OPERAZIONI FINANZIARIE ALEATORIE E ASSICURAZIONI

In un contratto di assicurazioni contro i danni, l'assicuratore si impegna a risarcire l'assicurato, nei termini stabiliti nel contratto, per i danni che possono colpire il rischio assicurato nel periodo di copertura. A fronte di tale impegno l'assicurato paga il premio, in un'unica soluzione o rateizzato.

Un contratto di assicurazione contro i danni può essere descritto mediante una **operazione finanziaria aleatoria**: uno scambio di importi monetari, con diversi istanti di esigibilità, in un fissato intervallo di tempo.

Sono presenti **elementi di differimento**, tipici delle operazioni finanziarie, e **elementi di aleatorietà**.

L'aleatorietà può riguardare: il numero di pagamenti, l'importo di ogni singolo pagamento e gli istanti di esigibilità.

Dal punto di vista dell'assicuratore, egli incassa il premio (o i premi) e paga una sequenza di importi aleatori legati ai danni provocati dai sinistri che si verificano durante il periodo di copertura.

$$\begin{array}{cccccc} +P & -Y_1 & -Y_2 & & -Y_N & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & T_1 & T_2 & \ldots & T_N & 1 \end{array}$$

P il premio,

N il numero aleatorio di sinistri che colpisono il rischio assicurato nel periodo di copertura (un anno $[0,1]$),

$Y_i \geq 0$ l'importo aleatorio del risarcimento per il sinistro i-esimo,

T_i l'istante aleatorio del pagamento del risarcimento per il sinistro i-esimo.

La prestazione dell'assicuratore dipende dal **numero dei sinistri** che colpiscono il rischio assicurato nel periodo di copertura e dall'**entità del risarcimento** provocato da ogni singolo sinistro.

Si deve tenere conto, oltre che dei **danni diretti**, anche di **danni indiretti** che possono emergere come conseguenze di danni diretti.

Il premio pagato dall’assicurato è basato sulla **valutazione** dei flussi di pagamenti che rappresentano la **prestazione dell’assicuratore**.

Nel valutare la prestazione dell’assicuratore si deve tenere conto

- degli aspetti di differimento,
- degli aspetti di aleatorietà.

Nelle assicurazioni contro i danni, poiché tipicamente la durata del contratto è breve, non si tiene generalmente conto dei differimenti: non si introduce un tasso per attualizzare gli importi esigibili in epoche diverse.

COMPOSIZIONE DEL PREMIO (I)

La componente del premio che valuta la prestazione dell'assicuratore è detta **premio puro** (a fronte delle pure prestazioni) o **netto** (al netto dei caricamenti per spese).

L'assicuratore deve sostenere **spese**, direttamente o indirettamente connesse con il contratto. Es. spese dirette: commissioni di acquisizione; spese indirette: spese generali.

Le spese sono coperte mediante un **caricamento per spese** attribuito a ciascun contratto.

Il premio è poi caricato da un **margine di profitto** (esplicito o implicito).

La struttura del premio è

Premio di tariffa = premio puro + caricamento per spese + margine di profitto

Ci concentriamo sul calcolo del **premio puro**. Assumiamo che il premio sia pagato in un'unica soluzione, alla stipulazione del contratto.

PRINCIPIO DI EQUITA'

Per una data polizza, indichiamo con X il risarcimento totale aleatorio, la prestazione dell'assicuratore, e con P il premio (certo).

Poiché non teniamo conto di aspetti finanziari, possiamo rappresentare l'operazione finanziaria dal punto di vista dell'assicuratore con

$$\begin{array}{ccc} +P & & -X \\ \downarrow & \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \downarrow \\ 0 & & 1 \end{array}$$

e il "guadagno" (il risultato) aleatorio con

$$G = P - X.$$

Il valore atteso del guadagno è

$$E(G) = P - E(X).$$

Se si fissa P in modo tale che

$$E(G) = 0,$$ **principio di equità**,

si ha

$$P = E(X),$$ **premio equo.**

Il premio equo coincide con il valore atteso del risarcimento totale.

Si osservi che, se $E(X)$ rappresenta la valutazione che rispecchia le opinioni dell'assicuratore, il suo stato di informazione, il suo grado di fiducia, il premio P calcolato secondo il principio di equità è privo di interesse economico: l'assicuratore fornirebbe un servizio con un guadagno atteso nullo, fornirebbe un servizio gratuitamente.

Affinché l'assicuratore sia disposto a stipulare il contratto, dovrà essere

$$P > E(X) \quad \Leftrightarrow \quad P = E(X) + m, \quad m > 0.$$

In realtà, come si vedrà, il fatto che il **premio puro** debba essere caricato rispetto al premio equo non è tanto dovuto all'esigenza di ottenere un guadagno atteso positivo, ma ha motivazioni legate ad altri aspetti. In effetti, il premio puro potrà poi essere caricato da un margine di profitto.

L'importo m è detto **caricamento di sicurezza**.

Problemi:

- quale deve essere il valore di m perché l'assicuratore sia disponibile a stipulare il contratto?
- $P > E(X)$ è accettabile dall'assicurato?
- c'è qualche valore di m che rende il contratto vantaggioso per entrambe le parti?

SCELTA TRA OPERAZIONI FINANZIARIE ALEATORIE

Notiamo che il problema di determinare il premio a fronte della prestazione X può essere posto come un problema di scelta tra operazioni finanziarie aleatorie: come deve essere fissato P affinché per l'assicuratore (per il potenziale assicurato) l'operazione finanziaria che descrive il contratto sia preferibile all'operazione che prevede di non stipulare il contratto?

Trattiamo dapprima, più in generale, il problema della scelta tra operazioni finanziarie aleatorie.

Consideriamo un individuo che debba scegliere se attuare o meno una operazione finanziaria aleatoria (1) i cui flussi siano esigibili in un fissato intervallo di tempo $[0, T]$, T certo, potenzialmente aleatori N, $T_1, T_2, \ldots$, $A_1, A_2, \ldots$

(1)

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & A_1 & & A_2 & & & A_N & & \\
\downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_\_\_\_\_ & & \downarrow & \_\_\_\_\_ & \downarrow \\
0 & & T_1 & & T_2 & & \ldots & T_N & & T
\end{array}
$$

Le operazioni finanziarie aleatorie sono complesse da valutare, può essere molto difficile decidere se attuare o meno (1). Per rendere più facilmente trattabile il problema decisionale, si potrebbe porlo come segue.

Sia X' (numero certo o aleatorio) la consistenza patrimoniale del decisore in T, **situazione patrimoniale di riferimento**. Rispetto a questa, la scelta di attuare l'operazione (1) porti al valore X la consistenza patrimoniale del soggetto in T: $(X';T) \xrightarrow{(1)} (X;T)$.

La scelta se attuare o meno (1) può essere trasferita ad un problema di scelta tra i risultati delle due decisioni, ad un problema di scelta tra X' e X: se, per il soggetto,

- X' è "preferibile" a X, egli deciderà di non attare (1),
- X è "preferibile" a X', egli deciderà di attuare (1).

Più in generale, ci può essere il problema di scegliere tra più operazioni finanziarie aleatorie. Ad esempio, sia data una ulteriore operazione finanziaria aleatoria (2):

(2)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & B_1 & & B_2 & & & & B_M & & \\ \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_\_\_\_\_ & & & \downarrow & \_\_\_\_\_ & \downarrow \\ 0 & & S_1 & & S_2 & & \ldots & & S_M & & T \end{array}$$

e sia $(Y;T)$ la conseguente situazione partimoniale del decisore in T, rispetto alla situazione di riferimento $(X';T)$.

La scelta se attuare (1) o (2) o non attuare le due operazioni potrà essere trasferita al problema di scelta tra i risultati delle possibili scelte: X', X, Y. Se, per il soggetto, X' è “preferibile” a X e X' è “preferibile” a Y, egli deciderà di non attare né (1), né (2); …

Allora il problema della scelta tra operazioni finanziarie aleatorie, può essere trasferito nel problema di introdurre un ordinamento di preferibilità nell’insieme delle situazioni patrimoniali che rappresentano le conseguenze di diverse operazioni finanziarie.

Def. Sia $\mathcal{D}$ un insieme di importi aleatori che rappresentano le consistenze patrimoniali di un soggetto, ad una data futura, conseguenti a diverse operazioni finanziarie aleatorie. E' detto **ordinamento di preferibilità** in $\mathcal{D}$ una relazione binaria in $\mathcal{D}$, che indichiamo con $\succcurlyeq$ (se X è in relazione con Y poniamo $X \succcurlyeq Y$ e diciamo **X è preferibile a Y**), che sia

1) completa: $\forall\, X, Y \in \mathcal{D}$, $X \succcurlyeq Y$ o $Y \succcurlyeq X$,
2) riflessiva: $\forall\, X \in \mathcal{D}$, $X \succcurlyeq X$,
3) transitiva: $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{D}$, $X \succcurlyeq Y$ e $Y \succcurlyeq Z$ implica $X \succcurlyeq Z$.

Dato $(\mathcal{D}, \succcurlyeq)$, poniamo $X \not\succcurlyeq Y$ se non è vero che $X \succcurlyeq Y$: X non è in relazione con Y.

Dato $(\mathcal{D}, \succcurlyeq)$, rimangono definite in $\mathcal{D}$ due ulteriori relazioni:

- **preferenza stretta**: se $X \succcurlyeq Y$ e $Y \not\succcurlyeq X$, poniamo $X \succ Y$, **X è strettamente preferibile a Y**,
- **indifferenza**: se $X \succcurlyeq Y$ e $Y \succcurlyeq X$, poniamo $X \sim Y$, **X è indifferente a Y**.

Proprietà. Dato $(\mathcal{D}, \succcurlyeq)$,

(i) $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{D}$, $X \succ Y$ e $Y \sim Z$ implica $X \succ Z$,

(ii) $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{D}$, $X \sim Y$ e $Y \succ Z$ implica $X \succ Z$,

(iii) $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{D}$, $X \succ Y$ e $Y \succ Z$ implica $X \succ Z$,

(iv) l'indifferenza è una relazione di equivalenza in $\mathcal{D}$.

Dim. (i) Fissati $X, Y, Z \in \mathcal{D}$

$$X \succ Y \Leftrightarrow X \succcurlyeq Y \text{ e } Y \not\succcurlyeq X$$

$$Y \sim Z \Leftrightarrow Y \succcurlyeq Z \text{ e } Z \succcurlyeq Y$$

$$\Downarrow$$

$$X \succcurlyeq Z$$

Sia, per assurdo, $Z \succcurlyeq X$. Da $Y \succcurlyeq Z$ e $Z \succcurlyeq X$ segue $Y \succcurlyeq X$, ma per ipotesi $Y \not\succcurlyeq X$. Allora, $X \succ Z$.

(ii)-(iv) per esercizio ■

Scegliere tra operazioni finanziarie aleatorie è molto difficile, ma anche scegliere tra importi aleatori può essere molto difficile.

Richiami. Un insieme $\mathbb{P}$ di eventi è una **partizione dell'evento certo** Ω se gli eventi sono a due a due incompatibili ed esaustivi:

- $\forall\ \omega, \omega' \in \mathbb{P}$, $\omega \neq \omega'$, allora $\omega \wedge \omega' = \phi$ $(\omega \cap \omega' = \phi)$, dove ϕ indica l'evento impossibile,
- $\bigvee_{\omega \in \mathbb{P}} \omega = \Omega$ $(\bigcup_{\omega \in \mathbb{P}} \omega = \Omega)$.

Un **numero aleatorio** o **variabile aleatoria** X è rappresentato da una applicazione definita su una partizione $\mathbb{P}$ dell'evento certo a valori in $\mathbb{R}$:

$$X(\cdot): \mathbb{P} \to \mathbb{R}\text{ , tale che } \omega \in \mathbb{P} \to X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Dato $\omega \in \mathbb{P}$, il valore $X(\omega)$ è la corrispondente realizzazione del numero aleatorio X.

Dati due numeri aleatori X e Y, definiti sulla stessa partizione, riesce $X \geq Y$ se e solo se per ogni $\omega \in \mathbb{P}$, $X(\omega) \geq Y(\omega)$.

Allora, se X e Y rappresentano situazioni patrimoniali e $X \geq Y$, naturalmente X è preferibile a Y.

In generale, può essere difficile confrontare due numeri aleatori.

Dato un numero aleatorio X, la sua valutazione probabilistica è assegnata assegnando la **funzione di ripartizione**

$$F_X(x) = Pr(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La F_X è tale che

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$, perché è una probabilità,
- è monotona non decrescente, perché se $x_1 < x_2$ allora $(X \leq x_1) \rightarrow (X \leq x_2)$, e quindi $Pr(X \leq x_1) \leq Pr(X \leq x_2)$,
- è continua a destra,
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

perché usiamo probabilità σ −additive.

■

INDICI DI PREFERIBILITA’

Per introdurre ordinamenti di preferibilità si può ricorrere a **indici di preferibilità**. Si associa ad ogni elemento di $\mathcal{D}$ una valutazione sintetica rappresentata da un numero reale. Formalmente, si introduce un funzionale

$$\Phi(\cdot): \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

e si pone

$$X \succcurlyeq Y \iff \Phi(X) \geq \Phi(Y).$$

Si confrontano così numeri reali, con l’ordinamento di $\mathbb{R}$.

Segue, $X \succ Y \Leftrightarrow \Phi(X) > \Phi(Y)$ preferenza stretta

$X \sim Y \Leftrightarrow \Phi(X) = \Phi(Y)$ indifferenza

Spesso i funzionali introdotti sono tali che se X e Y hanno la stessa distribuzione di probabilità, $X =^d Y$, allora $\Phi(X) = \Phi(Y)$. Importi ugualmente distribuiti sono giudicati indifferenti.

Nota. Per confrontare elementi complessi è usuale ricorrere ad indici di preferibilità. Ad esempio, in Matematica finanziaria il VAN e il TIR sono criteri che associano ad operazioni finanziarie numero reali.

CRITERIO DELLA SPERANZA MATEMATICA

Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di importi aleatori che rappresentano le situazioni patrimoniali di un decisore.

Per ogni $X \in \mathcal{D}$ esista $E(X)$.

Poniamo

$$X \succcurlyeq Y \iff E(X) \geq E(Y).$$

Può essere giustificato dall'interpretazione della speranza matematica come l'importo certo che l'individuo è disposto a scambiare con il numero aleatorio.

Conseguentemente,

$$X \succ Y \iff E(X) > E(Y),$$
$$X \sim Y \iff E(X) = E(Y).$$

Osservazione. Indichiamo con X' la situazione patrimoniale del soggetto in T e, rispetto a questa, siano X, Y le situazioni patrimoniali conseguenti alla scelta di attuare una operazione finanziaria (1) ed una operazione finanziaria (2), rispettivamente.

Poniamo

- $G_1 = X - X'$, la variazione di situazione patrimoniale derivante dall'operazione (1),
- $G_2 = Y - X'$, la variazione di situazione patrimoniale derivante dall'operazione (2).

Diciamo G_1 e G_2 i **guadagni** derivanti dalle due operazioni, rispetto alla situazione di riferimento.

Risulta

$$X \succcurlyeq Y \;\Leftrightarrow E(X) \geq E(Y) \Leftrightarrow E(X' + G_1) \geq E(X' + G_2) \Leftrightarrow E(G_1) \geq E(G_2).$$

Basta confrontare i valori attesi dei guadagni.

Problema. Consideriamo un individuo esposto ad un rischio che comporti di subire, in un anno, un danno di importo aleatorio X. L'individuo possa stipulare un contratto assicurativo che garantisca il risarcimento totale del danno, verso il pagamento di un premio $P > E(X)$.

Due decisori: il potenziale assicuratore (A) e il potenziale assicurato (a).

(A)	Stipulare il contratto (1)	Non stipulare il contratto (2)
	$G_1^{(A)} = P - X$	$G_2^{(A)} = 0$

Si ha

$$E(G_1^{(A)}) > 0 \quad \text{e} \quad E(G_2^{(A)}) = 0.$$

Allora, per (A) è preferibile stipulare il contratto.

Si noti: basta che sia $P > E(X)$, anche di poco.

(a) Stipulare il contratto (1) | Non stipulare il contratto (2)

$$G_1^{(a)} = -P - X + X = -P \qquad\qquad G_2^{(a)} = -X$$

Si ha

$$E(G_1^{(a)}) = -P \quad \text{e} \quad E(G_2^{(a)}) = -E(X),$$

$$E(G_2^{(a)}) > E(G_1^{(a)}) \,.$$

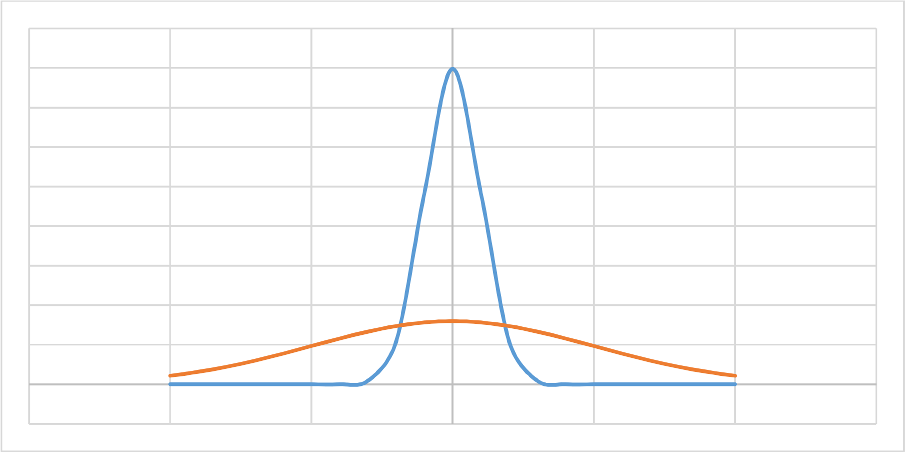
Allora, per (a) è preferibile non stipulare il contratto.

Si noti: basta che sia $P > E(X)$, anche di poco.

L’esempio illustra la carenza del criterio della speranza matematica per spiegare i comportamenti dei decisori in ambito assicurativo.

La carenza deriva dal fatto che

- la speranza matematica è solo un indice posizionale: distribuzioni molto diverse possono avere lo stesso valore atteso,



- nel confronto svanisce la situazione patrimoniale di riferimento $E(X' + G_1) \geq E(X' + G_2) \Leftrightarrow E(G_1) \geq E(G_2)$,
- non si tiene conto di altri aspetti legati al decisore.

CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA

Una teoria economica, sviluppata da von Neumann e Morgenstern (1947), descrive come un decisore sceglie tra situazioni incerte. Si postula che il decisore attribuisca un valore $u(w)$ alla sua ricchezza w, dove $u(\cdot)$ è detta funzione di utilità del decisore. Poiché maggiore ricchezza comporta maggiore utilità, la funzione $u(\cdot)$ è strettamente crescente.

Per scegliere tra due importi aleatori X e Y, il decisore confronta le **utilità attese** di X e Y, $E[u(X)]$ con $E[u(Y)]$ e sceglie l'importo aleatorio che ha maggiore utilità attesa.

Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di importi aleatori che rappresentano le situazioni patrimoniali di un decisore.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo che contiene tutte le determinazioni dei numeri aleatori di $\mathcal{D}$.

Sia $u(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente e continua, legata al decisore, che diciamo **funzione di utilità del decisore**.

Poniamo

$$X \succcurlyeq Y \;\Leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)] \;.$$

Segue,

$$X \succ Y \;\Leftrightarrow E[u(X)] > E[u(Y)],$$

$$X \sim Y \;\Leftrightarrow E[u(X)] = E[u(Y)].$$

Si prova che l'ordinamento di preferibilità soddisfa proprietà ritenute auspicabili, che traducono comportamenti di decisori razionali nel confrontare importi aleatori.

Notiamo che, data $u(\cdot)$, se $v(\cdot) = au(\cdot) + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora

$$X \succcurlyeq Y \quad \Leftrightarrow \quad E[u(X)] \geq E[u(Y)] \quad \Leftrightarrow \quad E[v(X)] \geq E[v(Y)].$$

Le due funzioni $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, introducono/rappresentano lo stesso ordinamento di preferibilità.

Un ordinamento di preferibilità è dunque individuato da una classe di funzioni di utilità: $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ appartengono alla classe se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, tali che $v(\cdot) = au(\cdot) + b$.

Proprietà. Sono soddisfatte le seguenti proprietà

- $X =^d Y \quad \Rightarrow \quad E[u(X)] = E[u(Y)] \quad \Rightarrow \quad X \sim Y$
- $X \succcurlyeq Y$ e $X =^d X'$, $Y =^d Y' \quad \Rightarrow \quad X' \succcurlyeq Y'$
- $a, b \in \mathcal{D}$, a, b numeri certi $\Rightarrow$
  $a > b \quad \Leftrightarrow \quad u(a) > u(b) \quad \Leftrightarrow \quad a \succ b \qquad (a < b \Leftrightarrow a \prec b), \qquad (a = b \Leftrightarrow a \sim b)$
- $X \geq Y \Rightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)] \Rightarrow X \succcurlyeq Y \qquad (X > Y \Rightarrow E[u(X)] > E[u(Y)] \Rightarrow X \succ Y).$

Sia X' la situazione patrimoniale del soggetto in T e, rispetto a questa, sia X la situazione patrimoniale conseguente alla scelta di attuare una fissata operazione finanziaria:

- se $X \succ X'$ diremo che l'**operazione è vantaggiosa**
- se $X' \succ X$ diremo che l'**operazione è svantaggiosa**
- se $X \sim X'$ diremo che l'**operazione è indifferente**

D'ora in avanti, supponiamo che l'insieme $\mathcal{D}$ contenga gli importi certi e i numeri aleatori semplici su I.

Def. Dato $(\mathcal{D}, \succcurlyeq)$ e $X \in \mathcal{D}$, si dice **equivalente certo** di X un numero certo $M \in \mathcal{D}$ tale che $M \sim X$. In termini di utilità, $E[u(M)] = u(M) = E[u(X)]$.

Indichiamo con $M_u(X)$ l'equivalente certo di X per il decisore con funzione di utilità $u(\cdot)$.

Osservazione. Il **patrimonio di riferimento** del decisore sia **certo** w. Sia $u(\cdot)$ la funzione di utilità del decisore.

Consideriamo due operazioni finanziarie (1), (2) e siano $X = w + G_1$, $Y = w + G_2$ le situazioni patrimoniali conseguenti. Si ha

$$E[u(X)] \geq E[u(Y)] \Leftrightarrow E[u(w + G_1)] \geq E[u(w + G_2)] \Leftrightarrow E[u_w(G_1)] \geq E[u_w(G_2)] \,,$$

dove $u_w(x) = u(w + x)$ è detta **funzione di utilità del guadagno**.

Poniamo

$$G_1 \succcurlyeq G_2 \quad \Leftrightarrow \quad E[u_w(G_1)] \geq E[u_w(G_2)] \quad \Leftrightarrow \quad X \succcurlyeq Y,$$

anche se in realtà l'ordinamento è definito in $\mathcal{D}$, non sui guadagni.

Basta confrontare i guadagni, ma il confronto tiene conto sia della situazione patrimoniale di riferimento, sia delle preferenze del decisore. Ben diverso dal caso del criterio della speranza matematica.

AVVERSIONE AL RISCHIO

La funzione identica, $u(x) = x$, può essere scelta come funzioni di utilità. Essendo $E[u(X)] = E(X)$, l'ordinamento che introduce è quello del criterio della speranza matematica.

Dunque non tutti gli ordinamenti che si introducono con il criterio dell'utilità attesa sono adeguati.

Diamo una definizione che traduce un comportamento osservato, in certi ambiti, nelle scelte di decisori razionali: l'avversione al rischio.

Intuitivamente, dato un numero aleatorio X con valore atteso $E(X)$, se $Pr\big(X > E(X)\big) > 0$ e $Pr\big(X < E(X)\big) > 0$, un individuo che non ama il rischio preferisce avere $E(X)$ rispetto a X.

Def. Dato $(\mathcal{D}, \succcurlyeq)$, il decisore è detto **avverso al rischio** se per ogni $X \in \mathcal{D}$, tale che non esista $\bar{x}$ per il quale si abbia $\Pr(X = \bar{x}) = 1$, allora

$$E(X) \succ X \quad \Leftrightarrow \quad u\big(E(X)\big) > E[u(X)].$$

Ovvero si richiede che $E(X) \succ X$ per ogni $X \in \mathcal{D}^* = \mathcal{D} \setminus$ {importi certi o quasi certi}.

Motivazione della restrizione a $\mathcal{D}^*$. Sia $X \in \mathcal{D}$ tale che esista $\bar{x}$ per il quale $\Pr(X = \bar{x}) = 1$, la funzione di ripartizione di X è tale che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < \bar{x} \\ 1 & x \geq \bar{x} \end{cases}$$

Dunque coincide con la funzione di ripartizione del numero certo $\bar{x}$: $X =^d \bar{x}$. Allora,

- $E(X) = E(\bar{x}) = \bar{x}$
- $X \sim \bar{x}$ (gli ordinamenti che trattiamo giudicano indifferenti importi i.d.)

Segue che $E(X) \sim X$. Tale relazione è incompatibile con $E(X) \succ X$.

Avversione al rischio e concavità della funzione di utilità

Sia $(\mathcal{D}, \succcurlyeq)$, con $u(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ una funzione di utilità che rappresenta l'ordinamento e il decisore sia avverso al rischio. Proviamo che $u(\cdot)$ è strettamente concava.

Fissiamo arbitrariamente $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $0 < p < 1$. Posto $q = 1 - p$, consideriamo il numero aleatorio, appartenente a $\mathcal{D}^*$,

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{con probabilità } p \\ x_2 & \text{con probabilità } q \end{cases}$$

Si ha

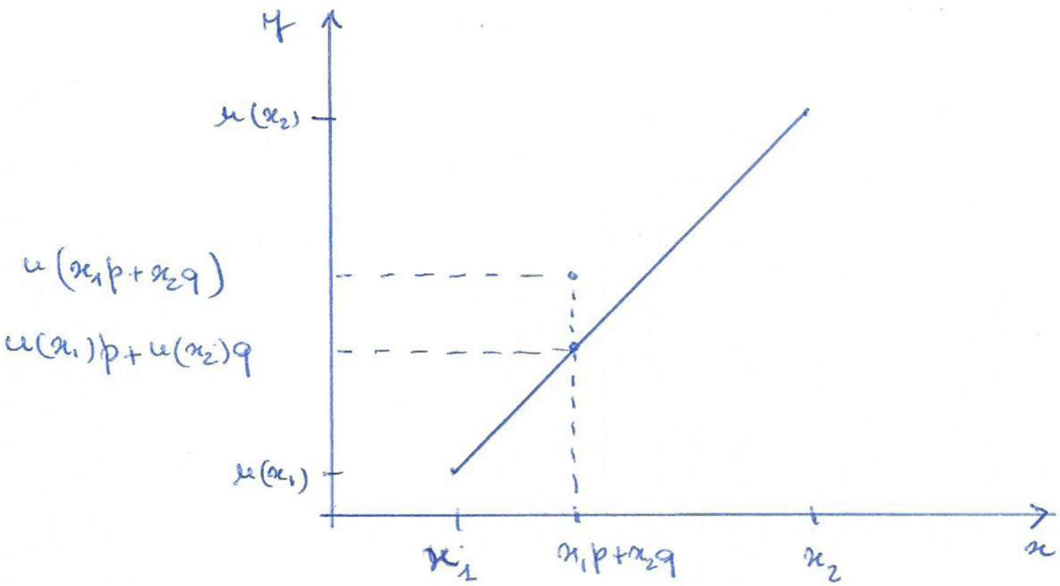
$$E(X) = x_1 p + x_2 q$$

Per l'avversione al rischio,

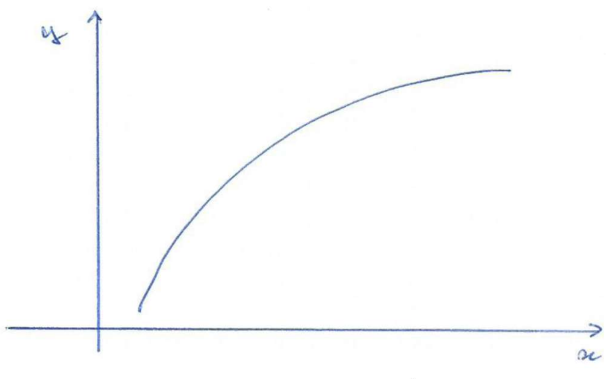
$$E(X) \succ X \quad \Leftrightarrow \quad u\big(E(X)\big) > E[u(X)] \quad \Leftrightarrow \quad u(x_1 p + x_2 q) > E[u(X)]$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x_1 p + x_2 q) > u(x_1)p + u(x_2)q$$

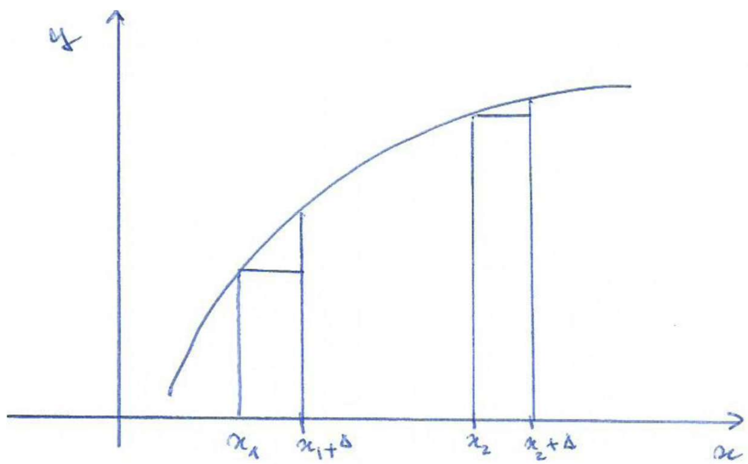
Rappresentiamo $u(x_1 p + x_2 q) > u(x_1)p + u(x_2)q$, con $x_1 < x_2$



Per l'arbitrarietà di $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $0 < p < 1$, segue che la funzione $u(\cdot)$ è **strettamente concava**.



Le funzioni concave hanno **utilità marginale decrescente**.



Si possono introdurre le definizioni di

- **propensione al rischio**: per ogni $X \in \mathcal{D}^*$, $X \succ E(X) \Rightarrow u(\cdot)$ strettamente convessa

- **indifferenza al rischio**: per ogni $X \in \mathcal{D}$, $X \sim E(X) \Rightarrow u(\cdot)$ lineare $\Rightarrow$ criterio della speranza matematica

Nei modelli economici che analizzano decisioni in condizioni di incertezza, generalmente si suppone che i soggetti siano avversi al rischio.

Questa ipotesi consente di spiegare i comportamenti dei decisori in ambito assicurativo.

Avversione al rischio e relazione tra valore atteso e equivalente certo. Premio di rischio

Sia $X \in \mathcal{D}*$. Se il decisore è avverso al rischio, $E(X) \succ X$.

Sia $M_u(X)$ l'equivalente certo di X: $X \sim M_u(X)$.

Allora per una proprietà vista,

$$E(X) \succ M_u(X) \quad \Leftrightarrow \quad E(X) > M_u(X).$$

numeri certi

Per un individuo avverso al rischio, l'equivalente certo di un importo aleatorio è minore del valore atteso.

Posto

$$\Pi_u(X) = E(X) - M_u(X),$$

si ha $\Pi_u(X) > 0$ e

$$E(X) - \Pi_u(X) = M_u(X).$$

Allora,

$$X \sim \left[E(X) - \Pi_u(X)\right], \text{ con } \Pi_u(X) > 0.$$

Def. $\Pi_u(X)$ è detto **premio di rischio** di X per il decisore.

Il premio di rischio di X è l'importo certo, positivo, che un individuo avverso al rischio è disposto a pagare, detraendolo da $E(X)$, per ottenere un importo certo che sia per lui indifferente a X.

Confrontare avversioni al rischio

Consideriamo in $\mathcal{D}$ due ordinamenti di preferibilità:

- $\succcurlyeq_1$ rappresentato dalla funzione di utilità u_1
- $\succcurlyeq_2$ rappresentato dalla funzione di utilità u_2

Ci poniamo il problema di confrontare le avversioni al rischio dei due ordinamenti.

Dalla nozione di premio di rischio è naturale introdurre la seguente

Def. 1. $\succcurlyeq_1$ è **più avverso al rischio** di $\succcurlyeq_2$ se e solo se per ogni $X \in \mathcal{D}^*$ riesce $\Pi_{u_1}(X) > \Pi_{u_2}(X)$.

La precedente definizione non è utile sul piano operativo.

Poiché la funzione di utilità di un individuo avverso al rischio è strettamente concava, si può collegare la maggiore o minore avversione al rischio con la "maggiore o minore concavità".

Def. 2. $\succcurlyeq_1$ è **più avverso al rischio** di $\succcurlyeq_2$ sse u_1 è "più concava" di u_2 se e solo se esiste una funzione strettamente concava φ tale che $u_1 = \varphi \circ u_2$.

Anche tale definizione non è operativa.

Sarebbe utile uno strumento analitico per "misurare" la concavità.

Consideriamo funzioni di utilità che, oltre ad essere strettamente crescenti, continue e strettamente concave, ammettano derivata seconda.

Sia $u(\cdot) : I \to \mathbb{R}$, continua, strettamente crescente, strettamente concava e derivabile fino al secondo ordine. Segue

$$u''(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in I.$$

Potremmo allora pensare di usare la derivata seconda come misura dell'avversione al rischio. Non è una scelta adeguata. Siano

$$u(\cdot),\, v(\cdot) \text{ con } v(\cdot) = au(\cdot) + b, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\,,\ a > 0.$$

Allora, le due funzioni rappresentano lo stesso ordinamento di preferibilità, ma

$$v''(x) = au''(x) \neq u''(x).$$

Per misurare la concavità, si introduce la seguente funzione

$$r_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

detta **funzione di avversione assoluta al rischio** o **indice di Arrow-Pratt**. E' una misura puntuale della concavità relativa. Inoltre, se $v(\cdot) = au(\cdot) + b$, $r_u(x) = r_v(x)$.

Allora si può dare la seguente definizione.

Def. 3. $\succcurlyeq_1$ è **più avverso al rischio** di $\succcurlyeq_2$ se e solo se $r_{u_1}(x) > r_{u_2}(x)$, per ogni $x \in I$.

Si prova che per funzioni di utilità dotate di derivate seconde le tre definizioni sono equivalenti.

Due famiglie di funzioni di utilità

Utilità esponenziale:

$$u(x) = A(1 - e^{-x/A}),\ A > 0.$$

La funzione è strettamente crescente e strettamente concava, e

$$u'(x) = e^{-x/A},$$

$$u''(x) = -\frac{1}{A} e^{-x/A}$$

La funzione di avversione assoluta al rischio è **costante**

$$r_u(x) = \frac{1}{A}$$

Il parametro A è legato all'avversione al rischio.

Nota. $u(0) = 0,\ u'(0) = 1.$ Le funzioni di utilità con queste caratteristiche sono dette **normalizzate**.

Utilità quadratica:

$$u(x) = x - \frac{1}{2b}x^2, \quad b > 0, \quad x \leq b.$$

La funzione è strettamente crescente e strettamente concava, e

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{b}x,$$
$$u''(x) = -\frac{1}{b}$$

La funzione di avversione assoluta al rischio è **crescente**

$$r_u(x) = \frac{1}{b - x}$$

Il parametro b è legato all'avversione al rischio.

La funzione di utilità quadratica è semplice, ma presenta due problemi:

- $x \leq b$, b è detto **livello di saturazione**,
- funzione di avversione al rischio crescente.

Osservazione. Sia $u(\cdot)$ funzione di utilità, esistano $u'(\cdot)$, $u"(\cdot)$, finite, in un intorno U_0 di zero, allora

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{1}{2}u"(0)x^2 + o(x^2), \qquad x \in U_0,$$

con $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$.

Pertanto, $u(\cdot)$ è approssimabile, in un intorno di zero, con una funzione di utilità quadratica.

APPLICAZIONI IN AMBITO ASSICURATIVO

Consideriamo un individuo (a) esposto ad un rischio che comporti di subire, in un anno, un danno di importo aleatorio X. L'individuo possa stipulare un contratto con un assicuratore (A) che comporti il risarcimento totale del danno, verso il pagamento di un premio P.

I due decisori valutino la vantaggiosità del contratto, ipotizzando che le situazioni patrimoniali di riferimento siano certe, w_a, w_A, rispettivamente.

Indichiamo con

- $\succcurlyeq_a$ l'ordinamento di preferibilità di (a), introdotto sui guadagni dalla funzione di utilità del guadagno $u_a(\cdot)$,
- $\succcurlyeq_A$ l'ordinamento di preferibilità di (A), introdotto sui guadagni dalla funzione di utilità del guadagno $u_A(\cdot)$.

I due decisori siano avversi al rischio.

Consideriamo i guadagni dei due decisori a fronte delle due operazioni

	Stipulare il contratto (1)	Non stipulare il contratto (2)
(A)	$P - X$	0
(a)	$-P - X + X = -P$	$-X$

Per (A). Posto $P_e = E(X)$ il premio equo, sia $G_e = P_e - X$. Riesce $E(G_e) = 0$.

Per l'avversione al rischio (trasferita sui guadagni)

$$E(G_e) \succ_A G_e \quad \Leftrightarrow \quad 0 \succ_A G_e$$

Interpretando 0 come il guadagno che deriva da non stipulare il contratto, si conclude che per (A) è svantaggioso stipulare il contratto a premio equo.

Affinché il contratto sia non svantaggioso per (A), P deve essere tale che

$$P - X \succcurlyeq_A \; 0.$$

Il **minimo premio per l'assicuratore** è $\bar{P}$ tale che $\bar{P} - X \sim_A 0$. Infatti,

- $\bar{P} - X \sim_A 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} - X \; \succcurlyeq_A \; 0$

  $\Rightarrow$ il contratto con premio $\bar{P}$ è non svantaggioso,

- $P < \bar{P} \quad \Rightarrow \quad \bar{P} - X > P - X \quad \Rightarrow \quad \bar{P} - X \succ_A P - X$ (v. Propr. ordinamento dell'utilità attesa).

  Allora,

  $0 \sim_A \bar{P} - X$ e $\bar{P} - X \succ_A P - X \quad \Rightarrow \quad 0 \succ_A P - X$ (v. Propr. ordinamento di preferibilità)

  $\Rightarrow$ il contratto con premio P è svantaggioso.

Poniamo P_A^{min} il minimo premio per (A): $P_A^{min} - X \sim_A 0$. Notiamo che

$$P_A^{min} > P_e = E(X).$$

Infatti, si è visto che $0 \succ_A P_e - X$, allora (v. Propr. ordinamento di preferibilità)

$$P_A^{min} - X \sim_A 0 \quad \text{e} \quad 0 \succ_A P_e - X \quad \Rightarrow \quad P_A^{min} - X \succ_A P_e - X.$$

Se fosse $P_A^{min} \leq P_e$, allora

$$P_e - X \geq P_A^{min} - X \quad \Rightarrow \quad P_e - X \succcurlyeq_A P_A^{min} - X$$

(v. Propr. ordinamento dell'utilità attesa), assurdo.

Per (a). Sia $P = P_e$. Si devono confrontare i guadagni

Stipulare il contratto (1)	Non stipulare il contratto (2)
$-P_e$	$-X$

Per l'avversione al rischio

$$E(-X) \succ_a - X \quad \Leftrightarrow \quad -P_e \succ_a - X$$

Per (a) sarebbe vantaggioso il contratto a premio equo, ma non per (A). Tuttavia, la preferenza stretta lascia intuire che (a) sarà disponibile a pagare più del premio equo.

Affinché il contratto sia non svantaggioso per (a), P deve essere tale che

$$-P \succcurlyeq_a -X.$$

Il **massimo premio per l'assicurato** è $\bar{P}$ tale che $-\bar{P} \sim_a -X$. Infatti,

- $-\bar{P} \sim_a -X \quad \Rightarrow \quad -\bar{P} \succcurlyeq_a -X$

  $\Rightarrow$ il contratto con premio $\bar{P}$ è non svantaggioso,

- $P > \bar{P} \quad \Rightarrow \quad -P < -\bar{P} \quad \Rightarrow \quad -\bar{P} \succ_a -P$ (v. Propr. ordinamento dell'utilità attesa).

  Allora,

  $-X \sim_a -\bar{P}$ e $-\bar{P} \succ_a -P \quad \Rightarrow \quad -X \succ_a -P$ (v. Propr. ordinamento di preferibilità)

  $\Rightarrow$ il contratto con premio P è svantaggioso.

Poniamo P_a^{max} il massimo premio per (a): $-P_a^{max} \sim_a - X$. Notiamo che

$$P_a^{max} > P_e = E(X).$$

Infatti, si è visto che $-P_e \succ_a - X$, allora (v. Propr. ordinamento di preferibilità)

$$-P_e \succ_a - X \quad \text{e} \quad -X \sim_a - P_a^{max} \quad \Rightarrow \quad -P_e \succ_a - P_a^{max}$$

$$\Updownarrow$$

$$-P_e > -P_a^{max}.$$

Il contratto è non svantaggioso per (a) anche in presenza di un caricamento rispetto al premio equo, purché il caricamento non sia troppo elevato.

Se $P_a^{max} > P_A^{min}$ c'è un intervallo di valori del premio che rende il contratto non svantaggioso per entrambi i decisori

$E(X)$ P_A^{min} P_a^{max}

L'ipotesi di avversione al rischio dei decisori comporta che, **se il caricamento è fissato in modo conveniente, il contratto è vantaggioso per entrambe le parti**, grazie al caricamento per l'assicuratore, nonostante il caricamento per l'assicurato.

Esempio. E' ragionevole che $P_a^{max} > P_A^{min}$.

Le funzioni di utilità (del guadagno) dei due decisori siano di tipo esponenziale

- $u_A(x) = A(1 - e^{-x/A}), \quad r_A(x) = \frac{1}{A}$
- $u_a(x) = a(1 - e^{-x/a}), \quad r_a(x) = \frac{1}{a}$

E' ragionevole assumere che l'assicuratore sia meno avverso al rischio dell'assicurato:

$$r_a(x) > r_A(x), \forall\, x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{A}$$

- P_A^{min} è P tale che $P - X \sim_A 0$

$$E[u_A(P - X)] = u_A(0) = 0 \iff A\left[1 - E(e^{-(P-X)/A})\right] = 0 \iff E\left(e^{-(P-X)/A}\right) = 1 \iff$$

$$E\left(e^{-P/A}e^{X/A}\right) = 1 \iff e^{-P/A}E\left(e^{X/A}\right) = 1 \iff e^{P/A} = E\left(e^{X/A}\right) \iff \frac{P}{A} = \log E\left(e^{X/A}\right) \iff$$

$$P_A^{min} = A \log E(e^{X/A})$$

- P_a^{max} è P tale che $-P \sim_a -X$

$$u_a(-P) = E[u_a(-X)] \iff a\left[1 - e^{P/a}\right] = a\left[1 - E(e^{X/a})\right] \iff e^{P/a} = E\left(e^{X/a}\right) \iff$$

$$P_a^{max} = a \log E(e^{X/a})$$

Per l'ipotesi $\frac{1}{a} > \frac{1}{A}$, si prova che $P_a^{max} > P_A^{min}$.

Non lo dimostriamo, lo vediamo mediante un'approssimazione.

Richiami. Funzione generatrice dei momenti

Sia $X \geq 0$ un numero aleatorio con funzione di ripartizione F_X. Posto

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbb{R},$$

esiste $E(e^{tX})$, ma può essere finita o $+\infty$.

- Per $t = 0$

$$m_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF_X(x) = 1.$$

- Per $t < 0$, $m_X(t) = E(e^{tX}) \in \mathbb{R}$.
- Per $t > 0$, potrebbe essere $m_X(t) = +\infty, \forall\, t > 0$.

Def. La distribuzione di $X \geq 0$ si dice **dotata di funzione generatrice dei momenti** se esiste un intorno I_0 di 0, tale che

$$m_X(t) \in \mathbb{R}, \qquad t \in I_0.$$

La funzione $m_X(t)$, $t \in I_0$ è detta **funzione generatrice dei momenti** (fgm) della distribuzione (di X).

Sono dotati di funzione generatrice dei momenti i numeri aleatori limitati ($m_X(t) \in \mathbb{R}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$).
Non sono dotati di funzione generatrice dei momenti i numeri aleatori con distribuzioni “a coda pesante”.

Teorema. Se la distribuzione di X è dotata di funzione generatrice dei momenti, allora

- $E(X^n)$ è finito per ogni n,
- $m_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n$, con raggio di convergenza positivo,
- $m_X(t)$ è derivabile in un intorno di 0 e $\left. \frac{d^n}{dt^n} m_X(t) \right|_{t=0} = E(X^n)$.

Proprietà.

1. Se X ha distribuzione dotata di fgm e $a, b \in \mathbb{R}$, allora $aX + b$ è dotato fgm e $m_{aX+b}(t) = e^{tb} m_X(ta)$.
2. Se X, Y hanno distribuzioni dotate di fgm e sono stocasticamente indipendenti, allora $X + Y$ è dotato di fgm e $m_{X+Y}(t) = m_X(t) m_Y(t)$.
3. Se X, Y hanno distribuzioni dotate di fgm e $m_X(t) = m_Y(t)$ in un intorno di 0, allora $X =^d Y$.

Se X ha distribuzione dotata di fgm, $m_X(t)$, $t \in I_0$, la funzione

$$\chi_X(t) = \log m_X(t),\ t \in I_0$$

è detta **funzione generatrice dei cumulanti**. Ammette le derivate di ogni ordine in un intorno di 0. La derivata

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\chi_X(t)\right|_{t=0}$$

è detta **cumulante di ordine *n*** della distribuzione. Riesce $\chi_X(0) = 0$ e

$$\left.\chi_X'(t)\right|_{t=0} = E(X)$$
$$\left.\chi_X''(t)\right|_{t=0} = var(X)$$
$$\left.\chi_X'''(t)\right|_{t=0} = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E(X)^3 = E(X - E(X))^3 = \mu_3(X)$$

Si può considerare

$$\chi_X(t) = \chi_X(0) + \chi_X'(0)t + \tfrac{1}{2}\chi_X''(0)t^2 + o(t^2) = E(X)t + \tfrac{1}{2}var(X)t^2 + o(t^2).$$ ■

Riprendiamo $P_A^{min} = A \log E(e^{X/A})$ e $P_a^{max} = a \log E(e^{X/a})$

$$P_A^{min} = A \log E\left(e^{X/A}\right) = A\,\chi_X(1/A) \cong A\left[E(X)\frac{1}{A} + \frac{1}{2}var(X)\frac{1}{A^2}\right]$$

$$P_A^{min} \cong\; E(X) + \frac{1}{2A}var(X)$$

Analogamente,

$$P_a^{max} \cong\; E(X) + \frac{1}{2a}var(X)$$

Per l'ipotesi $\frac{1}{a} > \frac{1}{A}$,

$$E(X) + \frac{1}{2a}var(X) > E(X) + \frac{1}{2A}var(X).$$

Osservazioni.

Se il minimo caricamento accettabile dall'assicuratore è troppo elevato (per ragioni di concorrenza sul mercato, per vincoli di legge, …) l'assicuratore dovrebbe coerentemente rinunciare al contratto. Se l'assicuratore assume il rischio ad un premio inferiore a quello che dovrebbe essere richiesto, si trova esposto ad un rischio elevato rispetto alla sua avversione al rischio. Può ricorrere a trasferimento del rischio $\Rightarrow$ **riassicurazione**.

I modelli basati sull'utilità attesa hanno prevalentemente importanza "descrittiva": sono utili per giustificare i comportamenti assunti nei problemi decisionali concernenti l'assicurazione (presenza nel premio puro di un caricamento rispetto al premio equo, ricorso alla riassicurazione). Hanno minore importanza operativa.