PRINCIPI DI CALCOLO DEL PREMIO PURO

Sia X il **risarcimento totale per un contratto assicurativo** ovvero per la copertura di un fissato rischio in un fissato intervallo di tempo.

Si è visto che il **premio puro** per il contratto deve essere tale che $P > E(X)$,

$$P = E(X) + m, \quad m > 0,$$

m è detto **caricamento di sicurezza**.

Per come è stato giustificato, m è un caricamento per il rischio. Il termine “caricamento di sicurezza” deriva dal fatto che la sua presenza può essere giustificata anche dall’esigenza di limitare la **probabilità di rovina** con riferimento ad un portafoglio assicurativo: la probabilità di subire perdite dalla gestione del portafoglio.

Vediamo come si può fissare operativamente il caricamento di sicurezza.

Un **principio di calcolo del premio** è una regola, formula, che dice come si deve operare a partire da X e/o dalla sua distribuzione di probabilità per ottenere il premio puro $\Pi(X)$ per X.

Caricamento implicito

Siano

- $E(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x)$ la valutazione "realistica" del valore atteso di X che rispecchia le opinioni dell'assicuratore, il suo stato di informazione, il suo grado di fiducia,
- $E^*(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X^*(x) > E(X)$ il valore atteso di X usando una valutazione **prudenziale**.

Se poniamo

$$\Pi(X) = E^*(X),$$

il premio è **formalmente equo**, equo rispetto alla valutazione prudenziale, $E^*(G) = E^*(\Pi(X) - X) = 0$, ma rispetto alla valutazione realistica garantisce un caricamento:

$$E(G) = \Pi(X) - E(X) = E^*(X) - E(X) > 0.$$

Si ha un **caricamento implicito**.

E' l'approccio usuale nelle assicurazioni sulla durata di vita, dove per il calcolo dei premi si usa una base tecnica del I ordine, favorevole all'assicuratore. Nelle assicurazioni contro danni usualmente il caricamento è introdotto in modo esplicito.

Principio della speranza matematica

$$\Pi(X) = E(X) + \alpha E(X) = (1+\alpha)E(X), \quad \alpha > 0,$$

- il caricamento di sicurezza è proporzionale al valore atteso di X,
- non si tiene conto della dispersione della distribuzione, della rischiosità di X,
- richiede di valutare solo $E(X)$, e di fissare α,
- è semplice, spesso usato nella pratica.

Principio della varianza

$$\Pi(X) = E(X) + \beta var(X), \quad \beta > 0,$$

- il caricamento di sicurezza è proporzionale alla varianza di X,
- poiché la varianza è un indice di dispersione, si tiene conto della dispersione della distribuzione, della rischiosità di X,
- richiede di valutare $E(X)$ e $var(X)$, e di fissare β.

Principio dello scarto quadratico medio

$$\Pi(X) = E(X) + \gamma\sigma(X), \quad \gamma > 0,$$

- il caricamento di sicurezza è proporzionale allo scarto quadratico medio di X,
- analogamente al principio della varianza, si tiene conto della dispersione della distribuzione, della rischiosità di X,
- richiede di valutare $E(X)$ e $var(X)$, e di fissare γ,
- $\sigma(X)$ è dimensionalmente equivalente a $E(X)$, ciò rende il caricamento più facilmente interpretabile.

Principio dell'utilità nulla

$$E[u_A(\Pi(X) - X)] = u_A(0) = 0,$$

dove $u_A(\cdot)$ è la funzione di utilità (del guadagno) dell'assicuratore, supposta normalizzata.
Si ha

- $\Pi(X)$ è il premio che rende indifferente, per l'assicuratore, stipulare il contratto,
- per determinare il premio si deve risolvere un'equazione,
- richiede di valutare la distribuzione di X, e di fissare $u_A(\cdot)$.

Se $u_A(x) = A(1 - e^{-x/A})$, $\Pi(X) = P_A^{min} = A \log E(e^{X/A})$, detto **principio esponenziale**.

Si è visto che

$$P_A^{min} \cong E(X) + \frac{1}{2A} var(X).$$

Se $u_A(x) = x - \frac{1}{2A}x^2,\ x \le A,\ \ \Pi(X) = E(X) + A\left(1 - \sqrt{1 - \frac{var(X)}{A^2}}\right)$.

Ricordiamo che se il decisore ha funzione di utilità quadratica, tutti gli importi che sarà interessato a valutare dovranno essere minori di A.

$$E[u_A(P - X)] = 0 \ \Leftrightarrow\ E\left[(P - X) - \frac{1}{2A}(P - X)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ P^2 - 2P\big(A + E(X)\big) + 2AE(X) + E(X^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_{1,2} = E(X) + A\ \pm \sqrt{(E(X) + A)^2 - \big(2AE(X) + E(X^2)\big)} = E(X) + A\ \pm \sqrt{A^2 - var(X)}$$

Se $0 \le X < A \ \Rightarrow\ X^2 < A^2 \ \Rightarrow\ E(X^2) < A^2 \ \Rightarrow\ var(X) = E(X^2) - E(X)^2 < E(X^2) < A^2$

$$\Rightarrow\ A^2 - var(X) > 0$$

L'equazione ammette due soluzioni, ma quella con "+" è da scartare perché maggiore di A. L'altra è minore di A (segue da $E(X^2) < A^2$):

$$P = E(X) + A - \sqrt{A^2 - var(X)} = E(X) + A\left(1 - \sqrt{1 - \frac{var(X)}{A^2}}\right)$$

Principio del percentile

Consideriamo la probabilità di subire una perdita in relazione al contratto, $Pr(P - X < 0)$, e sia $0 < \varepsilon < 1$ ("piccolo") la probabilità di perdita ritenuta accettabile.

Si determina il minimo premio P tale che

$$Pr(P - X < 0) \leq \varepsilon \iff Pr(X > P) \leq \varepsilon \iff 1 - Pr(X \leq P) \leq \varepsilon \iff F_X(P) \geq 1 - \varepsilon$$

Si pone

$$\Pi(X) = min\{P \mid F_X(P) \geq 1 - \varepsilon\},$$

- $\Pi(X)$ è il $(1-\varepsilon)$-percentile di $F_X(\cdot)$, il VaR (*Value-at-Risk*) di X al livello $1-\varepsilon$,
- richiede di valutare la funzione di ripartizione di X, e di fissare ε.

La scelta di un principio dipende da

- settore di affari,
- i dati disponibili, che sono usualmente utilizzati per stimare i valori caratteristici della distribuzione di X, o l'intera distribuzione, richiesti per l'applicazione di un principio,
- i parametri che devono essere fissati: $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, u_A(\cdot)$,
- le proprietà che un principio soddisfa.

Formalmente, un principio di calcolo del premio è un funzionale definito su un insieme $\mathcal{X}$ di numeri aleatori che rappresentano risarcimenti totali dovuti dall'assicuratore agli assicurati, a valori in $\mathbb{R}_+$,

$$\Pi(\cdot): \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+,$$

tale che, dato $X \in \mathcal{X}$, $\Pi(X)$ è il premio puro per X.

Per tutti i principi introdotti $\Pi(X)$ dipende da X solo attraverso la distribuzione di X: $X =^d Y$ allora $\Pi(X) = \Pi(Y)$.

PROPRIETÀ DEI PRINCIPI DI CALCOLO DEL PREMIO

Elenchiamo alcune proprietà ritenute auspicabili. Per ogni $X, X_1, X_2 \in \mathcal{X}$,

Presenza di un caricamento di sicurezza: $\Pi(X) > E(X)$.

No-ripoff: se M è la massima determinazione possibile di X, allora $\Pi(X) \leq M$.

Invarianza per traslazione: $\Pi(X + c) = \Pi(X) + c$, per ogni numero certo c. Se X è aumentato di un importo certo c, allora anche il premio deve essere aumentato dello stesso importo.

Positiva omogeneità: $\Pi(aX) = a\Pi(X)$, per ogni $a > 0$. E' spesso associato all'indipendenza del premio rispetto all'unità monetaria.

Sub-additività: $\Pi(X_1 + X_2) \leq \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$. Altrimenti sarebbe conveniente per l'assicurato ripartire il rischio $X = X_1 + X_2$. Inoltre, la sub-additività riflette l'idea che i rischi possono essere ridotti mediante diversificazione.

Additività: se X_1, X_2 stocasticamente indipendenti, $\Pi(X_1 + X_2) = \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$. Per la sub-additività, deve sussistere $\Pi(X_1 + X_2) \leq \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$, ma in caso di indipendenza, non c'è un effetto di diversificazione.

Alcune osservazioni per i principi introdotti.

Presenza di un caricamento di sicurezza

Per tutti è soddisfatta la proprietà di presenza di un caricamento di sicurezza, tranne per il principio del percentile: se ε "grande", potrebbe essere $\Pi(X) < E(X)$.

Sub-additività e additività

- **Principio della speranza matematica**

Per l'additività della speranza matematica,

$$\Pi(X_1 + X_2) = E(X_1 + X_2) + \alpha E(X_1 + X_2) = \Pi(X_1) + \Pi(X_2).$$

Sono soddisfatte le proprietà di additività e sub-additività.

- **Principio della varianza**

$$\begin{aligned}\Pi(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2) + \beta var(X_1 + X_2) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \beta(var(X_1) + var(X_2) + 2cov(X_1, X_2)) \\ &= \Pi(X_1) + \Pi(X_2) + 2\beta cov(X_1, X_2)\end{aligned}$$

Se X_1, X_2 sono correlati positivamente, il premio per la somma è maggiore della somma dei premi: non è soddisfatta la proprietà di sub-additività.

E' soddisfatta la proprietà di additività.

- **Principio dello scarto quadratico medio**

$$\Pi(X_1 + X_2) = E(X_1 + X_2) + \gamma\sigma(X_1 + X_2)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(X_1 + X_2) &= \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2cov(X_1, X_2) \\ &= \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2\rho\sigma(X_1)\sigma(X_2), \quad -1 \le \rho \le 1,\end{aligned}$$

$$(\sigma(X_1) + \sigma(X_2))^2 = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2\sigma(X_1)\sigma(X_2)$$

Allora,

$$\sigma^2(X_1 + X_2) \le (\sigma(X_1) + \sigma(X_2))^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma(X_1 + X_2) \le \sigma(X_1) + \sigma(X_2)$$

Si ha uguaglianza se $\rho = 1$.

E' soddisfatta la proprietà di sub-additività.

Non è soddisfatta la proprietà di additività.

COMPOSIZIONE DEL PREMIO (II)

Il **premio puro** è la componente del premio che valuta le pure prestazioni, possiamo vederlo come

premio puro = **premio equo** + **caricamento di sicurezza**.

L'assicuratore deve sostenere **spese** per l'acquisizione e la gestione dei contratti. Tali spese sono coperte trasferendo l'onere ai contraenti, mediante un caricamento del premio. Si ottiene il premio di tariffa (o premio commerciale)

premio di tariffa = **premio equo** + **caricamento di sicurezza** + **caricamento per spese** + **(margine di profitto)**

Il premio che il contraente paga è poi gravato da tasse.

Spese

Classi di spese che sono coperte tramite un caricamento dei premi

- Spese di acquisizione (provvigione all'agente o all'intermediario, altre spese connesse con l'emissione del contratto);
- Altre spese iniziali (provvigioni per incasso premi, emissione quietanze);
- Spese generali e di amministrazione;
- Spese per la liquidazione dei sinistri.

Alcune classi di spese sono direttamente imputabili, altre no.

Nei rami danni, i caricamenti per spese sono rilevanti. Incidono molto le spese di liquidazione dei sinistri:

- per periziare il danno,
- per stabilire se e entro quali limiti il danno spetti all'assicuratore,
- per concordare con la parte danneggiata l'entità dell'indennizzo.

Per il caricamento per spese, nella pratica attuariale, sono spesso applicate regole forfettarie. Tipicamente,

$$(\alpha' + \alpha'' + \beta)P^T \quad \text{o} \quad (\alpha' + \alpha'' + \beta)P$$

dove

- P^T premio di tariffa e P premio puro
- α' un'aliquota in relazione alle provvigioni di acquisizione e altre spese di acquisizione direttamente imputabili,
- α'' un'aliquota in relazione ad altre spese di acquisizione,
- β un'aliquota in relazione a spese generali.

I parametri devono essere valutati in modo che l'incasso dei caricamenti consenta di coprire i valori attesi delle diverse categorie di spese, per un fissato portafoglio di polizze. Dipendono da

- settore d'affari,
- volume del portafoglio,
- condizioni di mercato.