

Enrico Nobile, Mitja Morgut, Paola Ranut
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste

Corso di Termofluidodinamica Computazionale

Esercizi da svolgere
AA 2012/2013



Maggio 2012

Problema 1

La Norma UNI EN ISO 10211

La norma Europea *EN ISO 10211 - Thermal bridges in building construction - Heat flows and surface temperatures - Detailed calculations* del 2007, recepita in Italia dall'UNI (Ente Nazionale Italiano di Unificazione) come *UNI EN ISO 10211* e con il titolo *Ponti termici in edilizia - Flussi termici e temperature superficiali - Calcoli dettagliati*, definisce le specifiche dei modelli geometrici 3D e 2D di un ponte termico, ai fini del calcolo numerico di:

- Flussi termici, ai fini di determinare le dispersioni termiche totali di un edificio o di una sua parte;
- Temperature minime superficiali, ai fini di valutare il rischio di condensazione superficiale.

La norma include i limiti del modello geometrico e le sue suddivisioni, le condizioni limite ed i valori termici associati da utilizzare.

Introduzione

La valutazione dei flussi termici (dispersioni) negli edifici, di grande rilevanza per la determinazione dei consumi e della *qualità energetica* di questi, può venir effettuata, con accuratezza sufficiente ai fini pratici, ricorrendo all'ipotesi di flusso monodimensionale (1D), per il quale, com'è noto, le soluzioni analitiche sono particolarmente semplici.

Tuttavia, negli edifici esistono *singolarità*, quali angoli, giunzioni, elementi finestrati, variazioni di composizione e/o spessore etc., tali da dar luogo a campi termici, e quindi flussi, 2D o 3D. Tali singolarità sono chiamate *ponti termici* (Ingl. *thermal bridges*), e, in confronto alle pareti piane, danno luogo a:

1. Variazioni del flusso termico;
2. Variazioni delle temperature superficiali interne

ambidue importanti.

La norma segnala che, sebbene per ambedue le variazioni le metodologie di calcolo siano simili, esse non sono necessariamente identiche per la valutazione dei flussi o delle temperature superficiali.

Come già accennato, i ponti termici danno luogo a campi termici, e flussi, bi- o tri-dimensionali, che possono venir calcolati accuratamente (accuratezza tipica $\pm 5\%$) solo facendo ricorso a metodologie di tipo numerico, oggetto appunto della norma in esame. Vi è da aggiungere, inoltre, che in numerose situazioni modelli numerici 2D forniscono risultati adeguati, soprattutto quando gli elementi costruttivi (es. angoli) sono uniformi in una direzione.

Infine, è doveroso segnalare che, qualora l'accuratezza necessaria sia inferiore, è possibile evitare l'uso di modelli numerici, ed utilizzare viceversa metodologie semplificate, quali *cataloghi* di ponti termici (accuratezza dell'ordine del $\pm 20\%$), calcoli manuali (accuratezza

$\pm 20\%$) e utilizzo di valori standard (accuratezza $\pm 50\%$). La descrizione e l'utilizzo di tali modelli semplificati è discusso nella norma UNI *UNI EN ISO 14683 - Ponti termici in edilizia - Coefficienti di trasmissione termica lineica - Metodi semplificati e valori di riferimento*

Validazione dei metodi di calcolo

Al fine di poter classificare un metodo di calcolo numerico come *Metodo di elevata precisione per calcoli stazionari 3D*, la norma, nell'*Annex A - Validation of calculation methods*, descrive quattro casi (test reference cases 1, 2, 3 e 4) da utilizzare per la validazione.

Analogamente, la norma specifica il subset di casi precedenti (casi 1 e 2) per la validazione necessaria a classificare un metodo come *Metodo di elevata precisione per calcoli stazionari 2D*

Com'è ovvio, i casi 1 e 2 sono bi-dimensionali, mentre i casi 3 e 4 sono tri-dimensionali

Case 1

Il Case 1, certamente il più semplice, è particolarmente interessante, poiché ammette una soluzione analitica. Esso è relativo allo scambio termico attraverso mezza (per ragioni di simmetria) colonna quadrata, per la quale siano note le temperature ai bordi. La norma, in particolare, si limita ad indicare, come illustrato in figura 1, il valore della soluzione analitica su una griglia equidistante di 28 punti, riportata in tabella 1, ed impone che la differenza fra i valori calcolati e forniti delle temperature non ecceda 0.1°C .

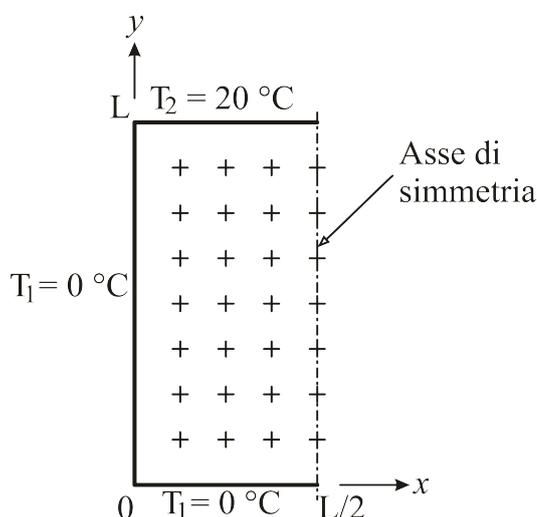


Figura 1: UNI EN ISO 10211: Reference Case 1

Per tale problema - scambio termico conduttivo stazionario in assenza di generazione interna - l'equazione generale di trasporto si semplifica nella:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla t) = 0$$

Temperature ($^{\circ}C$)			
9.7	13.4	14.7	15.1
5.3	8.6	10.3	10.8
3.2	5.6	7.0	7.5
2.0	3.6	4.7	5.0
1.3	2.3	3.0	3.2
0.7	1.4	1.8	1.9
0.3	0.6	0.8	0.9

Tabella 1: Valori di temperatura nei punti equidistanti della griglia di figura 1 ottenuti dalla soluzione analitica.

e tenendo conto che operiamo in 2D con proprietà termofisiche costanti, la precedente può esplicitarsi nella:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

La soluzione analitica, non riportata dalla Norma, è tuttavia facilmente reperibile in letteratura [1], ed è data, in forma adimensionale per l'intera colonna quadrata di lato L , dalla:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi)}$$

dove θ è la temperatura adimensionale:

$$\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

L'andamento del campo termico, ottenuto numericamente, è riportato, a scopo illustrativo, in figura 2.

Quesiti

1. Sviluppare, in MATLAB, SCILAB o Python, una procedura numerica per la soluzione del problema, basata sul metodo dei volumi finiti (FV), utilizzando una griglia Cartesiana ortogonale 2D a passo costante in x ed y , tenendo conto che, in generale, $\Delta x \neq \Delta y$.
2. Valutare il numero minimo di celle (volumi finiti), per ciascuna delle due direzioni x ed y , sufficienti a garantire l'accuratezza minima richiesta dalla norma.
3. Valutare e riportare in forma tabellare, per almeno tre griglie - costruite raddoppiando, partendo dalla griglia più rada, il numero di celle in ciascuna direzione x ed y - il tempo di calcolo necessario, utilizzando le seguenti metodologie di soluzione del sistema di equazioni:

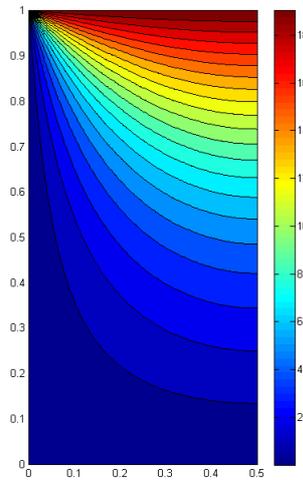


Figura 2: Campo termico per il Reference Case 1 della UNI EN ISO 10211.

- (a) Metodo diretto (divisione a sinistra *backslash* in MATLAB);
- (b) Metodo iterativo basato sul gradiente coniugato, eventualmente preconditionato (in MATLAB, sono disponibili numerose alternative);
- (c) Metodo SOR, verificando l'influenza del parametro ω di sovrarilassamento.
- (d) Metodo SLOR senza sovrarilassamento.

Interpolazione Bilineare

Per la determinazione delle temperatura nei punti indicati dalla norma, che in generale *non* coincidono con i centroidi delle celle nei quali sono disposte le variabili, è possibile far ricorso, trattandosi di un mezzo omogeneo ed isotropo, alla cosiddetta *Interpolazione Bilineare*, descritta nel seguito.

In matematica, l'*Interpolazione Bilineare* rappresenta la naturale estensione dell'*Interpolazione Lineare* per interpolare funzioni di due variabili su una griglia regolare. Essa trova ampio impiego, ad esempio, nell'elaborazione digitale dell'immagine, e costituisce la metodologia fondamentale per il ridimensionamento di immagini. Essa, in tale ambito, è anche chiamata *Bilinear Filtering* o *Bilinear Texture Mapping*.

Con riferimento alla figura 3, si supponga di voler determinare il valore della temperatura T nel punto $P(x, y)$, assumendo noti i valori di temperatura nei quattro punti $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$ e $Q_{22} = (x_2, y_2)$.

Si può pensare di effettuare dapprima un'interpolazione lineare lungo x , ottenendo:

$$T(R_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T(Q_{21})$$

dove $R_1 = (x, y_1)$,

$$T(R_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T(Q_{22})$$

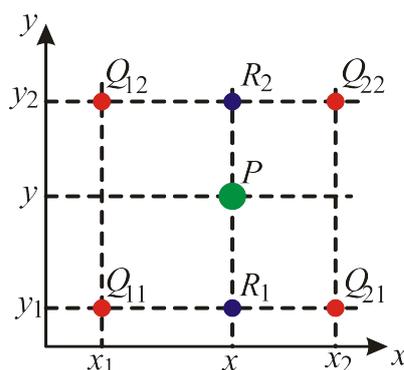


Figura 3: Interpolazione Bilineare:

dove $R_2 = (x, y_2)$.

Si procede poi interpolando linearmente in direzione y :

$$T(P) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} T(R_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} T(R_2)$$

Sostituendo nell'ultima espressione le relazioni precedenti, otteniamo la stima di $T(x, y)$:

$$\begin{aligned} T(x, y) &\approx \frac{T(Q_{11})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y_2 - y) \\ &+ \frac{T(Q_{21})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y_2 - y) \\ &+ \frac{T(Q_{12})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y - y_1) \\ &+ \frac{T(Q_{22})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y - y_1) \end{aligned}$$

È forse utile far notare che:

1. A dispetto del nome, l'interpolante *non* è lineare: in particolare l'interpolante è lineare per linee parallele all'asse x o all'asse y , mentre per altre direzioni è *quadratico*.
2. Il risultato dell'interpolazione bilineare è indipendente dall'ordine delle interpolazioni.
3. L'ovvia estensione dell'interpolazione bilineare al caso 3D è chiamata *Interpolazione Trilineare*.

Problema 2

Si consideri l'equazione di Burgers monodimensionale (1D), espressa dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in forma non-conservativa, e dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in forma conservativa.

L'equazione di Burgers, così chiamata in onore dello scienziato Olandese J.M. Burgers [2], è di notevole importanza nello studio di svariati problemi dell'ingegneria, quali, ad esempio, flussi con onde d'urto, propagazione non-lineare delle onde, turbolenza. Essa può essere considerata una versione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes, nella quale, pur essendo presente il termine viscoso ed il termine avvevivo non-lineare, manca il gradiente di pressione e pertanto può venire applicata e studiata a problemi 1D, con ovvi vantaggi in termini di economia di calcolo e la disponibilità - molto rara per problemi non-lineari - di soluzioni in forma analitica.

Si consideri il problema nel quale le condizioni al contorno, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, siano le seguenti:

$$u = 1 \text{ a } x = 0 \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ a } x = 1$$

La soluzione analitica, per queste condizioni al contorno [3], è data dalla

$$u = u_R + \frac{1}{2} (u_L - u_R) \left[1 - \tanh \left(\frac{(u_L - u_R) (x - V_S \vartheta)}{4\nu} \right) \right]$$

e rappresenta bene il transito di un onda d'urto - *shock* - in un fluido viscoso, dove

$$V_S = \frac{u_L + u_R}{2}$$

rappresenta la sua velocità di propagazione, e u_L e u_R , definite

$$u_L = \lim_{x \rightarrow -\infty} u, \quad u_R = \lim_{x \rightarrow \infty} u, \quad u_L > u_R$$

possono venire assunte pari ai valori di u al contorno.

Assumendo pertanto, come condizione iniziale, la soluzione all'istante $\vartheta = 0.2$, si confronti la soluzione analitica con quella ottenuta numericamente, usando il metodo dei volumi finiti, considerando lo schema CDS per la discretizzazione spaziale - per ambedue i contributi avvevivo e diffusivo - ed i metodi di Eulero impliciti del primo e second'ordine per l'integrazione temporale. In particolare, si confronti la soluzione numerica con quella analitica, assumendo $\nu = 1 \times 10^{-3}$, per $\vartheta = 0.7, 1.5$, e si considerino i seguenti casi:

1. $N = 250, \Delta\vartheta = 0.01$;
2. $N = 500, \Delta\vartheta = 0.01$;

3. $N = 1000, \Delta t = 0.01;$
4. $N = 250, \Delta t = 0.001;$
5. $N = 500, \Delta t = 0.001;$
6. $N = 1000, \Delta t = 0.001;$

dove N è il numero di volumi nella discretizzazione spaziale, e Δt è il time-step.

Osservando infine che, utilizzando uno schema di integrazione implicito per un'equazione non-lineare è spesso opportuno (o necessario) procedere a sub-iterazioni per time-step, si valuti anche l'effetto di queste sull'accuratezza, considerando, ad esempio, 1 (nessuna sub-iterazione), 5 e 10 sub-iterazioni.

Si riportino i risultati in forma sintetica, grafica e/o tabellare.

Problema 3

Nell'utilizzo del metodo dei volumi finiti su griglie non strutturate, con celle composte da poliedri con numero arbitrario di facce (poligoni con numero arbitrario di lati in 2D), è opportuno utilizzare una struttura dati tipo *face-based*, piuttosto che *cell-based*: in tal modo è possibile calcolare i flussi diffusivi e convettivi, per ogni faccia, *una volta sola*, e inserirli, analogamente al processo di *assembly* con gli elementi finiti, in ambedue le equazioni per le due celle con la faccia (lato in 2D) in comune, se si tratta di facce interne, oppure all'equazione della sola cella adiacente se la faccia giace su un contorno.

Nel problema in esame, sono forniti due generici files ASCII per una griglia 2D non strutturata composta di soli triangoli: `grid.nod` e `grid.ele` riportati per completezza, oltre che sulla pagina *Moodle* del corso, anche in Appendice.

Il file `grid.nod` ha il seguente formato:

Prima riga: <numero nodi>
Righe seguenti: <numero nodo> <x> <y> <marker>
dove <x> e <y> sono le coordinate dei nodi (vertici) della griglia.

Il file `grid.ele` ha il seguente formato:

Prima riga: <numero elementi>
Righe seguenti: <numero elemento> <i> <j> <k> <marker>
dove <i>, <j>, <k> sono i nodi che definiscono l'elemento.

I <marker>, qua inutilizzati, possono identificare, ad esempio, materiali diversi etc.

Sviluppare, in MATLAB o altro linguaggio a scelta, una procedura di calcolo che:

1. Legga ambedue i files;
2. Calcoli l'area di tutti gli elementi (celle), e l'area totale del dominio di calcolo;
3. Calcoli le coordinate di tutti i centroidi degli elementi;
4. Determini gli edge (lati) della griglia;
5. Calcoli le coordinate dei centroidi degli edge;
6. Fornisca una rappresentazione grafica della griglia, assieme ai numeri delle celle e ai numeri degli edge;
7. Produca un file, di nome <code>grid.edg</code>, avente il seguente formato:
Prima riga: <numero edges>
Righe seguenti: <numero edge> <n1> <n2> <e1> <e2>
dove, come illustrato in figura 4, <n1> e <n2> sono i due nodi che identificano l'edge, mentre <e1> e <e2> sono gli elementi (celle) che si affacciano sull'edge, con la convenzione di porre <e2> pari a <-1> se si tratta di un edge che giace sul contorno.

Si osservi che, in MATLAB, è conveniente far uso delle funzioni `sort` e `unique` per individuare gli edge *unici* nella griglia.

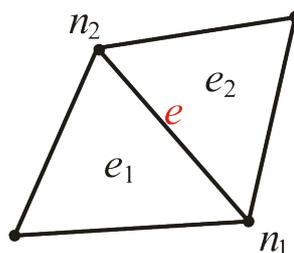


Figura 4: Indicazione di un edge.

Problema 4

Sviluppare, in MATLAB o altro linguaggio a scelta, una procedura di calcolo - script o function - in grado di:

- Leggere una griglia generica 3D secondo il formato di *OpenFOAM*.
- Rappresentare graficamente la griglia di superficie, composta da tutte le *patches* che ne costituiscono le superfici di contorno.

A tal fine, sulla pagina *Moodle* del corso, sono fornite, in formato *.zip* le griglie per due geometrie arbitrarie, *geom1.zip* e *geom2.zip*. Rimandando alla *Programmer's Guide* di *OpenFOAM* per ulteriori informazioni [4], la griglia, in *OpenFOAM*, è descritta dai seguenti files:

points Contiene la lista, la cui numerazione implicita parte da 0, delle coordinate x, y, z di tutti i nodi (vertici) della griglia. Il formato è il seguente:

```

/*-----*- C++ -*-----*/
| ===== |
| \ \      /  F i e l d           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \ \      /  O p e r a t i o n   | Version: 2.1.1 |
5 | \ \      /  A n d               | Web: www.OpenFOAM.org |
| \ \      /  M a n i p u l a t i o n | |
| ===== |
/*-----*- C++ -*-----*/
FoamFile
{
10   version      2.0;
    format        ascii;
    class         vectorField;
    location      "constant/polyMesh";
15   object       points;
}
// *****

7672
20 (
(0 0 -25)
(100 3.061515885e-15 -425)
(150 0 -425)
.....
25 .....
(87.86430881 22.96002865 -37.13895599)
(88.56119186 21.05934167 -24.30295503)
)
30
// *****

```

faces Contiene la lista, anche qua con numerazione implicita che parte da 0, di tutte le facce costituenti la griglia. Poiché in OpenFOAM le celle sono costituite da poliedri arbitrari, le cui facce sono anch'esse poligoni con un numero arbitrario di vertici/lati, per ogni faccia vengono indicati il numero di nodi ed i nodi (vertici) descritti nel file **points**. Il formato è il seguente:

```

/*----- C++ -----*/
|=====|
| \ \ / Field | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \ \ / Operation | Version: 2.1.1 |
5 | \ \ / And | Web: www.OpenFOAM.org |
| \ \ / Manipulation |
|-----*/
FoamFile
{
10   version      2.0;
    format      ascii;
    class       faceList;
    location    "constant/polyMesh";
15   object      faces;
}
// *****

47329
20 (
3(3887 1662 1708)
3(3887 1708 2231)
3(1662 2231 1708)
.....
25 .....
4(117 211 1774 1776)
4(208 117 1776 1775)
)
30
// *****

```

boundary Contiene l'elenco delle *patches* che costituiscono le regioni del contorno, sulle quali vengono applicate le opportune condizioni al contorno. Il numero delle *patches* è arbitrario, e ogni *patch* viene identificata da un nome, dal tipo, dal numero di facce che la costituisce ed infine dalla faccia iniziale, tenendo presente che la numerazione implicita delle facce, nel file **faces**, è tale da assicurare che ogni patch è costituita da un blocco contiguo di facce. Il formato è il seguente:

```

/*----- C++ -----*/
|=====|
| \ \ / Field | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \ \ / Operation | Version: 2.1.1 |
5 | \ \ / And | Web: www.OpenFOAM.org |
| \ \ / Manipulation |
|-----*/
FoamFile
{
10   version      2.0;
    format      ascii;
    class       polyBoundaryMesh;
    location    "constant/polyMesh";
15   object      boundary;
}
// *****

3

```

```

20  (
    INGRESSO
    {
        type            wall;
        nFaces          86;
        startFace       43878;
25  }
    PARETE
    {
        type            wall;
        nFaces          3285;
        startFace       43964;
30  }
    USCITA
    {
        type            wall;
        nFaces          80;
        startFace       47249;
35  }
    )
40  // ***** //

```

owner Contiene, sempre con numerazione implicita da 0, la lista delle celle designate come *owner* per ogni faccia, interna ed esterna (contorno), descritta dal file **faces**. Poiché *tutte* le facce, interne ed esterne, possiedono un cella *owner*, il numero totale di celle *owner* coincide con il numero di facce nel file **faces**. Il formato è il seguente:

```

/*-----*- C++ -*/
|=====|
|  \ \   /  F i e l d           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
|  \ \   /  O p e r a t i o n   | Version: 2.1.1 |
5 |  \ \   /  A n d               | Web: www.OpenFOAM.org |
|  \ \   /  M a n i p u l a t i o n | |
/*-----*/
FoamFile
{
10  version      2.0;
    format      ascii;
    class       labelList;
    note        "nPoints:7672 nCells:20338 nFaces:47329 nInternalFaces:43878";
    location    "constant/polyMesh";
15  object       owner;
}
// ***** //

20 47329
   (
   0
   0
   0
25  .
   .
   17258
   17254
   )
30
// ***** //

```

neighbour Contiene la lista delle celle designate come *neighbour* per ogni faccia interna, poiché ogni faccia esterna ha solo un *owner* e non un *neighbour*. Perciò il numero totale di celle *neighbour* coincide con il numero di facce interne. Il formato è il seguente:

```

/*-----*-- C++ --*-----*\
| ===== |
| \\      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\      / O p e r a t i o n | Version: 2.1.1 |
5 | \\      / A n d | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\      / M a n i p u l a t i o n |
\*-----*--*/
FoamFile
{
10   version      2.0;
     format      ascii;
     class      labelList;
     note      "nPoints:7672 nCells:20338 nFaces:47329 nInternalFaces:43878";
     location   "constant/polyMesh";
15   object      neighbour;
}
// ***** //

20 43878
   (
   152
   674
   1003
25  .
   .
   20335
   20337
   )
30

// ***** //

```

Suggerimenti ed osservazioni

Si tenga presente che:

- In MATLAB arrays e vettori sono indicizzati da 1 e non da 0;
- In MATLAB esistono numerosi comandi a basso livello per poter manipolare stringhe di caratteri ed estrarne i campi (nomi, numeri etc.);
- In MATLAB esiste la funzione *patch* che consente di rappresentare graficamente poligoni/face 3D arbitrarie provvedendo inoltre alla rimozione automatica delle linee nascoste.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6th Ed., Wiley, (2007).
- [2] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, Academic Press, New York, pp. 171-199, (1948).
- [3] K. Masatsuka, I do like CFD, <http://www.cfdbooks.com/>, 2009.
- [4] AA. VV., OpenFOAM Programmer's Guide, <http://www.openfoam.org/docs/>.

A Appendice

Files per l'esercizio 3

<grid.nod>

```

77
 1 0.00000000E+000 0.00000000E+000      1
 2 6.32064368E-002 6.65090690E-002      0
 3 0.00000000E+000 1.00000000E-001      3
 4 1.00000000E-001 0.00000000E+000      1
 5 7.45374061E-002 1.47377308E-001      0
 6 1.41556901E-001 8.52376648E-002      0
 7 0.00000000E+000 2.00000000E-001      3
 8 2.00000000E-001 0.00000000E+000      1
 9 1.61243611E-001 1.86503242E-001      0
10 8.14249838E-002 2.46141866E-001      0
11 2.50580234E-001 1.11170244E-001      0
12 0.00000000E+000 3.00000000E-001      3
13 3.00000000E-001 0.00000000E+000      1
14 1.67953238E-001 2.93752837E-001      0
15 2.52000672E-001 2.35535027E-001      0
16 8.51997542E-002 3.49299383E-001      0
17 3.59028641E-001 8.51011950E-002      0
18 3.40815813E-001 1.85991685E-001      0
19 0.00000000E+000 4.00000000E-001      3
20 2.54980831E-001 3.43936822E-001      0
21 4.00000000E-001 0.00000000E+000      1
22 1.73787746E-001 4.01078432E-001      0
23 3.37489813E-001 2.91939589E-001      0
24 4.26153251E-001 1.47112558E-001      0
25 8.85135696E-002 4.54720743E-001      0
26 4.37004584E-001 6.64331124E-002      0
27 4.20495905E-001 2.45229931E-001      0
28 2.61316632E-001 4.46547348E-001      0
29 3.38708578E-001 3.94506560E-001      0
30 0.00000000E+000 5.00000000E-001      3
31 5.00000000E-001 0.00000000E+000      1
32 1.85694905E-001 5.17711267E-001      0
33 5.00000000E-001 1.00000000E-001      2
34 4.19209441E-001 3.46355136E-001      0
35 5.00000000E-001 2.00000000E-001      2
36 8.67257560E-002 5.59775689E-001      0
37 3.41209047E-001 4.91438632E-001      0
38 2.74777122E-001 5.29700351E-001      0

```

39	5.000000000E-001	3.000000000E-001	2
40	4.19437917E-001	4.46295384E-001	0
41	0.000000000E+000	6.000000000E-001	3
42	1.64730828E-001	6.24751953E-001	0
43	2.50526347E-001	6.06036358E-001	0
44	5.000000000E-001	4.000000000E-001	2
45	3.35798249E-001	5.85543336E-001	0
46	8.13072779E-002	6.60691019E-001	0
47	4.18342180E-001	5.45003583E-001	0
48	5.000000000E-001	5.000000000E-001	2
49	2.25862546E-001	6.83096583E-001	0
50	0.000000000E+000	7.000000000E-001	3
51	1.57726036E-001	7.19609679E-001	0
52	3.16231705E-001	6.93617012E-001	0
53	4.14135544E-001	6.45976168E-001	0
54	5.000000000E-001	6.000000000E-001	2
55	7.80863823E-002	7.59093066E-001	0
56	2.39361309E-001	7.69848622E-001	0
57	0.000000000E+000	8.000000000E-001	3
58	4.14489078E-001	7.50751888E-001	0
59	1.55886519E-001	8.18575959E-001	0
60	5.000000000E-001	7.000000000E-001	2
61	3.32867363E-001	8.12092000E-001	0
62	7.28196601E-002	8.54833701E-001	0
63	2.46467253E-001	8.90396915E-001	0
64	5.000000000E-001	8.000000000E-001	2
65	4.23377147E-001	8.51930099E-001	0
66	0.000000000E+000	9.000000000E-001	3
67	1.39730430E-001	9.16450666E-001	0
68	3.56528391E-001	9.14736895E-001	0
69	6.25678672E-002	9.34303368E-001	0
70	5.000000000E-001	9.000000000E-001	2
71	2.000000000E-001	1.000000000E+000	3
72	3.000000000E-001	1.000000000E+000	3
73	4.36014644E-001	9.33382815E-001	0
74	0.000000000E+000	1.000000000E+000	1
75	1.000000000E-001	1.000000000E+000	3
76	4.000000000E-001	1.000000000E+000	3
77	5.000000000E-001	1.000000000E+000	1

<grid.ele>

122

1	1	2	3	-1
2	1	4	2	-1
3	2	5	3	-1
4	2	4	6	-1
5	2	6	5	-1
6	5	7	3	-1
7	6	4	8	-1
8	9	5	6	-1
9	5	10	7	-1
10	9	10	5	-1
11	6	8	11	-1
12	9	6	11	-1
13	7	10	12	-1
14	11	8	13	-1
15	14	10	9	-1
16	15	9	11	-1
17	16	12	10	-1
18	14	9	15	-1
19	14	16	10	-1
20	11	13	17	-1
21	15	11	18	-1
22	17	18	11	-1
23	16	19	12	-1
24	20	14	15	-1
25	17	13	21	-1
26	22	16	14	-1
27	15	18	23	-1
28	22	14	20	-1
29	20	15	23	-1
30	18	17	24	-1
31	16	25	19	-1
32	25	16	22	-1
33	17	21	26	-1
34	17	26	24	-1
35	27	23	18	-1
36	18	24	27	-1
37	20	28	22	-1
38	20	23	29	-1
39	25	30	19	-1
40	20	29	28	-1
41	26	21	31	-1
42	25	22	32	-1

43	28	32	22	-1
44	26	33	24	-1
45	27	34	23	-1
46	34	29	23	-1
47	24	35	27	-1
48	26	31	33	-1
49	36	30	25	-1
50	33	35	24	-1
51	36	25	32	-1
52	29	37	28	-1
53	38	32	28	-1
54	34	27	39	-1
55	35	39	27	-1
56	34	40	29	-1
57	38	28	37	-1
58	40	37	29	-1
59	41	30	36	-1
60	36	32	42	-1
61	38	43	32	-1
62	34	39	44	-1
63	43	42	32	-1
64	34	44	40	-1
65	38	37	45	-1
66	41	36	46	-1
67	46	36	42	-1
68	40	47	37	-1
69	38	45	43	-1
70	45	37	47	-1
71	40	44	48	-1
72	49	42	43	-1
73	48	47	40	-1
74	46	50	41	-1
75	46	42	51	-1
76	43	45	52	-1
77	51	42	49	-1
78	43	52	49	-1
79	45	47	53	-1
80	48	54	47	-1
81	45	53	52	-1
82	55	50	46	-1
83	55	46	51	-1
84	54	53	47	-1
85	51	49	56	-1
86	49	52	56	-1
87	57	50	55	-1

88	52	53	58	-1
89	55	51	59	-1
90	56	59	51	-1
91	54	60	53	-1
92	56	52	61	-1
93	53	60	58	-1
94	52	58	61	-1
95	57	55	62	-1
96	59	62	55	-1
97	56	63	59	-1
98	56	61	63	-1
99	58	60	64	-1
100	61	58	65	-1
101	62	66	57	-1
102	65	58	64	-1
103	67	62	59	-1
104	67	59	63	-1
105	61	68	63	-1
106	61	65	68	-1
107	69	66	62	-1
108	69	62	67	-1
109	65	64	70	-1
110	67	63	71	-1
111	68	72	63	-1
112	63	72	71	-1
113	73	68	65	-1
114	65	70	73	-1
115	69	74	66	-1
116	69	67	75	-1
117	67	71	75	-1
118	68	76	72	-1
119	73	76	68	-1
120	69	75	74	-1
121	73	70	77	-1
122	73	77	76	-1