Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: integrazione in campo complesso e teorema di Cauchy

Dott. Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\,\Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\,\Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Sia C la circonferenza unitaria di centro 0 percorsa in verso antiorario. Si calcolino gli integrali:

a) $\displaystyle\int_C \overline{z}\, dz,$ b) $\displaystyle\int_C \frac{1+z}{\overline{z}}\, dz.$

Esercizio 2 Sia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3, \Im m\, z \geq 0\}$ e si indichi con $\sqrt{z}$ la determinazione principale della radice.

a) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_C \sqrt{z}\, dz.$

b) Si provi che $\displaystyle\left|\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}\, dz\right| \leq \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}.$

c) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} + \frac{4}{z-4}\right) dz$, con $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3\cos(t) + i\,\mathrm{sen}\,(t)$.

Soluzioni:

1. a) $2\pi i$. b) 0.
2. a) $-2\sqrt{3}(1+i)$. b) Si osservi che $|z| = 3$, $|\sqrt{z}| = \sqrt{3}$, $|z^2+1| \geq 8$ e la lunghezza di C è 3π. c) $6\pi i$.