Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Singolarità e residui.

Prof. Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\,\Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\,\Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Si determinino i punti singolari isolati delle funzioni seguenti e si stabilisca se sono eliminabili, poli o essenziali.

a) $\mathrm{tg}\,(\frac{1}{z})$; b) $\frac{1}{\mathrm{senh}\,(\frac{1}{z})}$; c) $\frac{\mathrm{sen}\, z}{(\pi - z)^2}$; d) $\frac{e^z - 1}{z^2\,\mathrm{sen}\,(z^2)}$;

e) $\frac{1}{z}\int_0^z e^{-t^2}\, dt$ (indichiamo con $\int_0^z e^{-t^2}\, dt$ il prolungamento analitico della funzione di variabile reale $h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$).

Esercizio 2 Sia $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ (g e h analitiche) e supponiamo che h abbia uno zero semplice in z_0 e che $g(z_0) \neq 0$. Si provi che $Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Esercizio 3 Si classifichino le singolarità delle seguenti funzioni e si calcoli il residuo relativo.

a) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z}$; b) $\mathrm{senh}\,(\frac{1}{z})$; c) $\frac{z\cos z}{\mathrm{sen}\, z}$; d) $\frac{e^z}{z^2 - 5z + 6}$; e) $\frac{z+1}{(z^2+4)^2}$; f) $\frac{e^{i\pi z}}{16 - z^4}$.

Esercizio 4 Siano f e g funzioni con una singolarit isolata in z_0. Si provi che $Res(f + g, z_0) = Res(f, z_0) + Res(g, z_0)$.

Esercizio 5 Sia f una funzione con un polo semplice in z_0 e residuo $Res(f, z_0) = R$. Si provi che la funzione $g(z) = f(z) - \frac{R}{z - z_0}$ presenta in z_0 una singolarità eliminabile.

Esercizio 6 Sia f una funzione con un polo semplice in $z_0 \neq 0$ e residuo $Res(f, z_0) = R$. Si consideri la funzione $g(z) = zf(z^2)$. Si provi che $Res(g, \sqrt{z_0}) = \frac{R}{2}$.

Soluzioni:

1. a) $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, poli semplici; 0 non è isolato. b) $z = \frac{1}{ik\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, poli semplici; 0 non è isolato. c) $z = \pi$ polo semplice. d) $z = \pm\sqrt{k\pi}$, con $k \in \mathbb{N}^+$, poli semplici; $z = \pm i\sqrt{-k\pi}$, con $-k \in \mathbb{N}^+$, poli semplici; $z = 0$ polo triplo. e) $z = 0$ singolarità eliminabile.

2. $Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) \cdot \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)}$.

3. a) $z = 0$ essenziale; $Res(f, 0) = 1$. b) $z = 0$ essenziale; $Res(f, 0) = 1$. c) $z = 0$ eliminabile; $Res(f, 0) = 0$; $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, poli semplici, $Res(f, k\pi) = k\pi$. d) $z = 2$ e $z = 3$ poli semplici con residui $-e^2$ e e^3, rispettivamente. e) $z = -2i, 2i$ poli doppi con residui $\frac{i}{32}$ e $-\frac{i}{32}$, rispettivamente. f) $z = -2, 2, -2i, 2i$ poli semplici con residui $\frac{1}{32}$, $\frac{-1}{32}$, $\frac{e^{2\pi}}{32}i$ e $-\frac{e^{-2\pi}}{32}i$, rispettivamente.

4. Immediata dalla linearità dell'integrale.

5. Sviluppando in serie di Laurent si ha subito $f(z) = \frac{R}{z - z_0} + g(z)$.

6. $f(z) = \frac{R}{z - z_0} + \Phi(z)$, con Φ analitica. $g(z) = \frac{Rz}{z^2 - z_0} + z\Phi(z^2) = \frac{R}{2}\frac{z}{\sqrt{z_0}}\left(\frac{1}{z - \sqrt{z_0}} - \frac{1}{z + \sqrt{z_0}}\right) + z\Phi(z^2)$.