Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: numeri complessi I

Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\,\Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\,\Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Scrivere nella forma $x + iy$ le seguenti espressioni

$$a)\quad \frac{1-i}{(1+i)^2}, \qquad b)\quad \frac{3+4i}{2+3i}, \qquad c)\quad (2+3i)(5-3i)$$

Esercizio 2 Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$a)\quad 1 < \left|\frac{z}{z-i}\right| < 2, \qquad b)\quad \Im m\left(\frac{z}{i\,\bar{z}}\right) \geq 0, \qquad c)\quad z^3|z| = i\bar{z},$$

$$d)\quad z^2 + 2|z|^2 - (\bar{z})^2 = 1 + (\Re e\, z)^2 - 2(\Im m\, z)^2, \qquad e)\quad |iz+1| > |2\bar{z}+i|,$$

$$f)\quad z^4 = i\bar{z}. \qquad g)\quad z^2 - \bar{z}^2 = 2i|z|^2, \qquad h)\quad i\cdot z^4 + \bar{z}\cdot|z|^2 = 0,$$

$$i)\quad |z+\bar{z}| > z\bar{z}, \qquad j)\quad z^5 + i\bar{z}|z| = 0.$$

Esercizio 3 Si determinino le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 + i\,w + z = 0 \\ w - i\,z + 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

a) Si verifichi che l'equazione $z^4 + 2|z|^2 = 1$ ha 8 soluzioni in $\mathbb{C}$.

b) Quanto verificato in *a*) contraddice il teorema fondamentale dell'algebra?

Esercizio 5 Si ponga, per ogni $z \in \mathbb{C}, \setminus\{1\}$ $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}-1}$. Si determini la controimmagine, $f^{-1}(A)$, dell'insieme $A = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.

Esercizio 6 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{i(z+\bar{z})^2}.$$

Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss il dominio di f e l'insieme dei punti nei quali $f(z) > 0$, dopo aver constatato che $f(z)$ assume solamente valori reali.

Esercizio 7 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{|z|-1}{z^2 - i}.$$

Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss il dominio di f e la controimmagine tramite f di 0.

Esercizio 8 Si calcoli l'area del triangolo individuato nel piano di Gauss dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^2}{|z|} = i|z|\bar{z}.$$

Soluzioni: (Qui $z = x + iy = \rho\, e^{i\vartheta}$.)

1. a) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; b) $\frac{18}{13} - \frac{i}{13}$; c) $19 + 9i$.

2. a) $y > \frac{1}{2}$ e $x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 > \frac{4}{9}$. b) $|y| \geq |x|$. c) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi + 4k\pi}{8}, k = 0, 1, 2, 3$. d) $\pm i\frac{1}{2}, \pm 1$. e) $x^2 + (y - \frac{1}{3})^2 < \frac{1}{9}$. f) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi + 4k\pi}{10}, k = 0, 1, 2, 3, 4$. g) $y = x$. h) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi + 4k\pi}{10}, k = 0, 1, 2, 3, 4$. i) $(x + 1)^2 + y^2 < 1$ oppure $(x - 1)^2 + y^2 < 1$. j) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{-\pi + 4k\pi}{12}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

3. $(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}+2}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

4. Le soluzioni sono $e^{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ e $\sqrt{\sqrt{2} - 1}e^{k\frac{\pi}{2}}$, con $k = 0, 1, 2, 3$.

5. $\{\frac{1}{2} + i\,t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

6. $dom f = \{z \in \mathbb{C} \mid x \neq 0\}$, $f(z) > 0$ se e solo se $xy > 0$.

7. $dom f = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{e^{i\vartheta} \mid \vartheta \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

8. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.