Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Trasformate di Laplace.

Prof. Franco Obersnel

(Negli esercizi 2 a) e 3 f) si fa uso del fatto che $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ se $\Re e(\alpha) > -1$, dove Γ è la funzione gamma e in particolare $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.)

Esercizio 1 a) Sia f trasformabile con ascissa di convergenza λ_f e sia F la sua trasformata. Si provi che

$$\lim_{\Re e(s)\to+\infty} F(s) = 0$$

e F è limitata in ogni semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re e(s) \geq x_1\}$, con $x_1 > \lambda_f$.

b) Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni trasformabili che converge uniformemente ad una funzione trasformabile f. Si provi che

$$\mathcal{L}\{\lim_{n\to+\infty} f_n\}(s) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\{f_n\}(s).$$

c) Si consideri la serie

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Si stabilisca se si può calcolare la trasformata di Laplace della funzione e^{-t^2} come serie delle trasformate.

Esercizio 2 Si calcoli la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:
a) $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$; b) $f(t) = n$ se $n-1 < t \leq n$ per $n \in \mathbb{N}$.
c) $f(t) = (-1)^{[t]}$ dove $[t] = \max\{n \in \mathbb{N} : t \geq n\}$ è la parte intera di t (onda quadra).
d) $f(t) = \left|\frac{2a}{\pi}\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2a}t\right)\right)\right|$ con $a \in \mathbb{R}^+$; (onda triangolare).

Esercizio 3 Si calcoli l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni:
a) $F(s) = \dfrac{1}{s^3 + a^3}$ con $a \in \mathbb{R}$; b) $F(s) = \dfrac{e^{-as}}{s^2}$ con $a \in \mathbb{R}^+$;
c) $F(s) = \dfrac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2}$; d) $F(s) = \arctan(\dfrac{1}{s})$;
e) $F(s) = \ln\dfrac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$; f) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)\sqrt{s}}$.

Soluzioni:

1. a) Si può portare il limite all'interno dell'integrale usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, essendo $|e^{-st}f(t)| \leq e^{-x_1 t}|f(t)|$. b) Si ha ad esempio $|e^{-st}f_n(t)| \leq |e^{-st}|(|f(t)|+1)$ per n sufficientemente grande. Possiamo allora usare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue. c) No.

2. a) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$. b) $F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1-e^{-s}}$. c) $F(s) = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}$. d) $F(s) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{as}{2}$.

3. a) $f(t) = \frac{1}{3a^2}\left(e^{-at} - e^{\frac{a}{2}t}\cos(\frac{a}{2}\sqrt{3}t) + \sqrt{3}e^{\frac{a}{2}t}\sin(\frac{a}{2}\sqrt{3}t)\right).$) b) $f(t) = (t-a)u(t-a)$. c) $f(t) = e^{-t}\left(t(-\frac{3}{2}\cos t - \sin t) + \frac{5}{2}\sin t\right)$. d) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. e) $f(t) = \frac{1}{t}(e^{3t} + e^{-2t} - 2\cos t)$. f) $f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du$.