come Fluent, CFX e STAR-CD.

Fra i modelli *sub-grid* proposti per la LES, non c’è dubbio che i risultati migliori sono forniti dal modello *dinamico*, che unisce la sostanziale semplicità e stabilità dei modelli a viscosità *sub-grid* alla più grande generalità e all’assenza pressochè totale di parametri empirici. Per il trattamento delle regioni di parete, è abbastanza diffuso l’approccio ibrido DES (*Detached Eddy Simulation*) che combina la LES nelle regioni lontane da pareti solide con la RANS negli strati limite.

In conclusione, non è forse inutile ricordare che qualsiasi modello di turbolenza è una approssimazione degli *effetti* che le scale piccole e rapide del moto hanno sulle scale grandi e lentamente variabili, o stazionarie. Scopo di un modello di turbolenza, insomma, è la predizione del campo di moto *medio*, o filtrato, piuttosto che la predizione delle grandezze turbolente in sé, ed è innanzitutto su questa base che le valutazioni e i confronti andrebbero condotti. L’*unico* approccio rigoroso alla predizione delle grandezze turbolente fluttuanti, della loro struttura spazio-temporale e dei loro parametri statistici rimane la simulazione numerica *diretta* della turbolenza.

## 4.8 NOMENCLATURA

$A^+$	costante di van Driest
$CD_{k\omega}$	funzione di <i>taglio</i> nel modello $k - \omega$
$C_f$	fattore di attrito di Fanning
$C_s$	costante del modello di Smagorinsky
$C_{ij}$	termini incrociati
$C_1, C_2, C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$	costanti del modello $k - \varepsilon$
$C_{\Phi 1}, C_{\Phi 2}, C_{1w}, C_{2w}, \gamma, c_s$	costanti dei modelli DS
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_\varepsilon$	costanti per l’equazione in $\varepsilon$ dei modelli DS

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

$c_p$	calore specifico a pressione costante
$c_v$	calore specifico a volume costante
$D_{ij}$	derivate di Oldroyd
$E, F$	costanti nelle funzioni di parete
$F_1, F_2$	<i>blending functions</i> nel modello $k - \omega$
$\mathbf{f}; f_{ij}$	tensore degli sforzi viscosi
$f_\mu$	fattore di smorzamento di parete
$f$	frequenza; fattore d'attrito di Darcy
$G$	funzione filtro; termine di produzione di $\rho k$ da <i>buoyancy</i>
$k$	energia cinetica turbolenta
$L$	scala integrale della turbolenza
$L_{MO}$	lunghezza di Monin-Obukhov
$L_x, L_y, L_z$	dimensioni del dominio di calcolo
$L_{ij}$	termini di Leonard
$l$	lunghezza di miscelamento di Prandtl
$n$	numero d'onda
$Nu$	numero di Nusselt
$p$	pressione
$P$	termine di produzione di $\rho k$
$P_{ij}$	termini di produzione nei modelli DS
$q_i$	flussi termici residui
$Re$	numero di Reynolds di bulk, $UD_{eq}/\nu$
$Re_\tau$	numero di Reynolds di attrito, $u_\tau \delta/\nu$
$R_{ij}$	termini irrisolti
$r$	coordinata radiale
$\mathbf{S}; S_{ij}$	tensore della velocità di deformazione
$t$	temperatura
$T$	temperatura assoluta
$tt$	<i>throughput time</i>
$U$	velocità media del fluido
$u_\tau$	velocità di attrito
$\mathbf{u}; u_i; u, v, w$	vettore velocità o sue componenti
$\mathbf{x}; x_i; x, y, z$	vettore posizione o coordinate cartesiane
$y$	distanza dalla parete più prossima
$y_v, y_T$	spessore dei substrati viscoso e conduttivo
$\alpha$	diffusività termica molecolare
$\alpha_i (i = 1, 2)$	costanti del modello $k - \omega$
$\beta$	dissipazione di enstrofia
$\beta^*, \beta_i (i = 1, 2)$	costanti del modello $k - \omega$
$\gamma$	rapporto tra filtri <i>test</i> e <i>grid</i> nel modello dinamico

$\Gamma$	gradiente di temperatura adiabatico secco, $g/c_p$
$\Delta$	ampiezza del filtro spaziale in LES
$\Delta x_i; \Delta x, \Delta y, \Delta z$	dimensioni delle celle della griglia di calcolo
$\Delta \vartheta$	passo temporale
$\delta$	semialtezza di un canale piano
$\delta_{ij}$	delta di Kronecker
$\varepsilon$	dissipazione di energia cinetica turbolenta
$\eta$	scala dissipativa di Kolmogorov
$\theta$	temperatura adiabatica
$\Theta$	tempo di media
$\vartheta$	tempo (generico)
$\kappa$	costante di von Karman
$\Lambda$	lunghezza d'onda
$\lambda$	conducibilità termica
$\mu$	viscosità dinamica
$\nu$	viscosità cinematica
$\rho$	densità
$\sigma$	numero di Prandtl, $\nu/\alpha$
$\sigma_{ki}, \sigma_{\omega i} (i = 1,2)$	costanti del modello $k - \omega$
$\tau, \tau_{ij}$	tensore degli sforzi turbolenti
$\tau_w$	sforzo tangenziale di parete
$\Phi$	funzione di dissipazione
$\Phi_{ij}$	termini di redistribuzione nei modelli DS
$\phi$	coordinata azimutale
$\varphi$	generico scalare
$\Omega$	vettore velocità angolare
$\omega$	vorticità

**Pedici**

$eff$	effettivo, efficace
$eq$	equivalente, idraulico
$i, j, k$	direzioni coordinate
$k$	energia cinetica turbolenta
$P$	punto di griglia più vicino ad una parete solida
$s$	sub-grid
$t$	turbolento
$w$	parete
$\delta$	semialtezza di un canale piano
$\varepsilon$	dissipazione
$\vartheta$	passo temporale

## 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

### Medie e statistiche

$\varphi$	generica quantità scalare
$\langle \varphi \rangle$	valore medio o filtrato di $\varphi$
$\varphi'$	valore fluttuante o residuo di $\varphi$ , $\varphi - \langle \varphi \rangle$
$P_{\varphi\varphi}$	densità spettrale di $\varphi$
$R_{\varphi\varphi}$	funzione di autocorrelazione di $\varphi$

## 4.9 BIBLIOGRAFIA

- Abe, K., Kondoh, T. e Nagano, Y. (1994), A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows - I: Flow field calculations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 139-151.
- ACT-JST (2014), *Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities*, Astrophysics Laboratory, Department of Physics, Chiba University, Japan, [www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/cans/cans2d/movie/frame-e.html](http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/cans/cans2d/movie/frame-e.html).
- AEA Technology (1994), *CFDS-FLOW3D: User Guide*, Computational Fluid Dynamics Services, Harwell Laboratories, UK.
- Amano, R.S., Jensen, M.K. e Goel, P. (1983), A Numerical and Experimental Investigation of Turbulent Heat Transport Downstream from an Abrupt Pipe Expansion, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 862-869.
- Ampofo, F. e Karayiannis, T.G. (2003), Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 3551-3572.
- Arpaci, V.S. e Larsen, P.S. (1984), *Convection Heat Transfer*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Baldwin, B.S. e Lomax, H. (1978), *Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*, AIAA Paper 78-257.
- Banerjee, S. (1992), Turbulence Structures, *Chemical Engineering Science*, Vol. 47, pp. 1793-1817.
- Barhaghi, D.G., Davidson, L. e Karlsson, R. (2006), Large-eddy simulation of natural convection boundary layer on a vertical cylinder, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27, 811-820.

#### 4.9. BIBLIOGRAFIA

- Bardina, J, Ferziger, J.H. e Reynolds, W.C. (1980), *Improved Subgrid-Scale Models for Large-Eddy Simulation*, AIAA Paper No. 80-1357.
- Barrett, J. (1990), Shark Skin Inspires New Surface Technology, *Eureka on Campus*, Vol. 2, No. 2, pp.14-16.
- Bradshaw, P. (1978), Introduction, in *Turbulence*, P. Bradshaw (editor), pp. 1-44, Springer, Berlin.
- Breuer, M. e Rodi, W. (1994), Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow through a Straight Square Duct and a 180° Bend, in *Direct and Large-Eddy Simulation I*, P.R. Voke, L. Kleiser e J.-P. Chollet (editors), pp. 273-286, Kluwer, Dordrecht.
- Brown, G.L. e Roshko, A. (1974), On Density Effects and Large Structure in Turbulent Mixing Layers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 775-816.
- Brucato, A., Ciofalo, M., Grisafi, F. e Micale, G. (1998), Numerical Prediction of Flow Fields in Baffled Stirred Vessels: A Comparison of Alternative Modelling Approaches, *Chemical Engineering Science*, Vol. 53, pp. 3653-3684.
- Burns, A.D., Jones, I.L., Kightley, J.R. e Wilkes, N.S. (1989), *Harwell-FLOW3D Release 2 User Manual*, UKAEA Report AERE-R (Draft), July 1989.
- Cebeci, T. e Smith, A.M.O. (1974), *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press, New York.
- Chen, Y.S. e Kim, S.W. (1987), *Computation of Turbulent Flows Using an Extended k-epsilon Turbulence Closure Model*, NASA Technical Report NASA-CR-179204.
- Chieng, C.C. e Launder, B.E. (1980), On the Calculation of Turbulent Heat Transport Downstream from an Abrupt Pipe Expansion, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 3, pp. 189-207.
- Chima, R.V., Giel, P.W. e Boyle, R.J. (1993), Algebraic Turbulence Model for Three-Dimensional Viscous Flow, in *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, W. Rodi e F. Martelli (editors), pp. 775-784, Elsevier, Amsterdam.
- Chou, P.Y. (1945), On Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation, *Quarterly Applied Mathematics*, Vol. 3, p. 38.
- Ciofalo, M. (1994), Large-Eddy Simulation: a Critical Survey of Models and Applications, in *Advances in Heat Transfer*, J.P. Hartnett e T.F. Irvine, Jr. (editors), Vol. 25, Chapter 4, pp. 321-419, Academic Press, New York.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

Ciofalo, M. e Collins, M.W. (1989),  $k - \epsilon$  Predictions of Heat Transfer in Turbulent Recirculating Flows Using an Improved Wall Treatment, *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 15, pp. 21-47.

Ciofalo, M. e Palagonia, M. (1996), *Turbulent Flow Separation Past Triangular Obstacles*, Quaderno No. 10/96, Dipartimento di Ingegneria Nucleare, Università di Palermo.

Ciofalo, M., Stasiek, J. e Collins, M.W. (1993), Flow and Heat Transfer in Corrugated Passages: Direct and Large-Eddy Simulation and Comparison with Experimental Results, in *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, W. Rodi e F. Martelli (editors), pp. 283-292, Elsevier, Amsterdam.

Ciofalo, M., Brucato, A., Grisafi, F. e Torraca, N. (1996), Turbulent Fluid Flow in Closed- and Free-Surface Unbaffled Tanks Stirred by Radial Impellers, *Chemical Engineering Science*, Vol. 51, pp. 3557-3573.

Collins, M.W., Ciofalo, M. e Di Piazza, I. (1998), Filtering of the Navier-Stokes Equations in the Context of Time-Dependent Flows, in *Advances in Fluid Mechanics 2*, M. Rahman, G. Comini e C. A. Brebbia (editors), pp. 69-81, Computational Mechanics Publications, Southampton.

Comte-Bellot, G. (1963), *Contribution a l'Etude de la Turbulence de Conduite*, Tesi di Dottorato, Università di Grenoble, Francia.

Cruz, D.O.A. e Silva Freire, A.P. (1998), On Single Limits and the Asymptotic Behaviour of Separating Turbulent Boundary Layers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 2097-2112.

Daly, B.J. e Harlow, F.H. (1970), Transport Equations in Turbulence, *The Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 2634-2649.

Davidson, L. (1997), Large Eddy Simulation: A Dynamic One-Equation Subgrid Model for Three-Dimensional Recirculation Flow, *Proc. 11th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Grenoble, France, pp. 26.1-26.6.

Deardorff, J.W. (1974), Three-Dimensional Numerical Study of the Height and Mean Structure of a Heated Planetary Boundary Layer, *Boundary Layer Meteorology*, Vol. 7, pp. 81-106.

Deardorff, J.W. (1980), Stratocumulus-Capped Mixed Layers Derived from a Three-Dimensional Model, *Boundary Layer Meteorology*, Vol. 18, pp. 495-527.

#### 4.9. BIBLIOGRAFIA

- Del Alamo, J.C., Jiménez, J., Zandonade, P. e Moser, R.D. (2004), Scaling of the Energy Spectra of Turbulent Channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 500, pp. 135-144.
- Di Piazza, I. e Ciofalo, M. (2000), Low-Prandtl Number Natural Convection in Volumetrically Heated Rectangular Enclosures – I. Slender Cavity, AR=4, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3027-3051.
- Di Piazza, I. e Ciofalo, M. (2010), Numerical Prediction of Turbulent Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, pp.653-663.
- Erlebacher, G., Hussaini, M.Y., Speziale, C.G. e Zang, T.A. (1992) Toward the Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 238, pp. 155-185.
- Fatica, M., Orlandi, P. e Verzicco, R. (1994), Direct and Large Eddy Simulations of Round Jets, in *Direct and Large-Eddy Simulation I*, P.R. Voke, L. Kleiser e J.P. Chollet (editors), pp. 49-60, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Gavrilakis, S. (1992), Numerical Simulation of Low-Reynolds Number Turbulent Flow Through a Straight Square Duct, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 244, pp. 101-129.
- Germano, M. (1992), Turbulence: the Filtering Approach, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 238, pp. 325-336.
- Grötzbach, G. (1986), Direct Numerical and Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows, in *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, N.P. Chermisinoff (editor), Vol. 6, Gulf Publishing Co.
- Hanjalić, K. e Launder, B.E. (1972), A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application to Thin Shear Flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 52, pp. 609-638.
- Hanjalić, K. e Launder, B.E. (1980), Sensitizing the Dissipation Equation to Irrotational Strains, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 102, pp. 34-40.
- Hinze, J.O. (1975), *Turbulence*, McGraw-Hill, New York, Second Edition.
- Hopfinger, E.J. (1987), Turbulence in Stratified Fluids: a Review, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 92, pp. 5287–5303.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

- Hoyas, S e Jiménez, J. (2006), Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Phys Fluids* 2006;18:011702. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2162185>.
- Hussaini, M.Y. e Zang, T.A. (1987), Spectral Methods in Fluid Dynamics, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 19, pp. 339-367.
- Iida, O., Kasagi, N., Nagano, Y. (2002), Direct numerical simulation of turbulent channel flow under stable density stratification, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1693-1703.
- Jayatililke, C.L.V. (1969), The Influence of Prandtl Number and Surface Roughness on the Resistance of the Laminar Sublayer to Momentum and Heat Transfer, *Progress in Heat and Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 193-329.
- Jiménez, J. (2003), Computing High-Reynolds-Number Turbulence: Will Simulations Ever Replace Experiments?, *Journal of Turbulence*, Vol. 4, article 022.
- Keefe, L., Moin, P. e Kim, J. (1992), The Dimensions of Attractors Underlying Periodic Turbulent Poiseuille Flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 242, pp. 1-29.
- Kline, S.J., Reynolds, W.C., Schraub, F.A. e Rundstadler, P.W. (1967), The Structure of Turbulent Boundary Layers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 741-773.
- Lam, C.K.G. e Bremhorst, K.A. (1981), Modified Form of the  $k - \varepsilon$  Model for Predicting Wall Turbulence, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 103, pp. 456-460.
- Landau, N. e Lifschitz, N. (1959), *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford.
- Lanford, O.E. (1981), Strange Attractors and Turbulence, in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, H.L. Swinney e J.P. Gollub (editors), pp. 7-26, Springer-Verlag, Berlin.
- Launder, B.E. e Spalding, D.B. (1972), *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London.
- Launder, B.E. e Spalding, D.B. (1974), The Numerical Computation of Turbulent Flows, *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 3, pp. 269-289.

#### 4.9. BIBLIOGRAFIA

- Launder, B.E. e Sharma, B.I. (1974), Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc, *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 131-138.
- Launder, B.E., Reece, G.J. e Rodi, W. (1975), Progress in the Development of a Reynolds–Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 68, pp. 537-566.
- Lee, M., Malaya, N. e Moser, R.D. (2013), Petascale Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow on up to 786k Cores, *Proceedings SC13 - International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, Denver, Colo., USA, November 17-21, Article No. 61 (ACM publ., New York, USA, ISBN 978-1-4503-2378-9, doi 10.1145/2503210.2503298).
- Leonard, A. (1974), Energy Cascade in Large Eddy Simulation of Turbulent Fluid Flows, *Advances in Geophysics*, Vol. 18, Part A, pp. 237-248.
- Lesieur, M. (1990), *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Lilly, D.K. (1966), *On the Application of the Eddy Viscosity Concept in the Inertial Subrange of Turbulence*, Report NCAR-123, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado.
- Lilly, D.K. (1992), A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method, *The Physics of Fluids A*, Vol. 4, pp. 633-635.
- Lorenz, E.N. (1963), Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Science*, Vol. 20, p. 130.
- Lumley, J.L. (1992), Some Comments on Turbulence, *The Physics of Fluids A*, Vol. 4, pp. 203-211.
- Mason, P.J. e Thomson, D.J. (1992), Stochastic Backscatter in Large-Eddy Simulations of Boundary Layers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 242, pp. 51-78.
- Menter, F.R. (1993), Zonal Two-Equations  $k - \omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows, *AIAA Paper 93-2906*.
- Menter, F.R., Kuntz, M. e Langtry, R. (2003), Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model, in *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*, K. Hanjalić, Y. Nagano and M. Tummers, eds., Begell House, Inc.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

- Mohammadi, B. e Pironneau, O. (1994), *Analysis of the  $k - \varepsilon$  Turbulence Model*, John Wiley and Sons, New York.
- Moreau, R. (1990), *Magneto-Hydrodynamic Turbulence*, Kluwer, Dordrecht.
- Nagano, Y. e Hishida, M. (1987), Improved Form of the  $k - \varepsilon$  Model for Wall Turbulent Shear Flows, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 109, pp. 156-160.
- Nieuwstadt, F.T.M. e van Dop, H., eds. (1982), *Atmospheric turbulence and air pollution modelling*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Nobile, E. (1996), Simulation of Time-Dependent Flow in Cavities with the Additive-Correction Multigrid Method, Part I: Mathematical Formulation; Part II: Applications, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 30, pp. 341-350 e 351-370.
- Nobile, E., Piller, M. e Stalio, E., Direct numerical simulation of turbulent mixed convection in internal flows, *Proc. 18th UIT Heat Transfer Conference*, Cernobbio, June 2000.
- Nourgaliev, R.R. e Dinh, T.N. (1997), The investigation of turbulence characteristics in an internally-heated unstably-stratified fluid layer, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 178, pp. 235-258.
- Paolucci, S. (1990), Direct Numerical Simulation of Two-Dimensional Turbulent Natural Convection in an Enclosed Cavity, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 215, pp. 229-262.
- Patel, V.C., Rodi, W. e Scheuerer, G. (1985), Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds Number Flows: a Review, *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, pp. 1308-1319.
- Piomelli, U., Ferziger, J., Moin, P. e Kim, J. (1989), New Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations of Wall-Bounded Flows, *The Physics of Fluids*, Part A, Vol. 1, pp. 1061-1068.
- Pope, S.B. (1972), *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Roache, P. (1972), *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, USA.
- Rodi, W. (1987), Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids, *J. Geophys. Res.*, Vol. 92(C5), pp. 5305-5328.

#### 4.9. BIBLIOGRAFIA

- Rotta, J.C. (1951) Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, *Z. Phys.*, Vol. 129, p. 547.
- Ruelle, D. e Takens, F. (1971), On the Nature of Turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 20, pp. 167-192.
- Schlichting, H. (1968), *Boundary-Layer Theory*, Pergamon Press, London.
- Schmidt, S. e Thiele, F. (2002), Comparison of Numerical Methods Applied to the Flow over Wall-Mounted Cubes, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 330-339.
- Schumann, U. (1975), Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli, *Journal of Computational Physics*, Vol. 18, pp. 376-404.
- Schumann, U. (1993), Direct and Large Eddy Simulation of Turbulence – Summary of the State of the Art 1993, in *Introduction to the Modeling of Turbulence*, Lecture Series 1993-02, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Bruxelles.
- Smagorinsky, J. (1963), General Circulation Experiments with the Primitive Equations: Part I. The Basic Experiment, *Monthly Weather Review*, Vol. 91, pp. 99-164.
- Spalart, P., Jou, W.H., Strelets, M. e Allmaras, S. (1997), Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on a Hybrid RANS/LES Approach, in *Advances in DNS/LES*, Liu, C. and Liu, Z. (eds.), Greyden Press.
- Spalding, D.B. (1978), Discussion on Turbulence Models for Heat Transfer, *Proc. 8th International Heat Transfer Conference*, Toronto, Canada, Vol. 8, p. 8.
- Speziale, C.G. (1985), Galilean Invariance of Subgrid-Scale Stress Models in the Large-Eddy Simulation of Turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 156, pp. 55-62.
- Speziale, C.G. (1987), On Nonlinear  $k - l$  and  $k - \varepsilon$  Models of Turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 178, pp. 459-475.
- Swinney, H.L. e Gollub, J.P., editors (1981), *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, Series Topics in Applied Physics, Vol. 45.

#### 4. LA TURBOLENZA E I SUOI MODELLI

---

- Tanda, G., Ciofalo, M., Stasiak, J.A. e Collins, M.W. (1995), Experimental and Numerical Study of Forced Convection Heat Transfer in a Rib-Roughened Channel, *Atti 13° Congresso Nazionale UIT (Unione Italiana di Termofluidodinamica)*, Bologna, 22–23 Giugno, pp. 243-254.
- Tennekes, H. e Lumley, J.L. (1972), *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Thomas, C.E., Morgan, K. e Taylor, C. (1981), A Finite Element Analysis of Flow Over a Backward Facing Step, *Computers and Fluids*, Vol. 9, pp. 265-278.
- Tian, Y.S. e Karayiannis, T.G. (2000 a), Low turbulence natural convection in an air filled square cavity, Part I: Thermal and fluid flow fields, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 849–866.
- Tian, Y.S. e Karayiannis, T.G. (2000 b), Low turbulence natural convection in an air filled square cavity, Part II: The turbulence quantities, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 867–884.
- Van Driest, E.R. (1956), On Turbulent Flow Near a Wall, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, pp. 1007-1011.
- Van Maele, K. e Merci, B. (2006), Application of two buoyancy-modified  $k\tilde{\varepsilon}$  turbulence models to different types of buoyant plumes, *Fire Safety Journal*, Vol. 41, pp. 122–138.
- Viswanathan, A.K. e Tafti, D.K. (2006), Detached Eddy Simulation of Turbulent Flow and Heat Transfer in a Two-Pass Internal Cooling Duct, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 27, pp. 1–20.
- Vogel, J.C. e Eaton, J.K. (1985), Combined Heat Transfer and Fluid Dynamics Measurements Downstream of a Backward-Facing Step, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol.107, pp. 922-929.
- Wilcox, D.C. (1988), Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models, *AIAA Journal*, Vol. 26, pp. 1299-1310.
- Yakhot, V. e Orszag, S.A. (1986), Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 1, pp. 1-51.
- Yan, Z. e Holmstedt, G. (1999), A two-equation turbulence model and its application to a buoyant diffusion flame, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 1305-1315.

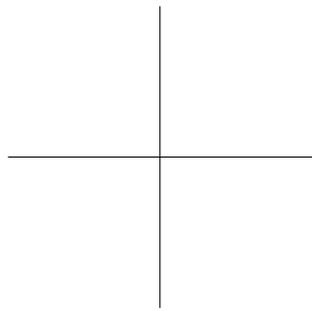
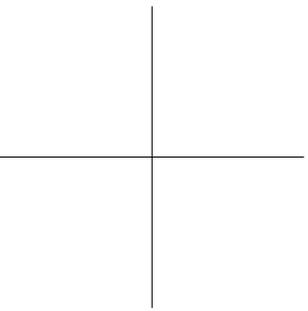
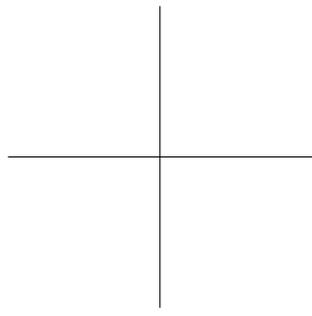
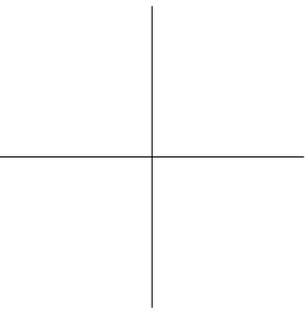
#### 4.9. BIBLIOGRAFIA

---

Yoshizawa, A. (1982), A Statistically-Derived Subgrid Model for the Large-Eddy Simulation of Turbulence, *The Physics of Fluids*, Vol. 25, pp. 1532-1538.

Yuan, X., Nguyen, M.X., Chen, B. and Porter, D.H. (2005), High Dynamic Range Volume Visualization, *Proceedings IEEE Visualization 2005*, pages 327-334, Minneapolis, MN, USA. Oct 23 - 28.

Zuniga Zamalloa, C.C. (2012), *Experiments on turbulent flows in rough pipes: spectral scaling laws and the spectral link*. PhD Thesis in Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.



# Indice analitico

- Adams-Bashfort, 81
- algoritmi
  - fluidi incompressibili, 29, 31
- Boussinesq, 21, 235
- cella, 53
- Central Integration Method, 53
- coefficiente di convezione, 12
- condizioni al contorno, 35
  - contorni solidi, 23
  - Dirichlet, 184
  - equazione dell'energia, 11
  - equazioni di Navier Stokes, 23
  - funzione di corrente e vorticità, 28
  - ingresso, 23
  - uscita, 24
  - velocità, 35
- conservatività, 62
  - globale, 62
  - locale, 62
- conservazione
  - dell'energia, 6
  - della massa, 3
  - della quantità di moto, 13
- Control Volume Method, 53
- convezione
  - forzata, 24
  - mista, 24
  - naturale, 24
  - turbolenta, 38
- Crank-Nicolson, 33, 78
- Elementi Finiti
  - assembly, 147
  - elementi triangolari, 172
  - equal order, 181
  - funzioni di forma, 154
  - Galerkin, 143
  - integrazione numerica, 169
  - integrazione temporale, 153
  - mappatura elementi, 160
  - termini advettivi, 149
  - transitorio, 151
  - trasformazione isoparametrica, 164
  - unequal order, 183
- equazione
  - del moto
    - fluidi incompressibili, 13
  - dell'energia, 10
  - di Navier, 18
  - di Poisson, 30
- equazioni di Navier Stokes, 19
- Eulero implicito, metodo, 78
- Finite Volume Method, 53
- flusso, 61
- funzione di corrente, 26, 28
- Gear, 81
- griglia, 56
  - adattativa, 58
  - mobile, 62
  - non-strutturata, 58
  - strutturata Cartesiana, 57

## INDICE ANALITICO

- strutturata curvilinea, 57
- integrale, 62
- integrale (formulazione), 55
- leggi di Stokes, 19
- punto medio, metodo, 78
- Residui pesati, 140
- Runge-Kutta, 79
- SIMPLE, 32, 95
- SIMPLEC, 95
- SIMPLER, 95
- substrato viscoso, 232
- trasporto (equazione), 55
- turbolenza
  - buoyancy* e dissipazione energia cinetica turbolenta, 265
  - buoyancy* e sforzi di Reynolds, 261
  - buoyancy* ed energia cinetica turbolenta, 263
  - attrattori strani, 208
  - bidimensionale, 206
  - cascata di kolmogorov, 199
  - convezione naturale e mista, 260
  - decomposizione e fluttuazioni, 197
  - esempi in convezione naturale e mista, 268
  - funzioni di parete, 242
  - influenza della convezione naturale, 260
  - large eddy simulation, 219
  - large eddy simulations
    - condizioni al contorno, 232
    - filtraggio, 219
    - modello dinamico, 227
    - Smagorinsky, 224
    - sub grid models, 230
  - modelli a viscosità turbolenta, 235
  - modelli algebrici degli sforzi e flussi di Reynolds, 253
  - modelli differenziali degli sforzi e flussi di Reynolds, 254
  - modello  $k - \varepsilon$ , 239
  - modello  $k - \omega$ , 249
  - RANS, 234
    - condizioni al contorno, 242
  - simulazione diretta, 210
  - spettri, 202
  - strato limite atmosferico, 271
  - strutture coerenti, 205
- upwinding, 150
- variabili
  - primitive, 29
- volume di controllo, 53, 59, 60
  - bidimensionale, 60
  - facce, 59, 60
  - nodi, 59, 60
  - tridimensionale, 60
- volumi finiti, 53
- vorticità, 26, 28