Enrico Nobile
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste

Corso di Termofluidodinamica Computazionale

Homework No. 2
AA 2020/2021

March 2021

L'equazione di Burgers

Si consideri l'equazione di Burgers monodimensionale (1D), espressa dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in forma non-conservativa, e dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in forma conservativa.

L'equazione di Burgers, così chiamata in onore dello scienziato Olandese J.M. Burgers [1], è di notevole importanza nello studio di svariati problemi dell'ingegneria, quali, ad esempio. flussi con onde d'urto, propagazione non-lineare delle onde, turbolenza. Essa può essere considerata una versione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes, nella quale, pur essendo presente il termine viscoso ed il termine avvettivo non-lineare, manca il gradiente di pressione e pertanto può venire applicata e studiata a problemi 1D, con ovvi vantaggi in termini di economia di calcolo e la disponibilità - molto rara per problemi non-lineari - di soluzioni in forma analitica.

Problema proposto

Si consideri il problema nel quale le condizioni al contorno, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, siano le seguenti:

$$u = 1 \;\text{ a }\; x = 0 \quad \text{e} \quad u = 0 \;\text{ a }\; x = 1$$

La soluzione analitica, per queste condizioni al contorno [2], è data dalla

$$u = u_R + \frac{1}{2}\left(u_L - u_R\right)\left[1 - \tanh\left(\frac{\left(u_L - u_R\right)\left(x - V_S\,\vartheta\right)}{4\nu}\right)\right]$$

e rappresenta bene il transito di un onda d'urto - *shock* - in un fluido viscoso, dove

$$V_S = \frac{u_L + u_R}{2}$$

rappresenta la sua velocità di propagazione, e u_L e u_R, definite

$$u_L = \lim_{x \to -\infty} u, \quad u_R = \lim_{x \to \infty} u, \quad u_L > u_R$$

possono venire assunte pari ai valori di u al contorno.

Assumendo pertanto, come condizione iniziale, la soluzione all'istante $\vartheta = 0.2$, si confronti la soluzione analitica con quella ottenuta numericamente, usando il metodo dei Volumi Finiti, considerando lo schema CDS per la discretizzazione spaziale - per ambedue i contributi avvettivo e diffusivo - ed i metodi di Eulero impliciti del primo e second'ordine per l'integrazione temporale. In particolare, si confronti la soluzione numerica con quella analitica, assumendo $\nu = 1 \times 10^{-3}$, per $\vartheta = 0.7, 1.5$, e si considerino i seguenti casi:

1. $N = 250$, $\Delta\vartheta = 0.01$;
2. $N = 500$, $\Delta\vartheta = 0.01$;
3. $N = 1000$, $\Delta\vartheta = 0.01$;
4. $N = 250$, $\Delta\vartheta = 0.001$;
5. $N = 500$, $\Delta\vartheta = 0.001$;
6. $N = 1000$, $\Delta\vartheta = 0.001$;

dove N è il numero di volumi nella discretizzazione spaziale, e $\Delta\vartheta$ è il time-step.

Osservando infine che, utilizzando uno schema di integrazione implicito per un'equazione non-lineare è spesso opportuno (o, meglio, necessario) procedere a *sub-iterazioni* per time-step, si valuti anche l'effetto di queste sull'accuratezza, considerando, ad esempio, 1 (nessuna sub-iterazione), 5 e 10 sub-iterazioni.

Si riportino i risultati in *forma sintetica*, in particolare:

- selezionare alcuni (pochi) casi ritenuti più significativi (ad esempio per illustrare l'effetto della discretizzazione spaziale, o delle sub-iterazioni etc.) e riportarli in forma grafica;
- riassumere tutti i risultati (norma dell'errore) in forma tabellare.

Riferimenti bibliografici

[1] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, Academic Press, New York, pp. 171-199, (1948).

[2] K. Masatsuka, I do like CFD, `http://www.cfdbooks.com/`, 2009.