

Enrico Nobile

*Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste*

Corso di Termofluidodinamica Computazionale

**Esercizi da svolgere
AA 2016/2017**



Aprile 2017

Problema 1

Le superfici alettate

L'uso di di superfici alettate per incrementare lo scambio termico fra superfici solide e fluidi trova molteplici applicazioni quali, a titolo di esempio, il raffreddamento ad aria di motori a combustione interna, gli scambiatori di calore liquido-gas ed il raffreddamento di componenti elettronici. La figura 1 riporta due esempi di superfici alettate.

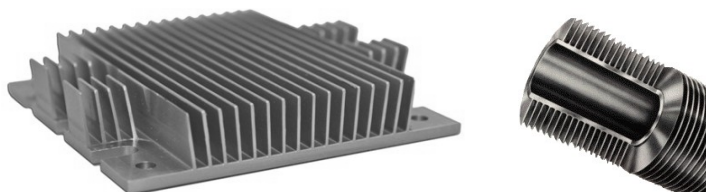


Figura 1: Esempi di superfici alettate: a sinistra dissipatore per componenti elettronici, a destra tubo alettato.

Le alette possono assumere configurazioni diverse, a seconda delle applicazioni, ed il caso più semplice è costituito da un'aletta piana a sezione rettangolare costante, come illustrato in figura 2.

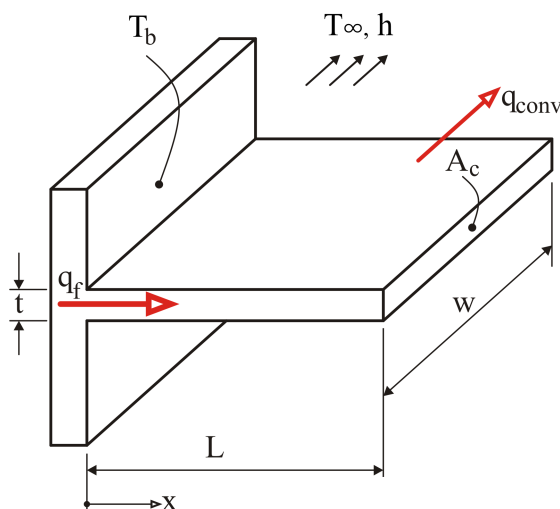


Figura 2: Aletta piana a sezione uniforme.

In altri casi si preferisce adottare alette a sezione variabile, quale è il caso delle alette trapezoidali in figura 3.

Per valutare le prestazioni termiche di un'aletta, e quindi dell'intera superficie alettata, è necessario determinare la distribuzione di temperatura nell'aletta stessa. Per far ciò è comune adottare alcune ipotesi semplificative:

1. Andamento *monodimensionale* del campo termico all'interno dell'aletta: $T \approx T(x)$.
2. Regime stazionario.

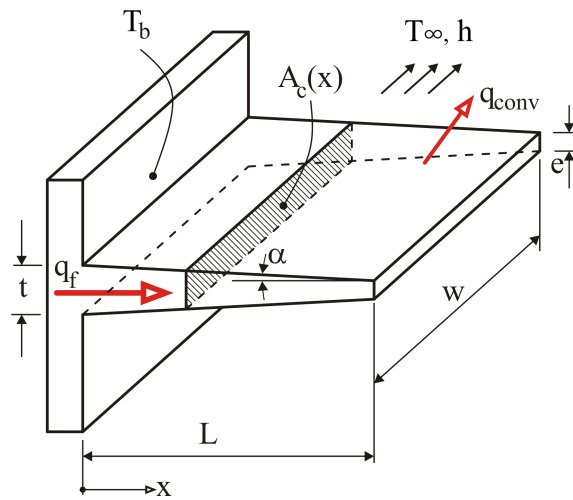


Figura 3: Aletta piana trapezoidale.

3. Conducibilità termica k costante.
4. Scambio termico per irraggiamento trascurabile.
5. Assenza di generazione termica.
6. Coefficiente di scambio termico convettivo h costante lungo tutta l'aletta.

In particolare l'ipotesi 1. è usualmente giustificata dal piccolo spessore dell'aletta rispetto alla sua lunghezza, che pertanto dà luogo a variazioni di temperatura, nella sezione trasversale dell'aletta, trascurabili rispetto alle differenze di temperatura fra questa e l'ambiente.

Con tali ipotesi, ed assumendo che la sezione A_c sia costante o vari secondo una legge lineare o parabolica, è possibile procedere per via analitica, ricorrendo ad un bilancio di energia per un concio elementare dell'aletta di lunghezza dx . Operando in tal modo si perviene ad un'equazione differenziale del secondo ordine, la cui soluzione generale contiene due costanti che possono venir determinate in base alle condizioni al contorno [1, 2].

Soluzione numerica con il metodo dei Volumi Finiti

Con il metodo dei Volumi Finiti è tuttavia possibile evitare sin dal principio questo passaggio - dal *finito* al *differenziale* e poi nuovamente al *finito* - suddividendo l'aletta in un certo numero N di Volumi di Controllo, ed imponendo il bilancio di energia su ciascuno di essi, come schematizzato in figura 4 nella quale, per chiarezza di rappresentazione, si è considerata la sola proiezione sul piano.

Tale bilancio conduce alla

$$-q_w + q_e + q_{conv} = 0$$

ed esplicitando i flussi termici conduttivi attraverso la legge di Fourier ed il flusso termico convettivo con la legge di Newton si ha

$$kA_{c_w} \left. \frac{dT}{dx} \right|_w - kA_{c_e} \left. \frac{dT}{dx} \right|_e + \Delta S h (T_P - T_\infty) = 0$$

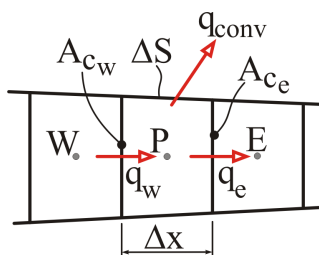


Figura 4: Bilancio su un volume di controllo dell'aletta.

dove, nel caso di aletta a sezione costante, $\Delta S = P \Delta x$, con P perimetro dell'aletta e A_c la sua sezione trasversale.

Utilizzando infine lo schema CDS del 2o ordine per la valutazione dei flussi conduttivi e raccogliendo si ottiene, per il generico volume di controllo interno (per i volumi di controllo alle estremità le espressioni possono differire)

$$A_W T_W + A_P T_P + A_E T_E = S_P$$

con

$$S_P = -\Delta S h T_\infty$$

$$A_W = \frac{k A_{c_w}}{\Delta x}$$

$$A_E = \frac{k A_{c_e}}{\Delta x}$$

$$A_P = -(A_W + A_E) - \Delta S h$$

Introducendo le condizioni al contorno nelle espressioni per la cella 1 e la cella N , è facile verificare che si ottiene un sistema tridiagonale, che può essere convenientemente risolto, in MATLAB, sfruttando la funzione `spdiags`.

Il vantaggio del metodo dei Volumi Finiti - e di qualunque analogo metodo numerico - è la notevole flessibilità: è infatti possibile trattare facilmente casi di alette con sezione trasversale variabile in modo arbitrario, tener conto di proprietà termofisiche variabili con la temperatura, di variazioni spaziali del coefficiente convettivo, del possibile contributo dello scambio termico per irraggiamento etc. Infine nel caso non sia verificato l'andamento *monodimensionale* del campo termico all'interno dell'aletta, il problema può ancora venir affrontato ricorrendo ad una discretizzazione bi- o tridimensionale.

Problemi proposti

1. Un'aletta piana di sezione uniforme, come in figura 2, è costruita con un materiale avente conducibilità termica $k = 50 \text{ W/(m K)}$, spessore $t = 20 \text{ mm}$, lunghezza $L = 200 \text{ mm}$, ed è molto profonda nella direzione normale alla pagina. Il coefficiente di scambio termico convettivo vale $h = 500 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ con una temperatura dell'ambiente $T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. La base dell'aletta è mantenuta ad una temperatura $T_b = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, mentre anche l'estremità dell'aletta scambia calore per convezione.

Assumendo una distribuzione *ID* della temperatura valutare, con il metodo dei Volumi Finiti, il flusso termico unitario (per metro di profondità) scambiato dall'aletta q'_{num} [W/m], al variare del numero N di suddivisioni, con $N = 10, 20, 40, 80, 160$ e 320 . Riportare in un grafico *logaritmico* l'andamento dell'errore percentuale al variare di N , verificandone l'andamento quadratico. L'errore è valutato come differenza fra il valore del flusso q'_{num} ottenuto dalla soluzione numerica e quello q'_f [W/m] dato dalla soluzione analitica [2], pari a

$$q'_f = \sqrt{hPkA_c} \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} (T_b - T_\infty) \quad (1)$$

con

$$m = \sqrt{hP/kA_c} \quad (2)$$

2. Ripetere la medesima analisi ma considerando stavolta un'aletta trapezoidale sempre di lunghezza $L = 200$ mm, dove lo spessore alla base dell'aletta sia ancora $t = 20$ mm e lo spessore all'estremità sia $e = 10$ mm (v. figura 3). Si mantengano invariati tutti gli altri dati.

La soluzione analitica disponibile in letteratura [3] è ottenuta, in sequenza, dall'applicazione delle

$$\tan \alpha = \frac{t - e}{2L} \quad (3)$$

$$K = \sqrt{\frac{h}{(k \sin \alpha)}} \quad (4)$$

$$\mu_a = 2K \left[\frac{e(1 - \tan \alpha)}{2 \tan \alpha} \right]^{1/2} \quad (5)$$

$$\mu_b = 2K \left[\left(L + \frac{e}{2} \right) + \frac{e(1 - \tan \alpha)}{2 \tan \alpha} \right]^{1/2} \quad (6)$$

$$q'_f = k \mu_b \tan \alpha (T_b - T_\infty) \frac{I_1(\mu_b) K_1(\mu_a) - I_1(\mu_a) K_1(\mu_b)}{I_0(\mu_b) K_1(\mu_a) + I_1(\mu_a) K_0(\mu_b)} \quad (7)$$

Nella (7) I_0 e I_1 rappresentano le *funzioni di Bessel modificate del primo tipo*, rispettivamente di *ordine zero* e di *ordine 1* (in MATLAB: funzione `besseli`). K_0 e K_1 sono invece le *funzioni di Bessel modificate del secondo tipo*, rispettivamente di *ordine zero* e *ordine 1* (in MATLAB: funzione `besselk`).

Problema 2

La Norma UNI EN ISO 10211

La norma Europea *EN ISO 10211 - Thermal bridges in building construction - Heat flows and surface temperatures - Detailed calculations* del 2007, recepita in Italia dall'UNI (Ente Nazionale Italiano di Unificazione) come *UNI EN ISO 10211* e con il titolo *Ponti termici in edilizia - Flussi termici e temperature superficiali - Calcoli dettagliati*, definisce le specifiche dei modelli geometrici 3D e 2D di un ponte termico, ai fini del calcolo numerico di:

- Flussi termici, ai fini di determinare le dispersioni termiche totali di un edificio o di una sua parte;
- Temperature minime superficiali, ai fini di valutare il rischio di condensazione superficiale.

La norma include i limiti del modello geometrico e le sue suddivisioni, le condizioni limite ed i valori termici associati da utilizzare.

Introduzione

La valutazione dei flussi termici (dispersioni) negli edifici, di grande rilevanza per la determinazione dei consumi e della *qualità energetica* di questi, può venir effettuata, con accuratezza sufficiente ai fini pratici, ricorrendo all'ipotesi di flusso monodimensionale (1D), per il quale, com'è noto, le soluzioni analitiche sono particolarmente semplici.

Tuttavia, negli edifici esistono *singolarità*, quali angoli, giunzioni, elementi finestrati, variazioni di composizione e/o spessore etc., tali da dar luogo a campi termici, e quindi flussi, 2D o 3D. Tali singolarità sono chiamate *ponti termici* (Ingl. *thermal bridges*), e, in confronto alle pareti piane, danno luogo a:

1. Variazioni del flusso termico;
2. Variazioni delle temperature superficiali interne

ambedue importanti.

La norma segnala che, sebbene per ambedue le variazioni le metodologie di calcolo siano simili, esse non sono necessariamente identiche per la valutazione dei flussi o delle temperature superficiali.

Come già accennato, i ponti termici danno luogo a campi termici, e flussi, bi- o tri-dimensionali, che possono venir calcolati accuratamente (accuratezza tipica $\pm 5\%$) solo facendo ricorso a metodologie di tipo numerico, oggetto appunto della norma in esame. Vi è da aggiungere, inoltre, che in numerose situazioni modelli numerici 2D forniscono risultati adeguati, soprattutto quando gli elementi costruttivi (es. angoli) sono uniformi in una direzione.

Infine, è doveroso segnalare che, qualora l'accuratezza necessaria sia inferiore, è possibile evitare l'uso di modelli numerici, ed utilizzare viceversa metodologie semplificate, quali *cataloghi* di ponti termici (accuratezza dell'ordine del $\pm 20\%$), calcoli manuali (accuratezza

$\pm 20\%$) e utilizzo di valori standard (accuratezza $\pm 50\%$). La descrizione e l'utilizzo di tali modelli semplificati è discusso nella norma UNI *UNI EN ISO 14683 - Ponti termici in edilizia - Coefficienti di trasmissione termica lineica - Metodi semplificati e valori di riferimento*

Validazione dei metodi di calcolo

Al fine di poter classificare un metodo di calcolo numerico come *Metodo di elevata precisione per calcoli stazionari 3D*, la norma, nell'*Annex A - Validation of calculation methods*, descrive quattro casi (test reference cases 1, 2, 3 e 4) da utilizzare per la validazione.

Analogamente, la norma specifica il subset di casi precedenti (casi 1 e 2) per la validazione necessaria a classificare un metodo come *Metodo di elevata precisione per calcoli stazionari 2D*

Com'è ovvio, i casi 1 e 2 sono bi-dimensionali, mentre i casi 3 e 4 sono tri-dimensionali

Case 1

Il Case 1, certamente il più semplice, è particolarmente interessante, poiché ammette una soluzione analitica. Esso è relativo allo scambio termico attraverso mezza (per ragioni di simmetria) colonna quadrata, per la quale siano note le temperature ai bordi. La norma, in particolare, si limita ad indicare, come illustrato in figura 5, il valore della soluzione analitica su una griglia equidistante di 28 punti, riportata in tabella 1, ed impone che la differenza fra i valori calcolati e forniti delle temperature non ecceda $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

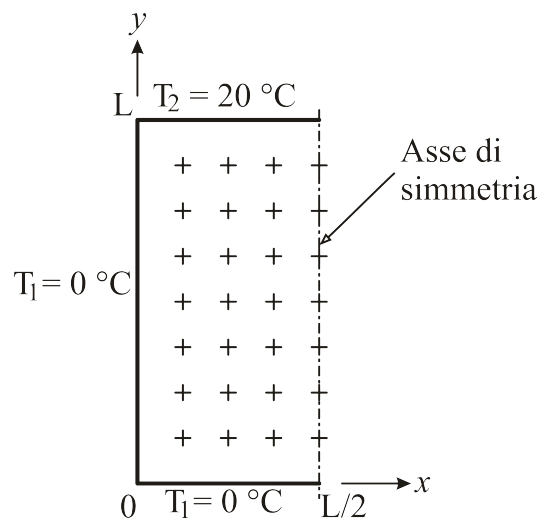


Figura 5: UNI EN ISO 10211: Reference Case 1

Per tale problema - scambio termico conduttivo stazionario in assenza di generazione interna - l'equazione generale di trasporto si semplifica nella:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla t) = 0$$

Temperature (°C)			
9.7	13.4	14.7	15.1
5.3	8.6	10.3	10.8
3.2	5.6	7.0	7.5
2.0	3.6	4.7	5.0
1.3	2.3	3.0	3.2
0.7	1.4	1.8	1.9
0.3	0.6	0.8	0.9

Tabella 1: Valori di temperatura nei punti equidistanti della griglia di figura 1 ottenuti dalla soluzione analitica.

e tenendo conto che operiamo in 2D con proprietà termofisiche costanti, la precedente può esplicitarsi nella:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

La soluzione analitica, non riportata dalla Norma, è tuttavia facilmente reperibile in letteratura [2], ed è data, in forma adimensionale per l'intera colonna quadrata di lato L , dalla:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi)}$$

dove θ è la temperatura adimensionale:

$$\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

L'andamento del campo termico, ottenuto numericamente, è riportato, a scopo illustrativo, in figura 6.

Quesiti

1. Sviluppare, in MATLAB, SCILAB o Python, una procedura numerica per la soluzione del problema, basata sul metodo dei volumi finiti (FV), utilizzando una griglia Cartesiana ortogonale 2D a passo costante in x ed y , tenendo conto che, in generale, $\Delta x \neq \Delta y$.
2. Valutare il numero minimo di celle (volumi finiti), per ciascuna delle due direzioni x ed y , sufficienti a garantire l'accuratezza minima richiesta dalla norma.
3. Per almeno quattro griglie - costruite raddoppiando, partendo dalla griglia più rada, il numero di celle in ciascuna direzione x ed y - valutare e riportare in forma tabellare e grafica, il tempo di calcolo necessario, utilizzando le seguenti metodologie di soluzione del sistema di equazioni:

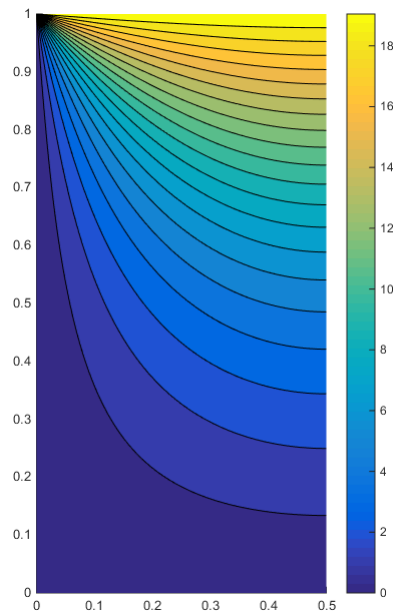


Figura 6: Campo termico per il Reference Case 1 della UNI EN ISO 10211.

- (a) Metodo diretto (divisione a sinistra *backslash* in MATLAB);
- (b) Metodo iterativo basato sul gradiente coniugato, eventualmente preconditionato (in MATLAB, sono disponibili numerose alternative);
- (c) Metodo SOR, verificando l'influenza del parametro ω di sovrarilassamento.
- (d) Metodo di Jacobi.

Interpolazione Bilineare

Per la determinazione delle temperatura nei punti indicati dalla norma, che in generale *non* coincidono con i centroidi delle celle nei quali sono disposte le variabili, è possibile far ricorso, trattandosi di un mezzo omogeneo ed isotropo, alla cosiddetta *Interpolazione Bilineare*, descritta nel seguito.

In matematica, l'*Interpolazione Bilineare* rappresenta la naturale estensione dell'*Interpolazione Lineare* per interpolare funzioni di due variabili su una griglia regolare. Essa trova ampio impiego, ad esempio, nell'elaborazione digitale dell'immagine, e costituisce la metodologia fondamentale per il ridimensionamento di immagini. Essa, in tale ambito, è anche chiamata *Bilinear Filtering* o *Bilinear Texture Mapping*.

Con riferimento alla figura 7, si supponga di voler determinare il valore della temperatura T nel punto $P(x, y)$, assumendo noti i valori di temperatura nei quattro punti $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$ e $Q_{22} = (x_2, y_2)$.

Si può pensare di effettuare dapprima un'interpolazione lineare lungo x , ottenendo:

$$T(R_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T(Q_{21})$$

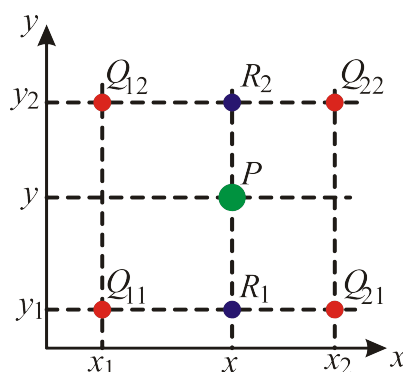


Figura 7: Interpolazione Bilineare:

dove $R_1 = (x, y_1)$,

$$T(R_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T(Q_{22})$$

dove $R_2 = (x, y_2)$.

Si procede poi interpolando linearmente in direzione y :

$$T(P) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} T(R_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} T(R_2)$$

Sostituendo nell'ultima espressione le relazioni precedenti, otteniamo la stima di $T(x, y)$:

$$\begin{aligned} T(x, y) &\approx \frac{T(Q_{11})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y_2 - y) \\ &+ \frac{T(Q_{21})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y_2 - y) \\ &+ \frac{T(Q_{12})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y - y_1) \\ &+ \frac{T(Q_{22})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y - y_1) \end{aligned}$$

È forse utile far notare che:

1. A dispetto del nome, l'interpolante *non* è lineare: in particolare l'interpolante è lineare per linee parallele all'asse x o all'asse y , mentre per altre direzioni è *quadratico*.
2. Il risultato dell'interpolazione bilineare è indipendente dall'ordine delle interpolazioni.
3. L'ovvia estensione dell'interpolazione bilineare al caso 3D è chiamata *Interpolazione Trilineare*.

Problema 3

L'equazione di Burgers

Si consideri l'equazione di Burgers monodimensionale (1D), espressa dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in forma non-conservativa, e dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in forma conservativa.

L'equazione di Burgers, così chiamata in onore dello scienziato Olandese J.M. Burgers [4], è di notevole importanza nello studio di svariati problemi dell'ingegneria, quali, ad esempio, flussi con onde d'urto, propagazione non-lineare delle onde, turbolenza. Essa può essere considerata una versione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes, nella quale, pur essendo presente il termine viscoso ed il termine avvevivo non-lineare, manca il gradiente di pressione e pertanto può venire applicata e studiata a problemi 1D, con ovvi vantaggi in termini di economia di calcolo e la disponibilità - molto rara per problemi non-lineari - di soluzioni in forma analitica.

Problema proposto

Si consideri il problema nel quale le condizioni al contorno, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, siano le seguenti:

$$u = 1 \text{ a } x = 0 \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ a } x = 1$$

La soluzione analitica, per queste condizioni al contorno [5], è data dalla

$$u = u_R + \frac{1}{2} (u_L - u_R) \left[1 - \tanh \left(\frac{(u_L - u_R)(x - V_S \vartheta)}{4\nu} \right) \right]$$

e rappresenta bene il transito di un onda d'urto - *shock* - in un fluido viscoso, dove

$$V_S = \frac{u_L + u_R}{2}$$

rappresenta la sua velocità di propagazione, e u_L e u_R , definite

$$u_L = \lim_{x \rightarrow -\infty} u, \quad u_R = \lim_{x \rightarrow \infty} u, \quad u_L > u_R$$

possono venire assunte pari ai valori di u al contorno.

Assumendo pertanto, come condizione iniziale, la soluzione all'istante $\vartheta = 0.2$, si confronti la soluzione analitica con quella ottenuta numericamente, usando il metodo dei Volumi Finiti, considerando lo schema CDS per la discretizzazione spaziale - per ambedue i contributi avvevivo e diffusivo - ed i metodi di Eulero impliciti del primo e second'ordine per l'integrazione temporale. In particolare, si confronti la soluzione numerica con quella analitica, assumendo $\nu = 1 \times 10^{-3}$, per $\vartheta = 0.7, 1.5$, e si considerino i seguenti casi:

1. $N = 250, \Delta t = 0.01;$
2. $N = 500, \Delta t = 0.01;$
3. $N = 1000, \Delta t = 0.01;$
4. $N = 250, \Delta t = 0.001;$
5. $N = 500, \Delta t = 0.001;$
6. $N = 1000, \Delta t = 0.001;$

dove N è il numero di volumi nella discretizzazione spaziale, e Δt è il time-step.

Osservando infine che, utilizzando uno schema di integrazione implicito per un'equazione non-lineare è spesso opportuno (o, meglio, necessario) procedere a *sub-iterazioni* per time-step, si valuti anche l'effetto di queste sull'accuratezza, considerando, ad esempio, 1 (nessuna sub-iterazione), 5 e 10 sub-iterazioni.

Si riportino i risultati in *forma sintetica*, in particolare:

- selezionare alcuni (pochi) casi ritenuti più significativi (ad esempio per illustrare l'effetto della discretizzazione spaziale, o delle sub-iterazioni etc.) e riportarli in forma grafica;
- riassumere tutti i risultati (norma dell'errore) in forma tabellare.

Problem 4

Problem description

Consider the simple 2D grid illustrated in figure 8, taken directly from Chapt. 9 in [6]. The coordinates of the mesh nodes (vertices) are shown in the figure and are also given, for convenience, in table 2.

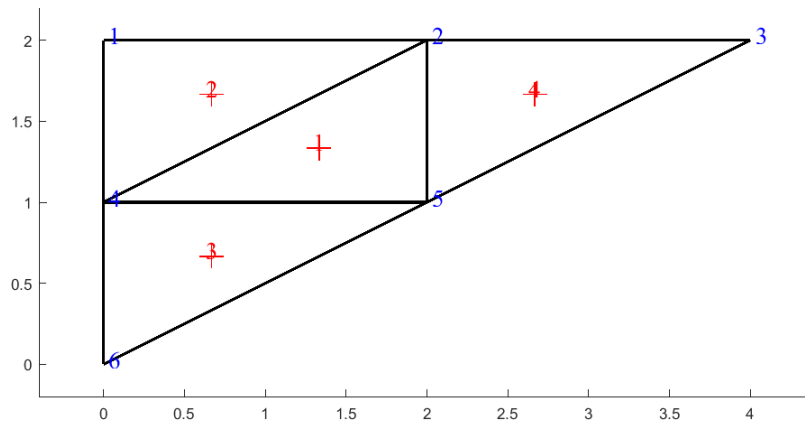


Figura 8: Grid for problem 4.

Node	x	y
1	0.0	2.0
2	2.0	2.0
3	4.0	2.0
4	0.0	1.0
5	2.0	1.0
6	0.0	0.0

Tabella 2: Coordinates of the nodes (vertices) of the grid of figure 8.

The cell definitions are stored in the cell connectivity matrix. This is a matrix of node (vertex) numbers where each row of the matrix contains the connectivity - the nodes - of the corresponding cell. It is given, for this simple case, in table 3.

Cell	Nodes
1	4 2 5
2	4 1 2
3	6 4 5
4	5 2 3

Tabella 3: Cell connectivity for the grid of figure 8.

The temperatures at the cell centroids are given by

$$T(x, y) = 70 (x^3 + y^2 + xy + 5)$$

Question

Compute the gradient at the centroid of cell I using the following two approaches:

1. Cell-based Gauss-Green method (for this problem, since the selected cell faces are mid-way between the centroids of the two attached cells, using weighted interpolation has no effect).
2. Node-based Gauss-Green method.

Compare the results with the exact (analytical) gradient given by

$$\nabla T(x, y) = 70 (3x^2 + y) \mathbf{i} + 70 (2y + x) \mathbf{j}$$

For the calculations it is possible to use either a manual procedure or a computer program. For the latter case, it is useful to develop a code/script (MATLAB, OCTAVE, Scilab or Python recommended) accordingly to the requirements described in problem 4 of Homework 2015-16.

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Comini, G. Cortella, *Fondamenti di trasmissione del calore*, 4a Ed., S.G.E. Editore, (2013).
- [2] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6th Ed., Wiley, (2007).
- [3] A. D. Kraus, A. Aziz, J. Welty, *EXTENDED SURFACE HEAT TRANSFER*, J. Wiley & Sons, (2001).
- [4] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, Academic Press, New York, pp. 171-199, (1948).
- [5] K. Masatsuka, I do like CFD, <http://www.cfdbooks.com/>, 2009.
- [6] F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish, *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction With OpenFOAM and Matlab*, Springer-Verlag, 2015.