

# Metodi Matematici per l'Ingegneria

## Appunti di Analisi Complessa

Prof. Franco Obersnel

3 aprile 2024

### Indice

<b>1</b>	<b>L'insieme <math>\mathbb{C}</math> dei numeri complessi.</b>	<b>2</b>
1.1	Topologia. . . . .	6
1.2	Successioni e serie. . . . .	8
<b>2</b>	<b>Funzioni complesse di variabile complessa.</b>	<b>9</b>
2.1	Limiti e funzioni continue. . . . .	10
2.2	Funzioni olomorfe. . . . .	13
2.3	Ripasso sulle serie di potenze in $\mathbb{C}$ . . . . .	16
2.4	Funzioni analitiche. . . . .	18
<b>3</b>	<b>Integrazione complessa e funzioni analitiche.</b>	<b>21</b>
3.1	Curve in $\mathbb{C}$ . . . . .	21
3.2	Integrale su una curva in $\mathbb{C}$ . . . . .	23
3.3	Il teorema di Cauchy e sue conseguenze. . . . .	27
3.4	Teorema di analiticit� delle funzioni olomorfe. . . . .	31
3.5	Il teorema di Morera. . . . .	32
3.6	Il teorema di Liouville. . . . .	34
3.7	Zeri di una funzione analitica. . . . .	37
<b>4</b>	<b>Punti singolari di una funzione e teoria dei residui.</b>	<b>39</b>
4.1	Classificazione dei punti singolari isolati. . . . .	39
4.2	Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. . . . .	44
4.3	Serie di Laurent. . . . .	46
4.4	Decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici. . . . .	54
4.5	Calcolo di integrali con i residui. . . . .	56

# 1 L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Diremo numero complesso un'espressione del tipo

$$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

dove  $x = \operatorname{Re}(z)$  è detta la parte reale di  $z$ , mentre  $y = \operatorname{Im}(z)$  è detta la parte immaginaria di  $z$ .

L'insieme dei numeri complessi viene indicato con  $\mathbb{C}$ . Definiamo su  $\mathbb{C}$  due operazioni:

- *addizione* :  $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- *moltiplicazione* :  $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Si può verificare che su  $\mathbb{C}$  sono soddisfatte tutte le proprietà di campo (esistenza degli elementi neutri rispetto l'addizione e moltiplicazione, proprietà associative, commutative, distributive, eccetera). L'unica proprietà non banale è quella relativa all'esistenza del reciproco:

**Teorema dell'esistenza del reciproco.** Per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , esiste  $w \in \mathbb{C}$  tale che  $z \cdot w = w \cdot z = 1$ .

Dimostrazione. Consideriamo  $z = x + iy$  e  $w = a + ib$  e imponiamo che  $z \cdot w = 1$

$$z \cdot w = (xa - yb) + i(xb + ya) = 1 + 0i$$

Se  $y = 0$ , cioè  $z \in \mathbb{R}$ , si ha naturalmente  $w = \frac{1}{x}$ . Se  $z$  è immaginario puro, cioè  $x = 0$ ,  $z = iy$ , si ha  $a = 0$  e  $b = -\frac{1}{y}$ , quindi  $w = -i\frac{1}{y}$ . Se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} xa - yb = 1 \\ b = -\frac{y}{x}a \end{cases} &\implies \begin{cases} xa - y(-\frac{y}{x}a) = 1 \\ b = -\frac{y}{x}a \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a(x^2 + y^2) = x \\ b = -\frac{y}{x}a \end{cases} &\implies \begin{cases} a = \frac{x}{(x^2 + y^2)} \\ b = -\frac{y}{(x^2 + y^2)} \end{cases} \end{aligned}$$

da cui la tesi.

Il reciproco di  $z$  verrà indicato con il simbolo  $\frac{1}{z}$  o  $z^{-1}$ . Si ha quindi  $z^{-1} = \frac{x}{(x^2 + y^2)} - i\frac{y}{(x^2 + y^2)}$ .

Una volta verificata l'esistenza del reciproco si può calcolare velocemente il valore del reciproco moltiplicando e dividendo per il coniugato (vedi definizione qui sotto) del numero con il metodo illustrato dall'esempio seguente:

$$z = 3 - 2i,$$

$$z^{-1} = \frac{1}{3 - 2i} \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + i \frac{2}{13}$$

- Diremo *coniugato* del numero complesso  $z = x + iy$  il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

- Diremo *modulo* di un numero complesso  $z = x + iy$  il numero

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Osservazione.  $\mathbb{R}$  può essere immerso in  $\mathbb{C}$ . Ad ogni numero reale  $x$  possiamo associare il numero complesso  $z = x + i \cdot 0$ .

- Osservazione. Non è possibile introdurre una relazione d'ordine su  $\mathbb{C}$  che lo renda un campo-ordinato, perché in ogni campo-ordinato il quadrato di un numero è  $\geq 0$ , mentre  $i^2 = -1$ . Ricordo che un campo ordinato  $F$  è un campo in cui è definita una relazione d'ordine compatibile con le operazioni algebriche, nel senso che valgono le proprietà

$$x < y \longrightarrow x + z < y + z \quad \forall x, y, z \in F$$

$$x < y \longrightarrow x \cdot z < y \cdot z \quad \forall x, y, z \in F, z > 0$$

$$x < y \longrightarrow x \cdot z > y \cdot z \quad \forall x, y, z \in F, z < 0$$

- Piano di Gauss-Argand. È definita in modo naturale una corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi e il piano  $\mathbb{R}^2$ . La corrispondenza è data da  $x + iy \longleftrightarrow (x, y)$ . Un numero complesso  $x + iy$  può quindi essere rappresentato nel piano come il vettore di coordinate  $(x, y)$ . Il piano in questo caso viene detto *piano di Gauss - Argand*. Si osservi che la corrispondenza biunivoca conserva le somme (invece non ha significato il prodotto in  $\mathbb{R}^2$ ); inoltre il modulo  $|z|$  di un numero complesso  $z = x + iy$  corrisponde alla norma  $\|(x, y)\|$  del vettore associato, cioè alla distanza euclidea tra il punto  $(x, y)$  e l'origine degli assi.

- Osservazione. Un numero complesso coincide con il suo coniugato se e solo se è reale. Infatti  $z = \bar{z}$  significa  $x + iy = x - iy$  e quindi  $y = 0$ .

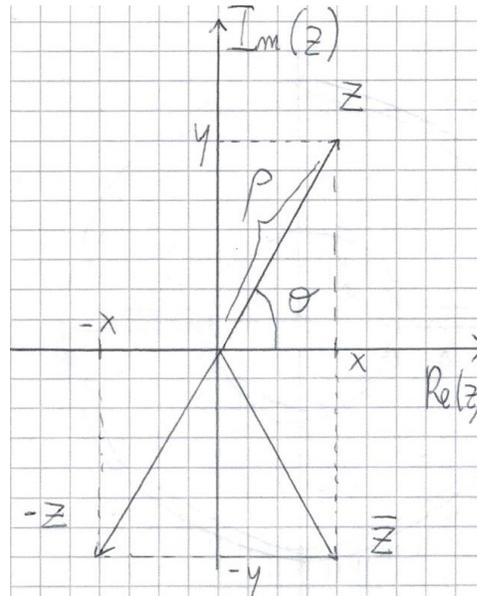
### Proprietà del modulo:

- $|z| \geq 0$  e  $|z| = 0 \iff z = 0, \forall z \in \mathbb{C}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

**Forma polare.** Si può rappresentare un numero complesso con le sue coordinate polari  $[\rho, \theta]$ , dove  $x = \rho \cos(\theta)$  e  $y = \rho \sin(\theta)$ . Scriveremo anche  $z = \rho e^{i\theta}$ .

$\rho = |z|$  è il modulo del numero  $z$ , mentre  $\theta$  si dice un argomento di  $z$ . Se  $z = 0$  non si individua per  $z$  alcun argomento. Notiamo inoltre che se  $\theta$  è un argomento di  $z$  lo è anche  $\theta + 2k\pi$ , per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ . Diremo *argomento principale* di  $z$  l'unico numero  $Arg(z) = \theta \in ]-\pi, \pi]$  che soddisfa  $z = \rho e^{i\theta}$ .

**Forma esponenziale** La scrittura  $z = \rho e^{i\theta}$  viene anche detta forma esponenziale del numero complesso. Questa scrittura è motivata dalla validità della formula di Eulero



$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Anticipiamo la dimostrazione della formula di Eulero (si veda a pagina 16). Supponiamo di aver definito la funzione esponenziale in  $\mathbb{C}$  come somma della serie:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ricordiamo gli sviluppi in serie delle funzioni reali

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Posto  $z = i\theta$  si ottiene

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{2k!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{2k} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta).$$

- Osservazione. Per ogni  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$  si ha  $|z| = |\rho e^{i\theta}| = \rho$ . In particolare,  $|e^{i\theta}| = 1$ .

**Formule di De Moivre.** Siano  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$  due numeri complessi. Si ha allora

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} &= \rho_1 (\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)) \cdot \rho_2 (\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 \left( (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2)) \right. \\ &\quad \left. + i (\cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1) + \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2)) \right) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

- Osservazione. Se  $z = \rho e^{i\theta}$  si ha  $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$ .
- Osservazione. Se  $|z| = 1$ , il reciproco di  $z$  coincide con il suo coniugato.
- Potenza. Per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha  $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ . Infatti, per induzione su  $n$  si ha

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = \rho^n e^{in\theta} \cdot \rho e^{i\theta} = \rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}.$$

**Forma matriciale.** Dato  $z = x + iy$  la forma matriciale di un numero complesso è una rappresentazione come matrice antisimmetrica

$$x + iy \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

La somma di due numeri complessi corrisponde alla somma tra matrici, mentre il prodotto corrisponde al prodotto righe per colonne tra matrici

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ -x_1 y_2 - x_2 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{bmatrix}$$

- Osservazione. La moltiplicazione per un numero complesso di modulo unitario può essere interpretata come una rotazione; se  $|z| = 1$  si ha

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

che corrisponde alla matrice di rotazione di angolo  $\theta$ .

**Radici n-esime di un numero complesso.** Si dice radice  $n$ -esima del numero complesso  $w$  ogni soluzione dell'equazione  $z^n = w$ .

Se  $w = \rho_0 e^{i\theta_0}$ , posto  $z = \rho e^{i\theta}$ , si ha

$$\rho^n e^{in\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0} \implies \begin{cases} \rho^n = \rho_0 \implies \rho = \sqrt[n]{\rho_0} \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \implies \theta = \frac{\theta_0}{n} + 2\frac{k}{n}\pi \end{cases}$$

$$z = \sqrt[n]{\rho_0} \left( \cos\left(\frac{\theta_0}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right) \right) \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Le soluzioni di questa equazione sono esattamente  $n$ . Si osservi che, se  $|w| = 1$ , le  $n$  radici  $n$ -esime di  $w$  nel piano di Gauss-Argand sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati.

**Teorema Fondamentale dell'Algebra.** Sia  $p(z)$  un polinomio di grado  $n \geq 1$ , allora esiste uno zero di  $p(z)$ .

Per il teorema di Ruffini si può facilmente dedurre la seguente versione (equivalente) del teorema.

Sia  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  un polinomio di grado  $n \geq 1$ . Allora il polinomio  $p$  ha esattamente  $n$  zeri, se ciascuno è contato con la rispettiva molteplicità. Cioè esistono  $z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  e  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}^+$  tali che  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$  e

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}.$$

## 1.1 Topologia.

Grazie alla corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  si può introdurre in  $\mathbb{C}$  una struttura di spazio metrico e spazio normato. La norma in  $\mathbb{C}$  è definita dal modulo, mentre la distanza è definita come

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

**Ripasso di definizioni di topologia.** Una palla aperta di centro  $z_0$  e raggio  $r \in \mathbb{R}^+$  è l'insieme definito come  $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ .

Un intorno di un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  è un insieme  $E \subseteq \mathbb{C}$  tale che esiste  $r > 0$  con  $B(z_0, r) \subseteq E$ .

Un punto  $z_0$  si dice interno all'insieme  $E \subseteq \mathbb{C}$  se  $E$  è un intorno di  $z_0$ .

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{C}$  si dice aperto se per ogni  $z \in A$  esiste  $B(z_0, \epsilon) \subset A$  oppure, equivalentemente, se ogni punto di  $A$  è interno ad  $A$ .

Un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  si dice di accumulazione per un insieme  $E$  se per ogni intorno  $V$  di  $z_0$  esiste  $z \in E \cap V$ ,  $z \neq z_0$ .

Un insieme  $E$  si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione, oppure, equivalentemente, se il suo complementare  $\mathbb{C} \setminus E$  è aperto.

Dato  $E \subseteq \mathbb{C}$  si dice chiusura di  $E$  l'insieme definito come

$$E \cup \{\text{insieme dei punti di accumulazione di } E\}$$

oppure, equivalentemente, il più piccolo insieme chiuso che contiene  $E$ .

Un punto  $z_0$  si dice di frontiera per  $E$  se per ogni intorno  $V$  di  $z_0$  esistono  $z_1 \in V \cap E$  e  $z_2 \in V \setminus E$ .

Un insieme  $E$  si dice limitato se esiste una palla  $B(z_0, \epsilon) \supseteq E$  oppure, equivalentemente, se  $diam(E) < +\infty$ , dove il diametro di un insieme  $E$  si definisce come  $diam(E) = \sup\{|z_1 - z_2| < +\infty : z_1, z_2 \in E\}$ . Se  $E = \{z_1\}$  si pone  $diam(E) = 0$ .

Un insieme  $K \subset \mathbb{C}$  si dice compatto se è chiuso e limitato.

**Cenni alla sfera di Riemann.** Supponiamo di avere una sfera di raggio unitario centrata nell'origine di  $\mathbb{R}^3$ , lo spazio dove i punti sono individuati dalle variabili  $x, y, z$ . Il piano  $\mathbb{R}^2$  nelle variabili  $x, y$  può essere pensato come piano di Gauss-Argand. Chiamiamo polo nord della sfera il punto  $(0, 0, 1)$ . Per ogni punto della sfera, ad eccezione del polo nord, si può condurre la retta che passa per il punto e per il polo nord; questa retta interseca il piano di Gauss-Argand in un punto. In questo modo si definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera, tolto il polo nord, e i punti del piano complesso. Aggiungiamo al piano complesso un punto che denotiamo con  $\infty$ . Questo punto corrisponde al polo nord della sfera. Il piano complesso esteso (cioè il piano complesso al quale è stato aggiunto il punto  $\infty$ ) può quindi essere identificato con la sfera, che si dice sfera di Riemann.

Dopo questa premessa si può introdurre il concetto di intorno di infinito in  $\mathbb{C}$ . Diremo palla-aperta di centro infinito e raggio  $M \in \mathbb{R}$  l'insieme  $B(\infty, M) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$ . (Si noti che questo insieme, più che una palla, è il complementare di una palla in  $\mathbb{C}$ ). Diremo intorno di infinito un insieme  $E \subseteq \mathbb{C}$  tale che esiste  $M \in \mathbb{R}$  e  $B(\infty, M) \subseteq E$ .

## 1.2 Successioni e serie.

Una successione in  $\mathbb{C}$  è una funzione  $f : M \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $M$  infinito. La successione si denota con scritte del tipo  $\{z_n\}_n$ , dove  $z_n = f(n)$ . Diremo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l \in \mathbb{C}$  se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \forall n \geq n_\epsilon |z_n - l| < \epsilon$$

oppure, in modo equivalente, se

$$\forall V \text{ intorno di } l \exists n_V : \forall n \geq n_V z_n \in V.$$

**Osservazione.** Una successione  $\{z_n\}_n$ , con  $z_n = x_n + iy_n$  è convergente ad un numero complesso  $\gamma = \alpha + i\beta$  se e solo se sono convergenti ad  $\alpha$  e a  $\beta$  rispettivamente le successioni delle parti reali e immaginarie:  $\{x_n\}_n$  e  $\{y_n\}_n$ .

Infatti si ha

$$|x_n - \alpha| \leq |z_n - \gamma| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

e

$$|y_n - \beta| \leq |z_n - \gamma| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

per ogni  $n$ .

Diremo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$  se per ogni intorno  $V$  di  $\infty$  esiste  $n_V \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq n_V$  si ha  $z_n \in V$ . Questo significa che

$$\forall M \exists n_M : \forall n \geq n_M |z_n| > M.$$

**Teorema di Bolzano-Weierstrass.** Un insieme  $E \subseteq \mathbb{C}$  è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto, ossia se ogni successione  $\{z_n\}_n$  di punti in  $E$  ammette una sottosuccessione  $\{z_{n_k}\}_k$  convergente ad un punto di  $E$ .

**Serie di numeri complessi.** Chiamiamo serie una coppia di successioni  $(\{z_n\}_n, \{s_n\}_n)$ , con  $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$ .  $z_n$  viene detto termine generale della serie,  $s_n$  somma parziale o ridotta  $n$ -esima della serie.

Diremo che una serie è convergente con somma  $l$  se esiste finito il limite della successione delle somme parziali  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = l$ .

• Osservazione. Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché la serie converga è che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ . Il fatto che la condizione non sia sufficiente è

testimoniato ad esempio dalla serie armonica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ .

• Serie assolutamente convergente. Diremo che una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  è assolutamente convergente se è convergente la serie dei moduli:  $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$ .

• Osservazione. Se una serie è assolutamente convergente, allora la serie è convergente. Una serie può essere convergente pur non essendo assolutamente convergente; in questo caso diremo che la serie è semplicemente convergente. Un tipico esempio di serie semplicemente convergente è la serie di Leibniz  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

• Osservazione. Una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ , con  $z_n = x_n + iy_n$  è convergente se e solo se sono convergenti le serie delle parti reali e immaginarie:  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ .

In genere, per studiare il carattere di una serie a termini complessi, vi sono due modi principali. Si può separare parti reale e immaginaria e studiare le due corrispondenti serie a termini reali, oppure si studia la convergenza assoluta.

## 2 Funzioni complesse di variabile complessa.

Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si può decomporre la funzione  $f$  nelle sue parti reale e immaginaria come segue:

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

con  $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Se poi scriviamo  $z = x + iy$  e indichiamo con

$$\tilde{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in E\},$$

si possono considerare le funzioni  $u, v : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

• Esempi:

$$f(z) = z^2; \text{ si ha } u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy.$$

$$f(z) = \frac{1}{z}; \text{ si ha } u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Se pensiamo ai numeri complessi rappresentati in forma polare, la funzione  $f$  può anche essere scritta nella forma

$$f(z) = f(\rho e^{i\theta}) = r(\rho, \theta) \cdot e^{i\varphi(\rho, \theta)}.$$

con

$$r, \varphi : \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty[ \times ] - \pi, \pi] : \rho e^{i\theta} \in E\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$r(\rho, \theta) \geq 0, \varphi(\rho, \theta) \in ] - \pi, \pi].$$

## 2.1 Limiti e funzioni continue.

**Limite di una funzione.** Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$  punto di accumulazione per  $E, l \in \mathbb{C}$ . Diremo che  $l$  è limite di  $f$  per  $z$  che tende a  $z_0$  e scriveremo  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$  se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall z \in E, 0 < |z - z_0| < \delta_\epsilon, |f(z) - l| < \epsilon$$

oppure, equivalentemente,

$$\forall W \text{ intorno di } l \exists U \text{ intorno di } z_0 : \forall z \in U \cap E, z \neq z_0, f(z) \in W.$$

• Osservazione. Valgono tutti i teoremi algebrici sui limiti che non sono legati alla relazione d'ordine; ad esempio il limite della somma, del prodotto, del quoziente, della funzione composta.

**Funzioni continue.** Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in E$ . Diremo che  $f$  è continua in  $z_0$  se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall z \in E, |z - z_0| < \delta_\epsilon, |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Equivalentemente,  $f$  è continua in  $z_0$  se  $z_0$  è isolato in  $E$  oppure  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

**Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite.** Sia  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), l = \alpha + i\beta, z_0 = x_0 + iy_0$  un punto d'accumulazione, allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

se e solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \text{ e } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \beta.$$

Infatti, si ha

$$|u(x,y) - \alpha| \leq |f(x+iy) - l| \leq |u(x,y) - \alpha| + |v(x,y) - \beta|,$$

$$|v(x,y) - \beta| \leq |f(x+iy) - l| \leq |u(x,y) - \alpha| + |v(x,y) - \beta|.$$

Allora, se  $|f(x+iy) - l| < \epsilon$ , si ha  $|u(x,y) - \alpha| < \epsilon$  e  $|v(x,y) - \beta| < \epsilon$ .

Se invece si suppone  $|u(x,y) - \alpha| < \epsilon$  e  $|v(x,y) - \beta| < \epsilon$ , si ha  $|f(x+iy) - l| < 2\epsilon$ .

- Osservazione. Una funzione  $f = u + iv$  è continua se e solo se le sue componenti  $u$  e  $v$  sono continue.

- Osservazione. Somme, prodotti, composte di funzioni continue sono continue. In particolare sono continue tutte le funzioni razionali.

- Osservazione. La funzione modulo è continua, valendo

$$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|.$$

**Esempi di funzioni in  $\mathbb{C}$ .** Fissiamo un numero complesso  $w \in \mathbb{C}$  e definiamo  $f(z) = z + w$ . La funzione  $f$  può essere interpretata nel piano di Gauss-Argand come una traslazione.

Fissiamo un numero complesso  $w \in \mathbb{C}$ ,  $|w| = 1$ , e definiamo  $f(z) = zw$ . La funzione  $f$  può essere interpretata nel piano di Gauss-Argand come una rotazione.

$f(z) = \bar{z}$  può essere interpretata nel piano di Gauss-Argand come una riflessione rispetto all'asse reale.

- Continuità della funzione argomento. Consideriamo la funzione Argomento Principale  $f(z) = \text{Arg}(z)$ , definita su  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La funzione è evidentemente continua su  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , tuttavia non è continua nei punti di  $] -\infty, 0[$ . Infatti, si consideri il punto  $z_0 = x_0 < 0$ . Si ha  $\text{Arg}(z_0) = \pi$ . Si consideri la successione  $z_n = x_0 - \frac{i}{n}$ . Chiaramente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = x_0$ , mentre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arg}(z_n) = -\pi \neq \text{Arg}(\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n)$ .

**Determinazione principale della radice  $n$ -esima.** Consideriamo l'equazione  $w^n = z$ . Abbiamo visto che se  $z \neq 0$  l'equazione ha  $n$  soluzioni: al variare di  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  si ha

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(i \frac{\text{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right).$$

Possiamo quindi definire  $n$  diverse funzioni radice  $n$ -esima; ciascuna di queste si chiama una determinazione della radice, è definita su tutto il campo  $\mathbb{C}$  e ha valori nella regione angolare  $\{w = \rho e^{i\theta} : -\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \theta \leq \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\}$ . Definiamo determinazione principale della radice  $n$ -esima quella che otteniamo per  $k = 0$ , cioè

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(i \frac{\text{Arg}(z)}{n}\right).$$

La determinazione principale della radice  $n$ -esima è cioè la funzione inversa della funzione  $f(w) = w^n$  ristretta alla zona angolare del piano complesso  $\{w = \rho e^{i\theta} : -\frac{\pi}{n} < \theta \leq \frac{\pi}{n}\}$ .

Si osservi che questa funzione è certamente continua dove è continua la funzione  $\text{Arg}(z)$ , quindi in  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ . La funzione è anche continua in 0. Infatti, se  $\lim_{j \rightarrow +\infty} z_j = 0$  si ha  $\lim_{j \rightarrow +\infty} |z_j| = 0$  e quindi  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{z} = 0$ . Invece la funzione non è continua nei punti di  $] -\infty, 0[$ .

**Teorema di Weierstrass.** Sia  $K \subseteq \mathbb{C}$  un insieme compatto,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora esistono il massimo e il minimo di  $f$  in  $K$ .

Si noti che se la funzione  $f$  è a valori complessi, non ha significato parlare di massimo e minimo di  $f$ . Vale invece il seguente:

- Teorema di compattezza. Sia  $f : K \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  continua,  $K$  un insieme compatto. Allora l'insieme immagine  $f(K)$  è compatto.

**Curve in  $\mathbb{C}$ .** Una funzione continua  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I$  intervallo, si dice una curva parametrica in  $\mathbb{C}$ . Si ha

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad x, y : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'immagine  $\Gamma = \gamma(I)$  della funzione si dice *sostegno* della curva.

- Esempi.

La retta (passante per i punti  $z_0$  e  $z_1$ ) può essere parametrizzata da  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ .

Il segmento (congiungente i punti  $z_0$  e  $z_1$ ) può essere parametrizzato da  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ .

La circonferenza di centro  $z_0 \in \mathbb{C}$  e raggio  $R$  può essere parametrizzata da  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ .

**Insiemi connessi.** Un insieme  $E \subseteq \mathbb{C}$  si dice connesso (per archi) se per ogni  $z_0, z_1 \in E$  esiste una curva continua  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\gamma(a) = z_0$ ,  $\gamma(b) = z_1$  e  $\gamma(t) \in E$  per ogni  $t \in I$ .

- Teorema di connessione. Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $f$  continua e  $E$  connesso. Allora  $f(E)$  è connesso.

- Corollario: Teorema di esistenza degli zeri. Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua,  $E$  connesso. Esistano  $z_1, z_2 \in E : f(z_1) < 0, f(z_2) > 0$ . Allora esiste  $z \in E : f(z) = 0$ .

## 2.2 Funzioni olomorfe.

Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $z_0 \in E$  e punto di accumulazione di  $E$ .  $f$  si dice derivabile in  $z_0$  se esiste

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Esempi. La funzione costante ha derivata nulla  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{c-c}{z-z_0} = 0$

La funzione  $f(z) = z$  ha derivata  $f'(z) = 1$ . Infatti  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1$ .

- Osservazione. Tutti i teoremi algebrici visti in  $\mathbb{R}$  valgono anche in  $\mathbb{C}$  (teoremi sulla derivata della somma, del prodotto, del quoziente, della funzione composta). In particolare sono derivabili nel loro dominio tutte le funzioni razionali.

**Teorema (Condizioni di monogenità di Cauchy-Riemann.)** Sia  $f : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ . Sia  $f$  derivabile in  $z_0$ , allora sono verificate le uguaglianze

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

**Dimostrazione.** Sia  $f$  derivabile in  $z_0$ . Allora esiste il limite

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h+ik)-f(z_0)}{h+ik} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x_0+h,y_0+k)+iv(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{h+ik} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{h+ik} + i \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{h+ik} \end{aligned}$$

Il limite deve essere lo stesso indipendentemente dal modo in cui il numero  $h + ki$  tende a zero. Possiamo quindi considerare il caso in cui  $k = 0$ , ottenendo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Oppure possiamo considerare il caso in cui  $h = 0$ , ottenendo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{ik} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{ik} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Si ottiene pertanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

da cui la tesi.

**Osservazione.** Le condizioni di Cauchy-Riemann possono essere descritte in altri modi. Ad esempio, se consideriamo la funzione  $\tilde{f} : \tilde{E} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$ , le condizioni di monogeneità si possono scrivere nel modo seguente

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}.$$

Si osservi poi che, se la funzione è rappresentata in forma polare, vale il seguente risultato.

**Proposizione.** Sia  $f$  derivabile in  $z_0 = \rho_0 e^{i\theta}$ ,  $z_0 \neq 0$ ,  $f(\rho e^{i\theta}) = \hat{f}(\rho, \theta)$ . Allora si ha

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0) = \rho_0 i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0).$$

Infatti, si ha

$$\hat{f}(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + iv(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0) &= u_x(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \cos \theta_0 + u_y(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \\ &+ iv_x(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \cos \theta_0 + iv_y(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \end{aligned}$$

e, osservando che si ha  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$  e  $\frac{1}{i} = -i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0) &= -u_x(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \rho_0 + u_y(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \cos \theta_0 \rho_0 \\ &- iv_x(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \rho_0 + iv_y(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cdot \cos \theta_0 \rho_0 \\ &= \rho_0 i \left( u_x(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cos \theta_0 + u_y(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \sin \theta_0 \right. \\ &\left. + iv_x(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \cos \theta_0 + iv_y(\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0) \sin \theta_0 \right) \\ &= \rho_0 i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0). \end{aligned}$$

Le condizioni di monogeneità sono necessarie ma non sufficienti per la derivabilità della funzione. Vale però il seguente teorema:

**Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$ ,  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Allora  $f$  è derivabile in  $z_0$  se e solo se valgono le due condizioni

- $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$  come campi scalari in  $\mathbb{R}^2$ ;
- valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.

Introduciamo ora una nozione fondamentale per l'analisi complessa.

**Funzioni olomorfe.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$ .  $f$  si dice *olomorfa* in  $z_0$  se esiste un intorno  $U$  di  $z_0$  tale che  $f$  sia derivabile in  $U$ . Una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$  si dice anche una *funzione intera*.

**Esempio.** La funzione  $f(z) = |z|^2$  è derivabile in 0 ma non è olomorfa in 0.

Sono funzioni intere tutti i polinomi. Sono funzioni olomorfe tutte le funzioni razionali. Anche le serie di potenze sono funzioni olomorfe nel loro disco di convergenza.

### 2.3 Ripasso sulle serie di potenze in $\mathbb{C}$ .

Diremo serie di potenze una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con  $a_n \in \mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

L'insieme di convergenza della serie è per definizione l'insieme dei numeri  $z \in \mathbb{C}$  dove la serie converge. L'insieme di convergenza non può essere troppo bizzarro. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema di caratterizzazione dell'insieme di convergenza di una serie di potenze.** Supponiamo che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  converga in  $\bar{z} \neq z_0$ , allora tale serie converge assolutamente in ogni  $z \in \mathbb{C}$  che soddisfa  $|z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$ . Inoltre tale serie è uniformemente convergente in ogni palla chiusa  $\overline{B(z_0, r)}$  con  $r < |\bar{z} - z_0|$ .

In particolare l'insieme di convergenza  $E$  della serie, se non è tutto il campo  $\mathbb{C}$ , è un disco di centro il punto  $z_0$ , che verifica le inclusioni

$$B(z_0, \rho) \subseteq E \subseteq \overline{B(z_0, \rho)}$$

dove  $\rho$  è il raggio di convergenza della serie, definito da

$$\rho = \sup\{|z - z_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ è convergente}\}.$$

Il disco  $B(z_0, \rho)$  viene detto disco di convergenza della serie. Il teorema afferma in particolare che in ogni disco chiuso di raggio strettamente inferiore al raggio di convergenza si ha convergenza uniforme.

*Dimostrazione.* Poiché la serie è convergente in  $\bar{z}$ , la successione  $a_n (\bar{z} - z_0)^n$  è limitata, quindi esiste  $M > 0$  tale che  $|a_n (\bar{z} - z_0)^n| < M$  per ogni  $n$ . Sia

$z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$ , allora

$$|a_n(z - z_0)^n| = \underbrace{|a_n(\bar{z} - z_0)^n|}_{< M} \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - z_0|}\right)^n}_{= k < 1} < Mk^n.$$

Per confronto rispetto a una serie geometrica di ragione  $k < 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  è convergente. Sia ora  $r < |\bar{z} - z_0|$ . Osserviamo che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$  è convergente. Per ogni  $z \in \overline{B(z_0, r)}$  si ha  $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n r^n|$ . Per l'M-test di Weierstrass si conclude che sulla palla  $\overline{B(z_0, r)}$  la serie converge uniformemente.

**Teorema (Derivabilità di una serie di potenze).** Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

una funzione rappresentata come serie di potenze. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

è la serie ottenuta derivando a termine a termine la serie di partenza. Detto  $\rho$  il raggio di convergenza della serie che rappresenta  $f$ , si ha che  $\rho$  è anche il raggio di convergenza della serie delle derivate. Inoltre  $f$  è derivabile all'interno del disco di convergenza e si ha

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

per ogni  $z \in B(z_0, \rho)$ .

Per induzione si può verificare che la funzione  $f$  è di classe  $C^\infty$  su  $B(z_0, \rho)$ , con

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}^+$ .

## 2.4 Funzioni analitiche.

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Diremo che  $f$  è analitica (in  $A$ ) se per ogni  $z_0 \in A$  e per ogni palla  $B(z_0, r) \subseteq A$  esiste una successione  $\{c_n\}_n$  di numeri complessi tali che  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$  per ogni  $z \in B(z_0, r)$ .

Dal paragrafo precedente, sappiamo che una funzione analitica è di classe  $C^\infty$ . Inoltre, si calcolano facilmente i coefficienti della serie:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

La serie così ottenuta si dice anche serie di Taylor di  $f$ .

**Alcune funzioni analitiche importanti.** Definiamo le seguenti funzioni intere

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{l'esponenziale complesso}$$

$$\text{sen}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{il seno complesso}$$

$$\text{cos}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{il coseno complesso}$$

$$\text{senh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{il seno iperbolico}$$

$$\text{cosh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{il coseno iperbolico}$$

- Avendo a disposizione la definizione di esponenziale complesso si può ora dimostrare la validità della formula di Eulero (si veda a pagina 4): per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha).$$

Possiamo anche verificare che la proprietà si estende a ogni numero complesso: per ogni  $z \in \mathbb{C}$  si ha

$$e^{iz} = \cos(z) + i \text{sen}(z).$$

Di conseguenza si ottengono anche le formule

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Dalla definizione si verificano facilmente le seguenti formule:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Si osservi che, in particolare, si ha

$$\cos(z) = \cosh(iz); \quad \text{sen}(z) = -i \sinh(iz).$$

- Si può dimostrare la seguente fondamentale proprietà dell'esponenziale: per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  si ha

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

La dimostrazione non è difficile ma richiede qualche manipolazione delle serie. Vedremo in seguito (pag. 38) una dimostrazione molto più semplice che utilizza il prolungamento analitico.

- Grazie alla proprietà descritta si ottiene inoltre

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \text{sen}(y))$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

- Si osservi che l'esponenziale complesso è una funzione periodica di periodo  $2\pi i$ . Infatti

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$$

- Si può dimostrare che, per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

- Si possono verificare facilmente le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} D(e^z) &= e^z & D(\text{sen } z) &= \cos(z) & D(\cos z) &= -\text{sen}(z) \\ D(\sinh z) &= \cosh(z) & D(\cosh z) &= \sinh(z) \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \text{sen}(z_1)\text{sen}(z_2) \\ \text{sen}(z_1 + z_2) &= \text{sen}(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\text{sen}(z_2) \end{aligned}$$

- In particolare valgono le identità

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + iy) &= \operatorname{sen}(x) \operatorname{cosh}(y) + i \operatorname{cos}(x) \operatorname{senh}(y); \\ \operatorname{cos}(x + iy) &= \operatorname{cos}(x) \operatorname{cosh}(y) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(y); \\ \operatorname{senh}(x + iy) &= \operatorname{senh}(x) \operatorname{cos}(y) + i \operatorname{cosh}(x) \operatorname{sen}(y); \\ \operatorname{cosh}(x + iy) &= \operatorname{cosh}(x) \operatorname{cos}(y) + i \operatorname{senh}(x) \operatorname{sen}(y).\end{aligned}$$

- Osserviamo che continua a valere la relazione fondamentale

$$(\operatorname{sen} z)^2 + (\operatorname{cos} z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

infatti

$$(\operatorname{sen} z)^2 + (\operatorname{cos} z)^2 = -\frac{e^{2iz} - 2e^{-iz}e^{iz} + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{-iz}e^{iz} + e^{-2iz}}{4} = 1$$

e similmente si verifica l'identità

$$(\operatorname{cosh} z)^2 - (\operatorname{senh} z)^2 = 1.$$

- Esercizio. Si risolva l'equazione  $\operatorname{sen} z = 2$ .

Posto  $z = x + iy$  si ha

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{cosh}(y) + i \operatorname{cos}(x) \operatorname{senh}(y) = 2,$$

da cui

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) \operatorname{cosh}(y) = 2; \\ \operatorname{cos}(x) \operatorname{senh}(y) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deduce che  $\operatorname{cos}(x) = 0$  oppure  $\operatorname{senh}(y) = 0$ , cioè  $y = 0$ . In questo secondo caso, dalla prima equazione si ottiene  $\operatorname{sen}(x) = 2$ , impossibile. Quindi deve essere  $\operatorname{cos}(x) = 0$ . Allora  $\operatorname{sen} x = 1$  oppure  $\operatorname{sen} x = -1$ . Se  $\operatorname{sen} x = -1$ , dalla prima equazione si ottiene  $\operatorname{cosh}(y) = -2$ , impossibile. Quindi necessariamente si ha  $\operatorname{sen} x = 1$  e  $\operatorname{cosh}(y) = 2$ , cioè  $y = \log(2 \pm \sqrt{3})$ . In conclusione le soluzioni sono i numeri

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i \log(2 \pm \sqrt{3}),$$

al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Logaritmo di un numero complesso.** Per ogni  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ , l'equazione  $e^z = w$  ha infinite soluzioni. Infatti, sia  $w = \rho e^{i\theta}$  e scriviamo  $z = x + iy$ . Si vuole risolvere l'equazione

$$e^{x+iy} = \rho e^{i\theta}$$

da cui

$$\begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ , il numero  $z_k = \log \rho + i(\theta + 2k\pi)$  è dunque soluzione.

Si osservi che l'equazione non ha soluzioni se  $w = 0$ .

- Diremo *determinazione principale del logaritmo* il numero

$$\text{Log}(w) = \log(|w|) + i \text{Arg}(w).$$

La funzione  $\text{Log}(w)$  è dunque l'inversa della funzione  $f(z) = e^z$  ristretta all'insieme  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y \leq \pi\}$ .

**ATTENZIONE!** Le usuali proprietà algebriche del logaritmo possono non valere: ad esempio

$$\text{Log}((-1) \cdot (-1)) = \text{Log}(1) = 0;$$

$$\text{Log}(-1) + \text{Log}(-1) = i\pi + i\pi = 2i\pi \neq 0.$$

**Funzioni potenza.** Fissiamo  $w \in \mathbb{C}$ . Per ogni  $z \neq 0$  è possibile definire la potenza  $z^w$  ponendo  $z^w = e^{w \text{Log} z}$ .

### 3 Integrazione complessa e funzioni analitiche.

#### 3.1 Curve in $\mathbb{C}$ .

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  una curva parametrica,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  si dice chiusa se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .
- Una curva  $\gamma$  si dice semplice se non è chiusa ed è iniettiva, oppure se è chiusa e le sue restrizioni agli intervalli  $[a, b[$  e ad  $]a, b]$  sono iniettive. Una curva semplice chiusa viene talvolta detta "circuito" o "laccio".

- Una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  si dice regolare se  $\gamma$  è derivabile e si ha  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ . Una curva regolare è dotata in ogni punto  $\gamma(t_0)$  di retta tangente  $\tau(t) = \gamma(t_0) + t \gamma'(t_0)$ .
- Si dice che una curva  $\gamma$  è la somma (o la concatenazione) di due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  se esiste una parametrizzazione di  $\gamma$  del tipo  $\gamma : I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $\gamma : I_1 \cup I_2$  è un intervallo e

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in I_1, \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in I_2. \end{cases}$$

Scriveremo  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ .

- Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  si dice regolare a tratti se  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$  e  $\gamma_i$  è una curva regolare per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Curve equivalenti.** Sia  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\beta : E = [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ . Diremo che  $\gamma$  e  $\beta$  sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  (un diffeomorfismo è una funzione invertibile,  $C^1$  con inversa  $C^1$ ) tale che

$$\beta(t) = \gamma(\varphi(t)) \quad \forall t \in [c, d].$$

Se  $\varphi'(t) > 0$  per ogni  $t$ , le curve si dicono equiverse, se  $\varphi'(t) < 0$  per ogni  $t$ , le curve si dicono controverse.

- Sia  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva. Diremo curva opposta di  $\gamma$  la curva  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$ .

**Teorema della curva chiusa di Jordan.** Sia  $\gamma$  una curva continua semplice chiusa, con sostegno  $\Gamma = \gamma(I)$ . Allora il complementare di  $\Gamma$  è unione disgiunta di 2 aperti connessi, uno limitato e uno illimitato: l'aperto limitato si dice l'interno di  $\gamma$  e verrà denotato con  $\Gamma_{int}$ , quello illimitato si dice l'esterno di  $\gamma$  e verrà denotato con  $\Gamma_{est}$ .

- (Curve orientate positivamente.) Diremo che una curva semplice chiusa regolare  $\gamma$  è orientata positivamente se la coppia ordinata di vettori definita da  $(\nu, \tau)$  (vettore normale e vettore tangente) è sovrapponibile mediante rotazione con la coppia ordinata dei vettori di base  $(e_1, e_2)$  del sistema di riferimento. La definizione si estende naturalmente alle curve regolari a tratti. Ad esempio, la curva  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $\gamma(t) = e^{it}$  è orientata positivamente, mentre la curva  $\gamma(t) = \sin t + i \cos t$  non lo è.

### 3.2 Integrale su una curva in $\mathbb{C}$ .

Sia  $A$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua.  $\gamma : I \rightarrow A$  una curva regolare. Diremo integrale di  $f$  sulla curva  $\gamma$  il numero

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Se  $I = [a, b]$ ,  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &+ i \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt \end{aligned}$$

Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ,  $\gamma_i$  regolare. Definiamo

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f dz.$$

• Osservazione. Siano  $\gamma$  e  $\beta$  due curve equivalenti. Allora si ha

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\beta} f dz$$

se  $\gamma$  e  $\beta$  sono equiverse,

$$\int_{\gamma} f dz = - \int_{\beta} f dz$$

se  $\gamma$  e  $\beta$  sono controverse.

In particolare  $\int_{-\gamma} f dz = - \int_{\gamma} f dz$ .

• Esempi.

Sia  $f(z) = 1$ ,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  una curva regolare. Allora

$$\int_{\gamma} dz = \int_a^b x'(t) dt + i \int_a^b y'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Sia  $f(z) = 1$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una qualsiasi curva regolare chiusa. Allora

$$\int_{\gamma} dz = \gamma(b) - \gamma(a) = 0.$$

Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ , il cerchio di centro  $z_0$  e raggio  $r$ . Allora

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = 2\pi i.$$

• Osservazione. Se pensiamo al campo complesso come al piano di Gauss-Argand, dobbiamo prestare attenzione alla differenza tra l'integrale complesso su una curva e l'integrale di linea di un campo sulla curva.

In particolare, se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , l'integrale di linea su  $\gamma$  del campo costante  $f(z) = 1$ ,  $\int_{\gamma} ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ , rappresenta la lunghezza della curva, mentre per quanto riguarda l'integrale complesso si ha  $\int_{\gamma} dz = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a)$ .

**Nota.** In questi appunti abbiamo preso in considerazione soltanto curve regolari a tratti. In realtà si può introdurre una definizione più generale di integrale su una curva a variazione limitata utilizzando l'integrale di Stieltjes.

### Principali proprietà dell'integrale.

• Linearità. Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  si ha

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz.$$

• Additività.

$$\int_{\gamma+\beta} f dz = \int_{\gamma} f dz + \int_{\beta} f dz.$$

In particolare  $\int_{\gamma} f dz + \int_{-\gamma} f dz = 0$ .

• Stima del modulo. Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva regolare a tratti e  $f(x + iy) = \tilde{f}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  una funzione continua. Allora si ha

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |\tilde{f}| ds = \int_a^b |\tilde{f}(x(t), y(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Dimostriamo la stima lavorando sui vettori nel piano di Gauss.

Ricordiamo la seguente disuguaglianza, che si può dimostrare utilizzando le proprietà del prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ : sia  $h = (h_1, h_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una funzione integrabile in ogni singola componente, allora  $\left\| \int_I h(t) dt \right\| \leq \int_I \|h\| dt$ .

Infatti, posto  $v = \int_I h(t) dt$ , si ha

$$\begin{aligned} \left\| \int_I h(t) dt \right\|^2 &= \left\langle \int_I h(t) dt, v \right\rangle = \int_I \langle h(t), v \rangle dt \leq \int_I \|h(t)\| \cdot \|v\| dt \\ &= \|v\| \int_I \|h(t)\| dt = \left\| \int_I h(t) dt \right\| \cdot \int_I \|h(t)\| dt. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora la stima. Si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f dz \right| &= \left| \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \right| \\ &= \left\| \left( \int_a^b (ux' - vy') dt, \int_a^b (uy' + vx') dt \right) \right\|_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq \int_a^b \left\| (ux' - vy', uy' + vx') \right\|_{\mathbb{R}^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(u^2x'^2 - 2ux'vy' + v^2y'^2 + u^2y'^2 + 2ux'vy' + v^2x'^2)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(u^2(x'^2 + y'^2) + v^2(y'^2 + x'^2))} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(u^2 + v^2)(y'^2 + x'^2)} dt = \int_a^b |\tilde{f}| |\gamma'(t)| dt = \int_\gamma |\tilde{f}| ds. \end{aligned}$$

**Passaggio del limite sotto il segno integrale.** Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  una curva regolare. Siano  $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funzioni misurabili e supponiamo che la successione  $(f_n)_n$  converga puntualmente quasi ovunque a una funzione  $f$ . Supponiamo inoltre che esista una funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $|f_n(z)| \leq g(z)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e quasi ogni  $z \in A$ . Inoltre esista finito l'integrale

$$\int_\gamma g(z) dz.$$

Allora esistono finiti gli integrali  $\int_\gamma f_n(z) dz$  e  $\int_\gamma f(z) dz$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz.$$

Infatti, la successione di funzioni  $f_n(\gamma(\cdot)) \gamma'(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}$  è dominata dalla funzione integrabile  $g(\gamma(\cdot)) \gamma'(\cdot)$ ; pertanto, si conclude applicando il teorema di Lebesgue.

Per completezza, dimostriamo anche il seguente risultato (che richiede ipotesi più forti rispetto al precedente ma è utilizzabile anche se lavoriamo con l'integrale di Riemann). Siano  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e supponiamo che la successione  $(f_n)_n$  converga uniformemente a una funzione  $f$ . Supponiamo esista finito  $\int_\gamma f_n(z) dz$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora esiste finito  $\int_\gamma f(z) dz$  e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) dz.$$

Infatti, poiché la successione  $f_n$  tende uniformemente a  $f$ , si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_\infty = 0.$$

(Al solito, se  $g$  è una funzione di variabile complessa, indichiamo con  $\tilde{g}$  la funzione corrispondente definita in  $\mathbb{R}^2$ .) Grazie alla linearità e alla stima del modulo, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_n(z) dz - \int_\gamma f(z) dz \right| &= \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z)) dz \right| \\ &\leq \int_\gamma |\tilde{f}_n - \tilde{f}| ds \leq \int_\gamma \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_\infty ds \\ &= \|f_n - f\|_\infty l(\gamma). \end{aligned}$$

(Qui  $\|g\|_\infty = \sup\{|g(z)| : z \in \text{dom } g\}$  è la norma del sup di  $g$ ,  $l(\gamma) = \int_\gamma ds$  è la lunghezza di  $\gamma$ ).

**Funzioni primitivabili e localmente primitivabili.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se esiste una funzione olomorfa  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z \in A$ ,  $f$  si dice *primitivabile* e  $F$  si dice una primitiva di  $f$ .

$f$  si dice *localmente primitivabile* se per ogni  $z_0 \in A$  esiste un intorno  $U$  di  $z_0$  tale che la restrizione di  $f$  a  $U$  è primitivabile; cioè esiste  $F_U : U \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $F'_U(z) = f(z)$  per ogni  $z \in U$ .

Naturalmente ogni funzione primitivabile è localmente primitivabile. Non vale però il viceversa come vedremo fra poco.

- (Caratterizzazione delle primitive.) Sia  $A$  connesso,  $f$  primitivabile e fissiamo una primitiva  $F_0$  di  $f$ . Allora si ha che una funzione  $F$  è una primitiva di  $f$  se e solo se la differenza  $F - F_0$  è costante.

• (Formula di Torricelli-Barrow.) Sia  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua e primitivabile. Sia  $G$  una primitiva di  $f$ . Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  una curva regolare a tratti. Allora

$$\int_{\gamma} f dz = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} G'(z) dz = \int_a^b G'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (G \circ \gamma) dt = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Si osservi in particolare che se  $f$  è continua e primitivabile e  $\gamma$  è chiusa, si ha

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

• Esempio di funzione localmente primitivabile non primitivabile. Consideriamo la funzione continua  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Per l'osservazione precedente  $f$  non è primitivabile. Infatti si è visto che

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0.$$

(Qui  $C$  indica il cerchio unitario di centro 0:  $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C(t) = e^{it}$ )

Sia ora  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Sia  $\operatorname{Re}(z_0) \geq 0$ . Poniamo  $U_+ = B(z_0, r)$  con  $0 < r < |z_0|$ ,  $F_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F_+(z) = \operatorname{Log}(z)$ . Se invece  $\operatorname{Re}(z_0) < 0$  poniamo  $U_- = B(z_0, r)$  con  $0 < r < |z_0|$ ,  $F_- : U_- \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F_-(z) = \log|z| + i\vartheta$ , dove  $z = |z|e^{i\vartheta}$  e  $0 < \vartheta \leq 2\pi$  (si tratta di una determinazione non principale del logaritmo). Si verifica facilmente che  $F'_+(z) = f(z)$  per ogni  $z \in U_+$  e  $F'_-(z) = f(z)$  per ogni  $z \in U_-$ . Pertanto la funzione  $f$  è localmente primitivabile.

### 3.3 Il teorema di Cauchy e sue conseguenze.

Si è visto che l'integrale su una curva chiusa di una funzione primitivabile è sempre nullo. Il teorema di Cauchy mostra che questo è vero per qualunque funzione olomorfa, purché l'interno della curva sia contenuto nel dominio della funzione.

**Teorema di Cauchy.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto e connesso, sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa,  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  una curva chiusa regolare a tratti con sostegno  $\Gamma$ , tale che  $\Gamma_{int} \cup \Gamma \subset A$ . Allora si ha

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

Dimostrazione. Per semplicità dimostriamo il teorema nell'ipotesi semplificata che sia  $f \in C^1(A)$ , ipotesi che ci permette di utilizzare la formula di Gauss-Green per i campi vettoriali. Apparentemente questa ipotesi è più forte che la semplice richiesta “ $f$  olomorfa”. Vedremo in seguito, tuttavia, che ogni funzione olomorfa è in realtà  $C^1$ . Una dimostrazione completa del teorema si può trovare ad esempio nella dispensa del professor G. Tironi. Qui sotto il simbolo  $\langle \xi, \eta \rangle$  denota il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$  tra due vettori  $\xi$  e  $\eta$ ,  $\tau$  il vettore tangente la curva. Se  $g = (X, Y)$  è un campo vettoriale, indichiamo con  $\int_{\Omega} \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\Omega} X dx + Y dy$  l'integrale di linea della componente tangenziale del campo.

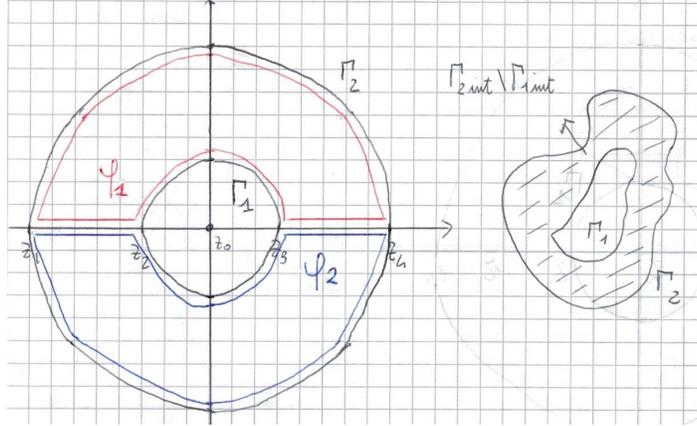
Sia  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Applicando la formula di Gauss-Green e le condizioni di monogeneità si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt \\ &= \int_a^b \langle (u, -v), (x', y') \rangle dt + i \int_a^b \langle (v, u), (x', y') \rangle dt \\ &= \int_{\gamma} \langle (u, -v), \tau \rangle ds + i \int_{\gamma} \langle (v, u), \tau \rangle ds \\ &= \iint_{\Omega} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

**Il teorema dei 2 circuiti.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto e connesso, sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa, siano  $\gamma_1, \gamma_2$  due curve regolari a tratti chiuse con medesima orientazione e con sostegno  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , rispettivamente, tali che  $\Gamma_1 \subset \Gamma_{2int}$  e  $\Gamma_{2int} \setminus \Gamma_{1int} \subset A$ . allora si ha che

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

Dimostrazione.



Sia  $z_0 \in \Gamma_{1int}$  e sia  $r$  una retta che passi per  $z_0$ . Per il teorema di Jordan la retta  $r$  interseca sia  $\Gamma_1$  che  $\Gamma_2$  formando due insiemi compatti (nella figura questi due insiemi sono costituiti ciascuno da due punti; in generale però questi insiemi potrebbero contenere molti più punti e anche essere infiniti). Poniamo  $z_2 = \min \Gamma_1 \cap r$  e  $z_3 = \max \Gamma_1 \cap r$ . Poniamo poi

$$z_1 = \max\{z \in \Gamma_2 \cap r, z < z_2\} \quad z_4 = \min\{z \in \Gamma_2 \cap r, z > z_3\}.$$

Costruiamo il circuito  $\varphi_1$  come segue (la terminologia usata di seguito dovrebbe essere autoesplicativa, per  $\Gamma$  sup / inf si intende la parte del circuito sopra / sotto la retta; si noti il segno  $-$  per le parti di curva prese in verso opposto)

$$[z_1, z_2] + (-\Gamma_1 \text{ sup da } z_2 \text{ fino a } z_3) + [z_3, z_4] + (\Gamma_2 \text{ sup da } z_4 \text{ fino a } z_1)$$

e il circuito  $\varphi_2$  come

$$(\Gamma_2 \text{ inf da } z_1 \text{ fino a } z_4) + (-[z_3, z_4]) + (-\Gamma_1 \text{ inf da } z_3 \text{ fino a } z_2) + (-[z_1, z_2]).$$

Per ipotesi, entrambi i circuiti hanno sostegno in  $A$  e parte interna contenuta in  $A$ . Per il teorema di Cauchy si ha pertanto

$$\int_{\varphi_1} f dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\varphi_2} f dz = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\varphi_1} f dz + \int_{\varphi_2} f dz \\
&= \int_{[z_1, z_2]} f dz - \int_{\gamma_1} \int_{z_2}^{z_3} f dz + \int_{[z_3, z_4]} f dz + \int_{\gamma_2} \int_{z_4}^{z_1} f dz \\
&+ \int_{\gamma_2} \int_{z_1}^{z_4} f dz - \int_{[z_3, z_4]} f dz - \int_{\gamma_1} \int_{z_3}^{z_2} f dz - \int_{[z_1, z_2]} f dz \\
&= \int_{\gamma_2} f dz - \int_{\gamma_1} f dz.
\end{aligned}$$

**Formule integrali di Cauchy.** Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto e connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa,  $\gamma$  un circuito orientato positivamente con sostegno  $\Gamma$ , tale che  $\Gamma, \Gamma_{int} \subset A$ . Allora, per ogni  $z \in \Gamma_{int}$  si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Dimostrazione. Sia  $z \in \Gamma_{int}$  e si prenda  $B(z, r_0) \subset \Gamma_{int}$ . Per ogni  $r$  con  $0 < r \leq r_0$  poniamo  $C_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C_r(t) = z + re^{it}$ . Per il teorema dei due circuiti si ha

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Per la continuità della funzione  $h(t, r) = f(z + re^{it})$  sul compatto  $[0, 2\pi] \times [0, r_0]$  si ha la continuità della funzione integrale  $H(r) = \int_0^{2\pi} h(t, r) dt$ . Pertanto si ottiene

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} f(z) dt = 2\pi f(z)$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = i \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt = i2\pi f(z).$$

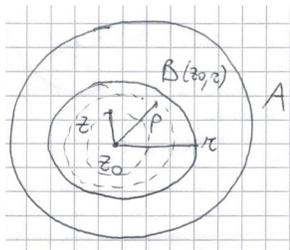
• Dalla dimostrazione del teorema si ottiene il seguente “Teorema della media”: per ogni  $z$  il valore della funzione in  $z$  è caratterizzato dal valore della funzione sul bordo di un intorno: per ogni  $r > 0$  tale che il disco  $B(z, r)$  sia contenuto in  $A$  si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

### 3.4 Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe.

Il teorema che dimostreremo è fondamentale e mostra come le funzioni complesse abbiano comportamenti molto più regolari di quelle reali. Esistono funzioni di variabile reale derivabili  $n$  volte e non  $n + 1$  volte, esistono funzioni di variabile reale di classe  $C^\infty$  ma non sviluppabili in serie di potenze. Vedremo che per una funzione di variabile complessa essere olomorfa è sufficiente per essere analitica. Quindi si ha che una funzione è olomorfa se e soltanto se è analitica.

**Teorema.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto e connesso. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Allora  $f$  è analitica.



Dimostrazione. Sia  $z_0 \in A$  e  $r > 0$  tale che  $B(z_0, r) \subseteq A$ . Fissiamo  $z \in B(z_0, r)$  e un raggio  $\rho$  che soddisfa  $|z - z_0| < \rho < r$ . Consideriamo il cerchio  $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_\rho(t) = z + \rho e^{it}$ . Per la formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (2)$$

Osserviamo che, se  $|\xi - z_0| = \rho$ , si ha

$$\xi - z = \xi - z_0 + z_0 - z = (\xi - z_0) \left( 1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0} \right) \quad (3)$$

con

$$\left| \frac{z_0 - z}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z_0 - z|}{\rho} < 1.$$

Sostituendo l'espressione (3) nella (2) si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Per poter portare la sommatoria fuori dal segno integrale si è usato il fatto che la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$  converge uniformemente nel compatto  $\{\xi : |\xi - z_0| = \rho\}$ .

• Abbiamo dimostrato che la funzione  $f$  è analitica. Inoltre, ricordando l'espressione della serie di Taylor, la formula appena scritta fornisce le formule di Cauchy per le derivate della funzione:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

### 3.5 Il teorema di Morera.

Il teorema di Cauchy afferma che se una funzione è olomorfa, allora vale la “proprietà dei circuiti”, cioè l'integrale della funzione su ogni circuito con interno contenuto nel dominio è nullo. Il teorema di Morera rappresenta una sorta di teorema inverso. Cioè, se la funzione verifica la proprietà dei circuiti, allora è olomorfa.

**Teorema di Morera.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto e connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Inoltre supponiamo che per ogni “triangolo pieno”  $T \subset A$  si ha  $\int_{\partial T} f dz = 0$ . Allora  $f$  è olomorfa.

Dimostrazione. Proviamo che  $f$  è localmente primitivabile in  $A$ . Sia  $z_0 \in A$  e  $B(z_0, \rho) \subseteq A$ . Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  indichiamo con  $[z_1, z_2]$  il segmento  $\gamma$  che congiunge i due punti  $z_1$  e  $z_2$ , cioè  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$ . Per ogni  $z \in B(z_0, \rho)$  poniamo

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi.$$

Proviamo che  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $B(z_0, \rho)$ . Si ha, usando la proprietà dei triangoli nel passaggio dalla seconda alla terza riga,

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(z+h) - F(z)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi + \int_{[z, z+h]} f d\xi - \int_{[z_0, z]} f d\xi \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h dt. \end{aligned}$$

Per il teorema della media integrale esiste  $\vartheta$ , con  $0 \leq \vartheta \leq 1$ , tale che

$$\int_0^1 f(z+th) dt = f(z+\vartheta h) \cdot 1,$$

pertanto si conclude

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(z+th) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(z+\vartheta h) = f(z).$$

Abbiamo dimostrato che  $f$  è primitivabile nella palla  $B(z_0, \rho)$ , con primitiva  $F$ . Quindi la funzione  $F$  è derivabile in  $B(z_0, \rho)$ , cioè olomorfa, e quindi analitica per il teorema di analiticità delle funzioni olomorfe. Perciò anche  $f$  è analitica in  $B(z_0, \rho)$ . Ma allora  $f$  è olomorfa in un intorno di ogni punto di  $A$ , pertanto è olomorfa in  $A$ .

**Teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto e connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $f$  è primitivabile
2. per ogni circuito  $\gamma$ , con sostegno  $\Gamma_\gamma \subset A$ , si ha  $\int_\gamma f dz = 0$
3. per ogni curva regolare a tratti  $\gamma$  con sostegno  $\Gamma \subset A$ , si ha che  $\int_\gamma f dz$  dipende soltanto dagli estremi di  $\gamma$ .

Si noti la somiglianza del teorema con il teorema di caratterizzazione dei campi conservativi. Se la funzione  $f$  è primitivabile in  $A$ , allora esiste  $F : A \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $F'(z) = f(z)$ . Per la formula di Torricelli - Barrow è allora evidente che (1) implica (2) e (3). L'equivalenza tra (2) e (3) è evidente. Se la funzione  $f$  verifica (3), si può costruire una primitiva globale su  $A$  come segue: si fissa un punto  $z_0 \in A$  e si pone

$$F(z) = \int_\gamma f(\xi) d\xi$$

con  $\gamma$  una qualsiasi curva regolare a tratti che congiunge il punto  $z_0$  al punto  $z$ . La definizione non dipende dalla particolare curva scelta per l'ipotesi (3). Si calcola poi la derivata della funzione  $F$  e si ottiene  $F'(z) = f(z)$ .

**Insiemi semplicemente connessi.** Un insieme  $A \subseteq \mathbb{C}$  si dice semplicemente connesso se per ogni circuito  $\gamma$  con sostegno  $\Gamma \subseteq A$  si ha  $\Gamma_{int} \subseteq A$ .

Si osservi che in un insieme semplicemente connesso, la "proprietà dei circuiti" del teorema di Cauchy o del teorema di Morera coincide con la proprietà (3) del teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili. Pertanto, in un insieme semplicemente connesso, le proprietà di una funzione di essere analitica, essere olomorfa, essere primitivabile, essere localmente primitivabile, soddisfare le proprietà dei circuiti, sono tutte equivalenti.

### 3.6 Il teorema di Liouville.

**Disuguaglianze di Cauchy.** Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  e  $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica, con

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Allora valgono le stime

$$|a_n| \leq \max_{z \in \partial B(z_0, r)} \frac{|f(z)|}{r^n}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Infatti, per il teorema di Taylor e per le formule integrali di Cauchy si ha

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} r i e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} r \right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{z \in \partial B(z_0, r)} \frac{|f(z)|}{r^n} dt = \max_{z \in \partial B(z_0, r)} \frac{|f(z)|}{r^n}. \end{aligned}$$

Il teorema che dimostriamo di seguito è notevole; afferma che le uniche funzioni intere limitate sono le costanti!

**Teorema di Liouville.** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione intera limitata. Allora  $f$  è costante.

Dimostrazione. Poiché  $f$  è intera, possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Poiché la funzione è limitata, esiste  $M > 0$  tale che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Per le disuguaglianze di Cauchy si ha

$$|a_n| \leq \max_{z \in \partial B(0, r)} \frac{|f(z)|}{r^n} \leq \frac{M}{r^n}.$$

Prendendo il limite per  $r \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$|a_n| = \lim_{r \rightarrow +\infty} |a_n| \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M}{r^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq 1 \\ M & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Perciò  $a_n = 0$  per ogni  $n \geq 1$  e si conclude  $f(z) = a_0$ .

Una notevole applicazione del teorema di Liouville è la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

**Teorema Fondamentale dell'Algebra.** Sia  $p(z)$  un polinomio di grado  $n \geq 1$ , allora esiste uno zero di  $p(z)$ .

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che  $p$  non abbia zeri. Allora la funzione  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  è definita su tutto  $\mathbb{C}$ , quindi è una funzione intera. La funzione inoltre è limitata valendo  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$ . Pertanto, per il teorema di Liouville,  $f$  è costante, ma allora anche  $p$  è costante, contro l'ipotesi.

**Principio di Massimo.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa,  $\gamma$  un circuito regolare a tratti con  $\Gamma \cup \Gamma_{int} \subset A$ . Sia

$$M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Allora

$$|f(z)| \leq M$$

per ogni  $z \in \Gamma_{int}$ .

Inoltre, se esiste  $z_0 \in \Gamma_{int}$  con  $f(z_0) = M$ ,  $f$  è necessariamente costante e si ha  $f(z) \equiv M$  su  $A$ .

Dimostriamo solo la prima parte. Sia  $z \in \Gamma_{int}$  e denotiamo con  $d$  la distanza tra  $z$  e  $\Gamma$ :  $d = \min\{|z - \xi| : \xi \in \Gamma\}$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione potenza  $(f(z))^k$ , si ha

$$(f(z))^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(\xi))^k}{\xi - z} d\xi.$$

Perciò, denotando con  $\ell(\gamma)$  la lunghezza della curva  $\gamma$ , si ha

$$\left| (f(z))^k \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M^k}{d} ds = M^k \frac{\ell(\gamma)}{2\pi d};$$

$$|f(z)| \leq M \left( \frac{\ell(\gamma)}{2\pi d} \right)^{\frac{1}{k}}$$

e, prendendo il limite per  $k \rightarrow +\infty$ , si conclude  $|f(z)| \leq M$ .

### 3.7 Zeri di una funzione analitica.

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analitica. Diremo che  $z_0 \in A$  è uno zero di molteplicità  $k$  per  $f$  se esiste una funzione analitica  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$  per ogni  $z \in A$  e  $g(z_0) \neq 0$ .

Si osservi che se  $z_0$  è uno zero di molteplicità  $k$  per  $f$ , la funzione  $f$  è infinitesima di ordine  $k$ , poiché

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} \right| = g(z_0).$$

Per il Lemma di Peano, si ha che  $z_0$  è uno zero di molteplicità  $k$  per  $f$  se e solo se  $f^{(n)}(z_0) = 0$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots, k - 1$  mentre  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Si ha in questo caso

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-k}}_{= g(z)}.$$

Dimostriamo ora che una funzione olomorfa non può avere zeri di molteplicità infinita.

**Teorema sugli zeri di molteplicità infinita.** Sia  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analitica, con  $A$  connesso. Se esiste  $z_0 \in A$  tale che  $f^{(n)}(z_0) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $f \equiv 0$  su  $A$ .

Dimostrazione. Se  $A$  è una palla del tipo  $B(z_0, \rho)$ , la dimostrazione è immediata perché in questo caso si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0.$$

Sia ora  $A$  un qualunque aperto connesso. Sia  $z_1 \in A$  e si supponga, per assurdo,  $f(z_1) \neq 0$ . Si prenda una curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  congiungente i due punti  $z_0$  e  $z_1$ . Poniamo

$$\hat{t} = \sup\{t \in [0, 1] : f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \forall n \in \mathbb{N}\}$$

e definiamo  $\hat{z} = \gamma(\hat{t})$ . Poiché  $f$  è di classe  $C^\infty$ , si ha  $f^{(n)}(\hat{z}) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Poiché  $A$  è aperto, esiste una palla  $B(\hat{z}, \rho) \subset A$ . Per la prima parte della dimostrazione, nella palla  $B(\hat{z}, \rho)$  la funzione è costantemente nulla, ma questo fatto contraddice la definizione di  $\hat{t}$ .

**Teorema sugli zeri di una funzione analitica.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analitica, con  $A$  aperto e connesso e  $f$  non identicamente nulla. Allora l'insieme  $Z(f) = \{z \in A : f(z) = 0\}$  è discreto in  $A$ , cioè è un insieme privo di punti di accumulazione in  $A$ .

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista una successione  $(z_k)_k$  di zeri di  $f$ ,  $f(z_k) = 0$  per ogni  $k$ , che converge ad un punto  $\lambda \in A$ ,  $\lambda \neq z_k$  per ogni  $k$ . Per la continuità di  $f$  si ha  $f(\lambda) = 0$ . Per il teorema sugli zeri di molteplicità infinita,  $\lambda$  non può avere molteplicità infinita. Sia  $j$  la sua molteplicità. Allora esiste una funzione analitica  $g$  che soddisfa

$$f(z) = (z - \lambda)^j g(z), \quad g(\lambda) \neq 0.$$

Per la continuità di  $g$  esiste una palla  $B(\lambda, r)$  contenuta in  $A$  tale che  $g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in B(\lambda, r)$ . Ma la successione  $(z_k)_k$  appartiene definitivamente a  $B(\lambda, r)$ , cioè esiste  $\hat{k}$  tale che per ogni  $k \geq \hat{k}$  si ha  $z_k \in B(\lambda, r)$ . Quindi, per questi  $k$  si ha la contraddizione

$$0 = f(z_k) = (z_k - \lambda)^j g(z_k) \neq 0.$$

• È importante sottolineare che il teorema parla di insieme discreto in  $A$ . Si consideri a esempio la funzione  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ . L'insieme  $Z(f)$  non è discreto in  $\mathbb{C}$ , perché  $0$  è un suo punto di accumulazione (si consideri la successione  $(z_n)_n$  con  $z_n = \frac{1}{2\pi i n}$ ). Naturalmente, l'insieme  $Z(f)$  è discreto in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Principio di identità delle funzioni analitiche.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $E \subseteq A$  un sottoinsieme non discreto di  $A$ . Siano  $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$  analitiche tali che  $f_1(z) = f_2(z)$  per ogni  $z \in E$ . Allora  $f_1 = f_2$ .

Infatti, posto  $f = f_1 - f_2$ , si osserva che  $f$  è una funzione analitica che si annulla su un insieme non discreto di punti, e pertanto  $f = 0$ .

**Prolungamento analitico.** Sia  $E \subseteq \mathbb{C}$  un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  e sia  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Supponiamo che esista una funzione analitica  $\tilde{f} : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $A$  aperto e  $E \subseteq A$ . Diremo allora che  $\tilde{f}$  è un prolungamento analitico di  $f$ .

Si osservi che nel caso in cui  $E$  sia non discreto, l'eventuale prolungamento analitico di  $f$  ad  $A$  è unico, grazie al principio di identità delle funzioni analitiche.

Questo risultato si applica in particolare a insiemi  $E \subseteq \mathbb{R}$  e permette di dimostrare agevolmente alcune formule la cui verifica diretta può essere

noiosa. Ad esempio, si fissi un qualunque numero reale  $x_0$ . Consideriamo le due funzioni  $f_1, f_2 : E = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f_1(x) = e^{x_0+x}$  e  $f_2(x) = e^{x_0} \cdot e^x$ . Evidentemente  $f_1$  e  $f_2$  ammettono i prolungamenti analitici su  $\mathbb{C}$  dati da  $\tilde{f}_1(z) = e^{x_0+z}$  e  $\tilde{f}_2(z) = e^{x_0} \cdot e^z$ . Poiché si ha  $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$  su  $\mathbb{R}$ , l'unicità del prolungamento analitico ci garantisce che  $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$  su tutto  $\mathbb{C}$ . Si può ora fissare  $z_0 \in \mathbb{C}$  e considerare le due funzioni  $g_1, g_2 : E = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definite da  $f_1(x) = e^{z_0+x}$  e  $f_2(x) = e^{z_0} \cdot e^x$ . Usando di nuovo l'unicità del prolungamento analitico ci permette infine di ottenere l'identità

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

## 4 Punti singolari di una funzione e teoria dei residui.

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Sia  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$  ma supponiamo che esista un intorno  $U$  di  $z_0$  tale che  $U \setminus \{z_0\} \subset A$ . L'insieme  $U \setminus \{z_0\}$  si dice un intorno forato di  $z_0$ . Si dirà in questo caso che  $z_0$  è un punto singolare isolato o una singolarità isolata per  $f$ .

• Esempi.

$0$  è punto singolare isolato per  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

$i$  e  $-i$  sono punti singolari isolati per  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ .

$0$  è punto singolare isolato per  $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$ .

$0$  è punto singolare per  $f(z) = \text{Log}(z)$ , ma non è una singolarità isolata perché in ogni intorno forato di  $0$  ci sono punti appartenenti alla semiretta reale  $] -\infty, 0[$  dove la funzione non è olomorfa.

La funzione  $f(z) = \frac{1}{\text{sen}(\frac{1}{z})}$  ha infiniti punti singolari: tutti i punti del tipo  $z = \frac{1}{k\pi}$ , con  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , sono singolarità isolate. Il punto  $z = 0$  è un punto singolare ma non è isolato, infatti in ogni intorno forato di  $0$  vi sono infiniti punti singolari del tipo  $z = \frac{1}{k\pi}$ .

### 4.1 Classificazione dei punti singolari isolati.

Sia  $z_0$  un punto singolare isolato per  $f$ . Allora si verifica necessariamente uno (e uno solo) dei seguenti casi:  $z_0$  è una singolarità eliminabile,  $z_0$  è un polo di ordine  $k \geq 1$ ,  $z_0$  è una singolarità essenziale.

**Singularità eliminabile.** Supponiamo che la funzione  $f$  sia localmente limitata in  $z_0$ , cioè supponiamo che esista un intorno  $U$  di  $z_0$  e una costante  $M > 0$  tale che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in U$ ,  $z \neq z_0$ . Diremo allora che  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $f$ .

- **Proposizione.** Una singolarità isolata  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $f$  se e solo se esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}.$$

In questo caso la funzione

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_0, \\ \lambda & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

è un prolungamento analitico per  $f$ .

**Dimostrazione.** Poniamo  $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ . Poiché la funzione  $f$  è localmente limitata in  $z_0$  si ha  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ . Possiamo quindi estendere con continuità in  $z_0$  la funzione  $g$ , ponendo  $\bar{g}(z) = g(z)$  se  $z \neq z_0$  e  $\bar{g}(z_0) = 0$ . Verifichiamo che  $\bar{g}$  è derivabile in  $z_0$ . Infatti si ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{g}(z) - \bar{g}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = 0.$$

Ne segue che  $\bar{g}$  è olomorfa in  $U$  e quindi analitica su tale insieme. Pertanto  $\bar{g}$  si può sviluppare in serie di potenze

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Si ha  $\bar{g}(z_0) = \bar{g}'(z_0) = 0$ , quindi  $a_0 = a_1 = 0$  e

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n.$$

Poniamo

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n.$$

$\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  è il prolungamento analitico di  $f$  cercato.

- **Esempi.**

$0$  è punto singolare isolato eliminabile per  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ .

$\frac{\pi}{2}$  è punto singolare isolato eliminabile per  $f(z) = \frac{\pi - 2z}{\cos z}$ .

**Polo di ordine  $k$ .** Supponiamo ora che la funzione  $f$  non sia localmente limitata in  $z_0$ , ma che esista  $k \in \mathbb{N}^+$  tale che la funzione  $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$  sia localmente limitata in  $z_0$ . Si può allora considerare il minimo naturale per cui questo accada, cioè si può supporre che per ogni  $j$ , con  $0 \leq j < k$ , la funzione  $(z - z_0)^j f(z)$  non sia localmente limitata in  $z_0$ . Diremo allora che  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  per  $f$ . Se  $k = 1$  diremo anche che  $z_0$  è un polo semplice, se  $k = 2$  un polo doppio.

• **Proposizione.** Una singolarità isolata  $z_0$  è un polo per  $f$  se e solo se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty,$$

e, in particolare,  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  per  $f$  se e solo se

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^j f(z)| &= +\infty, \quad \text{per ogni } j = 0, 1, \dots, k-1, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) &= \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $z_0$  sia un polo di ordine  $k$  per  $f$ . Allora, posto  $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ , si ha che  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $g$ . Quindi esiste il prolungamento analitico  $\bar{g}$  di  $g$  in  $U$ . Sia

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Si osservi che  $a_0 \neq 0$ , altrimenti la funzione  $(z - z_0)^{k-1} f(z)$  sarebbe localmente limitata in  $z_0$ , contro la definizione di polo di ordine  $k$ . Questo prova in particolare che  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Per ogni  $z \in U$ ,  $z \neq z_0$ , si ha

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{a_0}{(z - z_0)^k} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z - z_0} + \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-k},$$

e si conclude che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

In modo simile, osservando che  $(z - z_0)^j f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k-j}}$ , si verifica che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^j f(z)| = +\infty,$$

per ogni  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ .

Supponiamo ora che sia

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Dimostriamo che  $z_0$  è un polo. Per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno  $V$  di  $z_0$  tale che  $|f(z)| > 1$  e, in particolare,  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in V$ ,  $z \neq z_0$ . Consideriamo la funzione reciproca  $g : V \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ . La funzione  $g$  è olomorfa in  $V \setminus \{z_0\}$  ed è ivi limitata. Si ha infatti  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ . Pertanto  $z_0$  è una discontinuità eliminabile per  $g$ . Esiste allora il prolungamento analitico di  $g$  definito da

$$\bar{g}(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0. \end{cases}$$

Poiché  $\bar{g}$  è analitica possiamo scrivere

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

La funzione  $\bar{g}$  non è identicamente nulla, pertanto esiste un indice  $k$  tale che  $a_n = 0$  per ogni  $n = 0, 1, \dots, k - 1$  e  $a_k \neq 0$ . Si ha dunque

$$\bar{g}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n.$$

Si osservi che, per ogni  $z \in V$ ,  $z \neq z_0$ , si ha

$$(z - z_0)^k f(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n},$$

e quindi la funzione  $(z - z_0)^k f(z)$  è localmente limitata in  $z_0$ . Questo significa che  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  per  $f$ .

- Si osservi che se  $z_0$  è uno zero di una funzione analitica  $f$  con molteplicità  $k$ , allora  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  per la reciproca  $\frac{1}{f}$ .

- Esempi.

Sia  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ . I punti  $-i, i$  sono poli di ordine 1.

Sia  $f(z) = \frac{z}{1-\cos(z)}$ . Per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  il punto  $2k\pi$  è un polo, di ordine 2 se  $k \neq 0$ , di ordine 1 se  $k = 0$ .

**Singularità essenziale.** Supponiamo ora che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , la funzione  $f(z)(z - z_0)^n$  sia illimitata in  $U$ . Diremo allora che  $z_0$  è una singolarità essenziale per  $f$ .

• **Proposizione.** Una singolarità isolata  $z_0$  è una singolarità essenziale per  $f$  se e solo se non esiste il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|.$$

Infatti, se tale limite esistesse finito, la singolarità sarebbe eliminabile, se invece esistesse infinito, sarebbe un polo.

• **Esempio.** Sia  $f(z) = e^{1/z}$ . Proviamo che il punto 0 è una singolarità essenziale per  $f$  verificando che non esiste il limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ . Infatti, se il limite esistesse, esisterebbe anche il limite della restrizione di  $f$  all'asse reale. Ma si ha

$$\lim_{z=x \rightarrow 0^+} |f(z)| = +\infty; \quad \lim_{z=x \rightarrow 0^-} |f(z)| = 0.$$

Pertanto, il limite non esiste.

Osserviamo la seguente notevole particolarità di questa funzione. Consideriamo l'equazione

$$e^{1/z} = w,$$

con  $w \neq 0$ . Sia  $w = \rho e^{i\theta}$  e poniamo  $\frac{1}{z} = \alpha + i\beta$ , si ottiene allora l'equazione

$$e^{1/z} = e^{\alpha+i\beta} = \rho e^{i\theta},$$

che ha come soluzioni i punti

$$z_k = \frac{1}{\log \rho + i(\theta + 2k\pi)},$$

al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ . Si noti che si ha  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} z_k = 0$ . Pertanto in ogni intorno di 0 l'equazione ha infinite soluzioni.

L'esempio specifico illustra una situazione che è in realtà generale. Vale infatti il seguente notevole teorema.

**Teorema di Picard.** Sia  $z_0$  una singolarità essenziale per  $f$ . Allora, per ogni  $w \in \mathbb{C}$ , con l'eccezione di al più un valore, l'equazione  $f(z) = w$  ha in ogni intorno di  $z_0$  infinite soluzioni.

## 4.2 Residuo di una funzione in un punto singolare isolato.

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Sia  $z_0$  una singolarità isolata per  $f$ . Diremo *residuo di  $f$  in  $z_0$*  il numero

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f dz,$$

dove  $\gamma$  è un qualunque circuito orientato positivamente con sostegno in  $A$  e contenente al suo interno  $z_0$  e nessun'altra singolarità. Si osservi che la definizione non dipende dal particolare circuito utilizzato nella definizione, grazie al teorema dei due circuiti.

- Esempi.

Si calcoli il residuo della funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Si può considerare come curva  $\gamma$  il cerchio unitario di contro 0:  $C_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C_1(t) = e^{it}$ , il cui sostegno circonda la singolarità  $z = 0$ . Si ha

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 1.$$

Si calcoli il residuo della funzione  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$  nel punto  $z = i$ . Dobbiamo scegliere una curva che contenga il punto  $i$  al suo interno ma non contenga il punto  $-i$ . Ad esempio si può scegliere il cerchio  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = i + e^{it}$ . Si osservi che

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right).$$

Usando il teorema di Cauchy nel secondo addendo si calcola

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2i} 2\pi i, \end{aligned}$$

e quindi si conclude che  $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = -\frac{i}{2}$ .

In genere può essere complicato calcolare il residuo direttamente dalla definizione. Se la singolarità non è essenziale, tuttavia, esiste una formula per il calcolo.

**Teorema sul Residuo di un polo di ordine  $n$ .** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Sia  $z_0$  un polo di ordine  $n$  (una singolarità eliminabile sarà considerata come polo di ordine 0). Allora vale la formula

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( (z - z_0)^n f(z) \right).$$

Dimostrazione. Sia  $g$  il prolungamento analitico della funzione  $(z - z_0)^n f(z)$ . Per la formula integrale di Cauchy della derivata di ordine  $n - 1$  si ha

$$g^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^n}{(\xi - z)^n} d\xi.$$

Prendiamo il limite per  $z \rightarrow z_0$ . Per verificare che si può portare il limite sotto il segno integrale, si osservi che poiché  $z \rightarrow z_0$ , si può supporre che

$$\left| \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^n}{(\xi - z)^n} \right| \leq 2|f(\xi)|$$

e si può applicare il teorema di Lebesgue. Si ottiene allora

$$g^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi.$$

Osservando che

$$g^{(n-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( (z - z_0)^n f(z) \right)$$

si conclude.

• Osservazione sulle singolarità coniugate. Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Supponiamo che  $f$  soddisfi la relazione  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ , per ogni  $z \in A$ ; in particolare la condizione è verificata se  $f$  è una funzione razionale  $\frac{p}{q}$  con  $p, q$  polinomi a coefficienti reali. Sia  $z_0$  un polo di ordine  $n$ . Allora anche  $\bar{z}_0$  è un polo di ordine  $n$  e si ha

$$\operatorname{Res}(f, \bar{z}_0) = \overline{\operatorname{Res}(f, z_0)}$$

Infatti, basta osservare che si ha  $f^{(n)}(\bar{z}) = \overline{f^{(n)}(z)}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e applicare la formula. Dimostriamo l'asserto per la derivata prima. Si ha

$$\begin{aligned} f'(\bar{z}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{z}+h) - f(\bar{z})}{h} = \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \\ &= \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{\overline{f(z+h) - f(z)}}{\bar{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\left( \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right)} = \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$

- Osservazione sui poli semplici delle frazioni. Sia  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ,  $g, h$  analitiche,  $z_0$  uno zero semplice per  $h$ ,  $g(z_0) \neq 0$ . Allora  $z_0$  è un polo semplice per  $f$  e si ha

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

### 4.3 Serie di Laurent.

Consideriamo una funzione  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , e poniamo  $z_n = \varphi(n)$ . Definiamo in questo modo una *successione bilatera*  $(z_n)_n$ . Associata a questa successione si può considerare la *serie bilatera*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

La serie si dice convergente se convergono entrambe le serie usuali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_{-n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$

In particolare siamo interessati alle serie di potenze bilatere, del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (4)$$

con  $z_0 \in \mathbb{C}$  fissato e  $(c_n)_n$  successione bilatera di numeri complessi.

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

si dice *parte singolare* o *parte caratteristica* della serie (4). La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

si dice *parte regolare* della serie (4).

Denotiamo con  $\frac{1}{R_1}$  il raggio di convergenza della serie di potenze (usuale)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} w^n$$

(con la convenzione di scrivere eventualmente  $\frac{1}{R_1} = 0$  se  $R_1 = +\infty$  e  $\frac{1}{R_1} = +\infty$  se  $R_1 = 0$ ). La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

è pertanto convergente se  $|z - z_0| > R_1$  e non è convergente se  $|z - z_0| < R_1$ .

Sia  $R_2$  il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$$

e supponiamo  $R_1 < R_2$ . La serie di potenze bilatera sarà convergente nella corona circolare

$$C(z_0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

La serie non converge se  $|z - z_0| < R_1$  oppure  $|z - z_0| > R_2$ . In generale non sappiamo come si comporta la serie sul bordo della corona (potrebbe convergere in alcuni punti e non convergere in altri).

- Si osservi che la nozione di convergenza qui data è diversa da quella usualmente adottata per le serie di Fourier.

- Osservazione. Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  un polo di ordine  $k$  per una funzione analitica  $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia

$$g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(z - z_0)^j$$

il prolungamento analitico della funzione  $(z - z_0)^k f(z)$ . Se  $z \neq z_0$  si può scrivere allora

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(z - z_0)^{j-k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

con  $c_n = 0$  se  $n < -k$ ,  $c_n = a_{n+k}$  se  $n \geq -k$ . Abbiamo quindi rappresentato la funzione  $f$  nell'intorno forato  $U \setminus \{z_0\}$  come una serie bilatera di potenze. Vedremo che questo risultato è molto generale.

**Teorema di Laurent.** Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ ,

$$C(z_0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

la corona circolare di centro  $z_0$  e raggi  $R_1, R_2$ . Sia  $f : C(z_0; R_1, R_2) \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Allora  $f$  è rappresentabile come serie bilatera di potenze centrata in  $z_0$ ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (5)$$

Inoltre per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

dove  $\gamma$  è un qualsiasi circuito orientato positivamente con sostegno nella corona  $C$ .

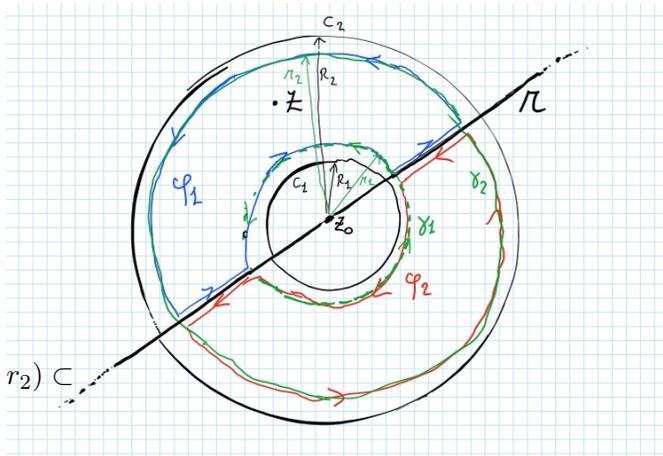
La serie (5) è detta *serie di Laurent*.

Dimostrazione. Sia-  
no  $C_1$  il cerchio di  
centro  $z_0$  e raggio  
 $R_1$ ,  $C_2$  il cerchio  
di centro  $z_0$  e raggio  
 $R_2$  (i casi  $R_1 = 0$  op-  
pure  $R_2 = +\infty$  so-  
no di facile interpre-  
tazione). Fissiamo  
 $z \in C(z_0; R_1, R_2)$  e  
prendiamo una co-  
rona circolare  $C(z_0; r_1, r_2) \subset$   
 $C(z_0; R_1, R_2)$  tale che  
 $z \in C(z_0; r_1, r_2)$ . In  
particolare si avrà

$$R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2.$$

Chiamiamo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  i due cerchi di centro  $z_0$  e raggi  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente. Fissiamo una retta che passa per  $z_0$  e non passa per  $z$ , e consideriamo i due circuiti  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  così definiti:

★  $\varphi_1$  percorre un semicerchio (chiamiamolo “superiore”) di  $\gamma_1$  in verso negativo (orario), poi un segmentino di retta fino a raggiungere  $\gamma_2$ , quindi



il semicerchio “superiore” di  $\gamma_2$  in verso positivo, infine il segmento di retta che chiude il circuito raggiungendo di nuovo  $\gamma_1$ .

★  $\varphi_2$  percorre il semicerchio “inferiore” di  $\gamma_1$  in verso negativo (orario), poi un segmentino di retta (in verso negativo) fino a raggiungere  $\gamma_2$ , quindi il semicerchio “inferiore” di  $\gamma_2$  in verso positivo, infine il segmento di retta (in verso negativo) che chiude il circuito raggiungendo di nuovo  $\gamma_1$ .

Il punto  $z$  si trova all’interno di uno (e uno solo) dei due circuiti:  $\varphi_1$  oppure  $\varphi_2$ . Sia per esempio  $z$  interno a  $\varphi_1$  (e quindi non è interno a  $\varphi_2$ ). Allora si ha, per la formula integrale di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Poiché  $z$  non è interno a  $\varphi_2$ , la funzione  $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$  è olomorfa all’interno di  $\varphi_2$  e quindi, per il teorema di Cauchy,

$$0 = \int_{\varphi_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Sommando i due integrali e usando l’additività si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\varphi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\varphi_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right). \end{aligned}$$

Consideriamo il primo integrale. Si ha, per ogni  $\xi$  sulla curva  $\gamma_1$ ,

$$|\xi - z_0| < |z - z_0|,$$

e quindi

$$\xi - z = (z_0 - z) \left( 1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right), \quad \text{con } \left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

Perciò si può scrivere

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{z_0 - z} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^k d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-k}} d\xi\right) (z - z_0)^{-(k+1)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right) (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il secondo integrale. Si ha, per ogni  $\xi$  sulla curva  $\gamma_2$ ,

$$|\xi - z_0| > |z - z_0|,$$

e quindi

$$\xi - z = (\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right), \quad \text{con } \left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1.$$

Perciò si può scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right) (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

La permutazione del simbolo di integrale con quello di sommatoria è resa possibile dalla convergenza uniforme delle serie considerate. Abbiamo in definitiva ottenuto che, per ogni  $z \in C(z_0; R_1, R_2)$ , si può scrivere

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right) (z - z_0)^n \\
&+ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right) (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

Prendiamo ora un qualsiasi circuito  $\gamma$  con sostegno nella corona circolare  $C(z_0; R_1, R_2)$ . Applicando il teorema dei due circuiti si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Si è quindi dimostrato che, per ogni  $z \in C(z_0; R_1, R_2)$ , si ha

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Osservazioni.** Sia  $R_1 = 0$ ,  $C(z_0; 0, R_2) = B(z_0, R_2) \setminus \{z_0\}$ .  $f$  ha in  $z_0$  un punto singolare isolato. Allora:

- $z_0$  è eliminabile se e solo se  $c_n = 0$  per ogni  $n \leq -1$ . In questo caso la serie di Laurent di  $f$  coincide con la serie di Taylor del prolungamento analitico di  $f$  su  $B(z_0, R_2)$ ;
- $z_0$  è un polo di ordine  $k$  se e solo se  $c_n = 0$  per ogni  $n < -k$  e  $c_{-k} \neq 0$ ;
- $z_0$  è una singolarità essenziale per  $f$  se e solo se per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  esiste  $n < k$  tale che  $c_n \neq 0$ .

Si osservi inoltre che

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-1+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \text{Res}(f, z_0).$$

**Calcolo dei coefficienti della serie di Laurent.** Consideriamo una funzione analitica in un intorno forato di  $z_0$ , con  $z_0$  polo di ordine  $k$ . La serie di Laurent associata è

$$\frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ricaviamo una formula per calcolare i coefficienti della serie di Laurent senza dover ricorrere all'integrazione. Sappiamo che

$$c_{-1} = \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{(k-1)}((z-z_0)^k f(z)).$$

Poniamo ora

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-z_0)f(z) \\ &= \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-2}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)} + c_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} c_{-2} &= \text{Res}(g, z_0) = \frac{1}{(k-2)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{(k-2)}((z-z_0)^{k-1} g(z)) \\ &= \frac{1}{(k-2)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{(k-2)}((z-z_0)^k f(z)). \end{aligned}$$

Per induzione si ottiene la formula generale

$$c_{-j} = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{(k-j)}((z-z_0)^k f(z)).$$

• Metodo dei coefficienti indeterminati. Un altro metodo per il calcolo dei coefficienti nel caso di frazioni di funzioni analitiche è quello dei coefficienti indeterminati. Siano  $f, g$  funzioni analitiche e sia  $z_0$  uno zero di molteplicità  $k$  di  $g$ ,  $f(z_0) \neq 0$ . Supponiamo noti i coefficienti degli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni  $f$  e  $g$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

essendo  $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$ . Per la funzione  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  il punto  $z_0$  è un polo di ordine  $k$ , quindi la funzione  $h$  si può rappresentare come serie di Laurent come segue

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Vogliamo determinare i coefficienti  $c_k, c_{k-1}, \dots, c_{-1}$ . Moltiplicando per  $g(z)$  si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} \left( b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots \right) \\ &+ \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} \left( b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots \right) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^{-1}} \left( b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots \right) \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \left( b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots \right). \end{aligned}$$

Moltiplicando a termine a termine e uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado si ottengono i valori richiesti:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(z-z_0) + \dots &= c_{-k}(b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \dots) \\ &+ c_{-k+1}(z-z_0)(b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \dots) + \dots \\ &+ c_{-1}(z-z_0)^{k-1}(b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Ad esempio avremo

$$c_{-k} = \frac{a_0}{b_k}, \quad c_{-k+1} = \frac{a_1 - c_{-k}b_{k+1}}{b_k}, \quad c_{-k+2} = \frac{a_2 - c_{-k}b_{k+2} - c_{-k+1}b_{k+1}}{b_k},$$

e così via.

Esempio. Sia  $f(z) = 1$ ,  $g(z) = z - \operatorname{sen} z$ . Si vuole determinare la parte caratteristica della serie di Laurent della funzione  $h(z) = \frac{1}{z - \operatorname{sen} z}$  centrata in  $z = 0$ . Poiché  $g(z) = \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{5!}z^5 + \dots$ ,  $0$  è un polo di ordine  $3$  per  $h$  e si ha

$$1 = (c_{-3} + c_{-2}z + c_{-1}z^2 + \dots) \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{5!}z^2 + \dots \right)$$

$$c_{-3} = 6, \quad c_{-2} = 0, \quad c_{-1} = \frac{3}{10} \text{ e}$$

$$\frac{1}{z - \operatorname{sen} z} = \frac{6}{z^3} + \frac{3}{10} \frac{1}{z} + \sum_0^{+\infty} c_n z^n.$$

$$\text{In particolare } \operatorname{Res}(h, 0) = \frac{3}{10}.$$

Esempio. Sia  $f(z) = \operatorname{sen} \left( \frac{1}{z} \right)$ . Si vuole determinare la serie di Laurent della funzione in un intorno forato di  $0$ . Osserviamo che  $0$  è una singolarità

essenziale, quindi non abbiamo a disposizione né il metodo dei coefficienti indeterminati né il metodo dei residui. Tuttavia si osserva che

$$\operatorname{sen}(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}.$$

Ponendo  $w = \frac{1}{z}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{(-1)^{1-2n}}{(1-2n)!} z^{(2n-1)} \\ &= \dots + \frac{1}{9!} z^{-9} - \frac{1}{7!} z^{-7} + \frac{1}{5!} z^{-5} - \frac{1}{6} z^{-3} + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

In particolare  $\operatorname{Res}(f, 0) = c_{-1} = 1$ .

#### 4.4 Decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici.

Siano  $a$  e  $b$  polinomi,  $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$  una funzione razionale. Se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, possiamo dividere  $a$  per  $b$  in modo da ottenere il polinomio quoziente  $q$  e il resto  $r$ . Avremo allora  $a = b \cdot q + r$  e quindi  $f(z) = q(z) + \frac{r(z)}{b(z)}$ . Possiamo quindi limitarci a considerare funzioni razionali  $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$  dove il grado di  $a$  è strettamente inferiore al grado di  $b$ .

Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  gli zeri del denominatore  $b(z)$ , rispettivamente di molteplicità  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Possiamo rappresentare la funzione  $f$  come somma di frazioni semplici:

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{\frac{a_{1,1}}{z-\alpha_1} + \frac{a_{1,2}}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{a_{1,3}}{(z-\alpha_1)^3} + \dots + \frac{a_{1,k_1}}{(z-\alpha_1)^{k_1}}}_{\sigma_1} \\ &+ \underbrace{\frac{a_{2,1}}{z-\alpha_2} + \frac{a_{2,2}}{(z-\alpha_2)^2} + \frac{a_{2,3}}{(z-\alpha_2)^3} + \dots + \frac{a_{2,k_2}}{(z-\alpha_2)^{k_2}}}_{\sigma_2} \\ &+ \dots \\ &+ \underbrace{\frac{a_{n,1}}{z-\alpha_n} + \frac{a_{n,2}}{(z-\alpha_n)^2} + \frac{a_{n,3}}{(z-\alpha_n)^3} + \dots + \frac{a_{n,k_n}}{(z-\alpha_n)^{k_n}}}_{\sigma_n} \end{aligned}$$

dove  $\sigma_i$  è la parte caratteristica della serie di Laurent di  $f$  in un intorno forato del polo  $\alpha_i$ .

**Teorema** Sia  $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$  con  $a, b$  polinomi di grado  $\deg a < \deg b$ . Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  gli zeri del denominatore  $b(z)$  e sia  $\sigma_i(z)$  la parte caratteristica della serie di Laurent di  $f$  in un intorno forato di  $\alpha_i$  non contenente nessuno zero di  $b(z)$ . Allora si ha

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(z).$$

Dimostrazione. Poniamo  $g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z)$ . La funzione  $g$  è analitica su  $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Mostriamo che esiste il prolungamento analitico  $\tilde{g}$  di  $g$  su tutto  $\mathbb{C}$ . Infatti, sia  $U_i$  un intorno di  $\alpha_i$  che contenga soltanto  $\alpha_i$  come singolarità. Rappresentando la funzione  $f$  come serie di Laurent in  $U_i \setminus \{\alpha_i\}$  si può scrivere

$$g(z) = \left( \sigma_i + \sum_{m=0}^{+\infty} c_m (z - \alpha_i)^m \right) - \sum_{j=1}^n \sigma_j(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m (z - \alpha_i)^m - \sum_{j=1; j \neq i}^n \sigma_j(z),$$

e quindi viene semplificato il termine singolare.

La funzione  $\tilde{g}$  è dunque intera. Si ha inoltre

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |\tilde{g}(z)| = 0,$$

e quindi la funzione è anche limitata. Per il teorema di Liouville si conclude che  $\tilde{g}$ , e quindi  $g$ , è una costante, che deve essere necessariamente zero.

- I coefficienti  $a_{i,j}$  che appaiono nella decomposizione possono essere calcolati con i metodi già studiati per calcolare la parte caratteristica della serie di Laurent della funzione. In alternativa possono essere calcolati risolvendo un sistema in  $n$  incognite.

Esempio.

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3(z+1)^2} = \frac{a_{1,3}}{z^3} + \frac{a_{1,2}}{z^2} + \frac{a_{1,1}}{z} + \frac{a_{2,2}}{(z+1)^2} + \frac{a_{2,1}}{z+1}.$$

Moltiplicando per il minimo comun denominatore si ottiene l'equazione

$$z-1 = a_{1,3}(z+1)^2 + a_{1,2}z(z+1)^2 + a_{1,1}z^2(z+1)^2 + a_{2,2}z^3 + a_{2,1}z^3(z+1)$$

da cui il sistema

$$\begin{aligned} 0 &= a_{2,1} + a_{1,1} \\ 0 &= a_{2,1} + a_{2,2} + 2a_{1,1} + a_{1,2} \\ 0 &= a_{1,1} + 2a_{1,2} \\ 1 &= a_{1,2} + 2a_{1,3} \\ -1 &= a_{1,3} \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono  $a_{1,3} = -1$ ,  $a_{1,2} = 3$ ,  $a_{1,1} = -5$ ,  $a_{2,2} = 2$ ,  $a_{2,1} = 5$ .

## 4.5 Calcolo di integrali con i residui.

In questa sezione vedremo come applicare la teoria dei residui al calcolo degli integrali.

**Il teorema dei residui.** Sia  $A$  aperto connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Siano  $z_1, z_2, \dots, z_n$  punti singolari isolati di  $f$  e sia  $\gamma$  un circuito orientato positivamente con sostegno  $\Gamma \subset A$ , tale che  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \Gamma_{int}$  e non vi siano altre singolarità di  $f$  nell'interno di  $\Gamma$ . Allora

$$\int_{\gamma} f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res(f, z_k).$$

Dimostrazione. Per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$  sia  $\gamma_k$  un cerchio di centro  $z_k$  e raggio opportuno in modo tale che il suo sostegno  $\Gamma_k$  sia contenuto in  $A$ ,  $z_k$  sia l'unica singolarità di  $f$  interna a  $\Gamma_k$ , e  $\Gamma_k \cap \Gamma_j = \emptyset$  se  $k \neq j$ . Conduciamo dei segmenti che congiungono punti opposti di  $\Gamma$  passando per le singolarità e costruiamo dei nuovi circuiti  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , i cui tratti sono costituiti da archi di  $\gamma$  in verso positivo, tratti dei segmenti, archi dei cerchi  $\gamma_k$  in verso negativo, in modo tale che all'interno di ciascuno di questi circuiti non ci siano singolarità e la somma algebrica dei circuiti sia complessivamente

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m = \gamma - (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n).$$

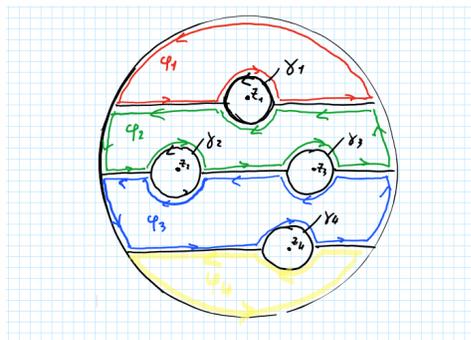
Nel disegno le singolarità sono quattro, il circuito grande  $\gamma$  e i cerchietti  $\gamma_k$  sono tracciati in nero, i circuiti  $\varphi_k$  sono colorati di rosso, verde, azzurro, giallo.

Per definizione di residuo si ha

$$\int_{\gamma_k} f dz = 2\pi i Res(f, z_k)$$

per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$ . Per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_{\varphi_k} f dz = 0$$



per ogni  $k = 1, 2, \dots, m$ . Dall'additività dell'integrale si conclude allora

$$0 = \sum_{k=1}^m \int_{\varphi_k} f dz = \int_{\gamma} f dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

**Valor principale.** Il teorema dei residui è molto utile quando si vuole calcolare il valor principale di una funzione. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo *valor principale di  $f$  su  $\mathbb{R}$* , se definito, il numero

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Più in generale si parla di valor principale anche nel caso in cui sono presenti una o più singolarità della funzione nel dominio di integrazione. Rinunciamo a proporre una definizione precisa preferendo offrire un esempio esplicativo.

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{1}{x(x-1)} dx + \int_{\frac{1}{R}}^{1-\frac{1}{R}} \frac{1}{x(x-1)} dx + \int_{1+\frac{1}{R}}^R \frac{1}{x(x-1)} dx \right).$$

• **Logaritmo integrale.** Un'applicazione del valor principale si ha, ad esempio, nella definizione del logaritmo integrale, definito per ogni  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \text{li}(x) &:= PV \int_0^x \frac{1}{\log y} dy \\ &= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{\log y} dy & \text{se } 0 < x < 1, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\log y} dy + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{1}{\log y} dy \right) & \text{se } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nell'applicazione della teoria dei residui al calcolo di integrali sono particolarmente utili i tre lemmi che seguono. Siano  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R_0 > 0$  e  $\theta_1, \theta_2$  tali che  $-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ . Definiamo il settore angolare "esterno"

$$S_{est}(z_0; R_0; \theta_1, \theta_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R_0, \theta_1 \leq \text{Arg}(z - z_0) \leq \theta_2\}$$

e il settore angolare "interno"

$$S_{int}(z_0; R_0; \theta_1, \theta_2) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R_0, \theta_1 \leq \text{Arg}(z - z_0) \leq \theta_2\}.$$

**Lemma del cerchio grande.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso,  $S = S_{est}(z_0; R_0; \theta_1, \theta_2) \subseteq A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Supponiamo che esista

$$\lim_{z \in S, |z| \rightarrow +\infty} (z - z_0)f(z) = \lambda \in \mathbb{C}.$$

Allora si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \lambda i(\theta_2 - \theta_1),$$

dove  $\gamma_R : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$  è l'arco di cerchio  $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$ .

Dimostrazione. Per ogni  $R > R_0$  poniamo

$$M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |(z - z_0)f(z) - \lambda|$$

(qui  $\Gamma_R$  denota il sostegno della curva  $\gamma_R$ ). Per ipotesi abbiamo che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} M_R = 0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_{\gamma_R} \left( f(z) - \frac{\lambda}{z - z_0} + \frac{\lambda}{z - z_0} \right) dz \\ &= \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_R} \frac{\lambda}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Si ha

$$\int_{\gamma_R} \frac{\lambda}{z - z_0} dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda R i e^{it}}{R e^{it}} dt = \lambda i(\theta_2 - \theta_1).$$

Inoltre

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{M_R}{R} ds = M_R(\theta_2 - \theta_1)$$

e quindi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0} dz = 0.$$

• Esempio. Si calcoli il valor principale

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

La funzione integranda presenta due poli doppi coniugati in  $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Fissiamo  $R > |-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = 1$  e costruiamo il circuito  $\varphi_R$ , costituito dal segmento sull'asse reale  $[-R, R]$  seguito dal semicerchio superiore  $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ , in verso positivo. Il circuito contiene la singolarità isolata  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  per la funzione  $f(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2}$ . Pertanto, per il teorema dei residui, si ha

$$\int_{\varphi_R} \frac{1}{(z^2+z+1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Si noti che l'integrale non dipende da  $R$ . Per il lemma del grande cerchio, essendo  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z)z = 0$ , si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Pertanto, prendendo il limite per  $R \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \right) \\ &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

**Lemma del cerchio piccolo.** Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso,  $S = S_{int}(z_0; R_0; \theta_1, \theta_2) \subseteq A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Supponiamo che esista

$$\lim_{z \in S, z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lambda \in \mathbb{C}.$$

Allora si ha

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \lambda i(\theta_2 - \theta_1),$$

dove  $\gamma_R : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$  è l'arco di cerchio  $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$ .

Dimostrazione. Poniamo

$$M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |(z - z_0)f(z) - \lambda|$$

(qui  $\Gamma_R$  denota il sostegno della curva  $\gamma_R$ ). Per ipotesi abbiamo che

$$\lim_{R \rightarrow 0} M_R = 0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_{\gamma_R} \left( f(z) - \frac{\lambda}{z - z_0} + \frac{\lambda}{z - z_0} \right) dz \\ &= \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_R} \frac{\lambda}{z - z_0} dz.\end{aligned}$$

Si ha

$$\int_{\gamma_R} \frac{\lambda}{z - z_0} dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda R i e^{it}}{R e^{it}} dt = \lambda i (\theta_2 - \theta_1).$$

Inoltre

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{M_R}{R} ds = M_R (\theta_2 - \theta_1)$$

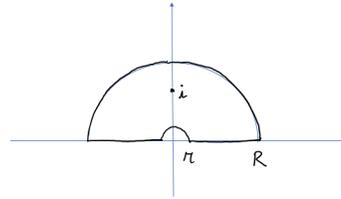
e quindi

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0} dz = 0.$$

• Esempio. Si calcoli il valor principale

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-i)} dx.$$

Fissiamo  $0 < r < 1$  e  $R > 1$  e costruiamo il circuito  $\varphi_{r,R}$ , costituito dal semicerchio superiore  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_r(t) = r e^{it}$ , in verso negativo, seguito dal segmento  $[r, R]$ , dal semicerchio superiore  $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_R(t) = R e^{it}$ , in verso positivo, seguito dal segmento  $[-R, -r]$ .



Il circuito contiene la singolarità isolata  $i$  per la funzione  $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$ . Pertanto, per il teorema dei residui, si ha

$$\int_{\varphi_{r,R}} \frac{1}{z(z-i)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi.$$

Si noti che l'integrale non dipende da  $r$  o da  $R$ . Per il lemma del grande cerchio, essendo  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z)z = 0$ , si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Per il lemma del piccolo cerchio, essendo  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)z = i$ , si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = -\pi.$$

Pertanto, prendendo i limiti per  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$\begin{aligned} 2\pi &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0}} \left( \int_{-R}^{-r} f(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \right) \\ &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - (-\pi) + 0, \end{aligned}$$

da cui

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi.$$

**Lemma di Jordan.** Sia  $w \in \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso,  $S = S_{est}(0; R_0; \theta_1, \theta_2) \subseteq A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua tale che  $\lim_{\substack{z \in S, \\ |z| \rightarrow +\infty}} f(z) = 0$ . Supponiamo inoltre, in alternativa,  $w > 0$  e  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ , oppure  $w < 0$  e  $-\pi \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 0$ . Allora si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{iwz} f(z) dz = 0,$$

dove  $\gamma_R : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$  è l'arco di cerchio  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ .

Dimostrazione. Poniamo  $M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$  (qui  $\Gamma_R$  denota il sostegno della curva  $\gamma_R$ ). Per ipotesi abbiamo che  $\lim_{R \rightarrow +\infty} M_R = 0$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iwz} dz \right| &\leq \int_{\gamma_R} |f(z) e^{iwz}| ds \leq M_R \int_{\theta_1}^{\theta_2} |e^{iwRe^{it}}| |Rie^{it}| dt \\ &= M_R \int_{\theta_1}^{\theta_2} |e^{iwR(\cos(t)+i \operatorname{sen}(t))}| R dt \\ &= M_R R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-wR \operatorname{sen}(t)} dt. \end{aligned}$$

Supponiamo ora  $w > 0$  e  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ . Si ha allora, usando la simmetria del seno rispetto al punto  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-wR \operatorname{sen}(t)} dt \leq \int_0^{\pi} e^{-wR \operatorname{sen}(t)} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-wR \operatorname{sen}(t)} dt.$$

Osserviamo inoltre che, per ogni  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , si ha

$$\operatorname{sen} t \geq \frac{2}{\pi}t,$$

e quindi

$$e^{-wR \operatorname{sen} t} \leq e^{-\frac{2}{\pi}twR}.$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq M_R R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-wR \operatorname{sen}(t)} dt \leq 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}twR} dt \\ &= \frac{\pi M_R}{w} \left[ 1 - e^{-wR} \right] \end{aligned}$$

e si conclude

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{iwz} f(z) dz = 0.$$

Supponiamo ora  $w < 0$  e  $-\pi \leq \theta_1 \leq t \leq \theta_2 \leq 0$ . Si ha allora

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-wR \operatorname{sen}(t)} dt \leq \int_{-\pi}^0 e^{|w|R \operatorname{sen}(t)} dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{|w|R \operatorname{sen}(t)} dt.$$

Per ogni  $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$  si ha  $\operatorname{sen} t \leq \frac{2}{\pi}t$ , e quindi

$$e^{|w|R \operatorname{sen} t} \leq e^{\frac{2}{\pi}t|w|R}.$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq M_R R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{|w|R \operatorname{sen}(t)} dt \leq 2M_R R \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{\frac{2}{\pi}t|w|R} dt \\ &= \frac{\pi M_R}{|w|} \left[ 1 - e^{-|w|R} \right] \end{aligned}$$

e si conclude nuovamente

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_R} e^{iwz} f(z) dz = 0.$$

• Esempio. Trasformata di Fourier. Il lemma di Jordan si applica in particolare al calcolo di integrali utili nella teoria delle trasformate di Fourier. Ad esempio, vogliamo calcolare

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx,$$

con  $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . La funzione ha due poli semplici in  $-ai$  e  $ai$ . Il caso  $\omega = 0$  si risolve facilmente osservando che la funzione  $F(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \right)$  è una primitiva della funzione  $f$ . Quindi  $\mathcal{F}\{f\}(0) = \frac{\pi}{a}$ . Supponiamo ora  $\omega > 0$ . Poniamo  $w = -\omega < 0$ . Consideriamo il circuito  $\varphi_R$  somma del segmento reale  $[-R, R]$  percorso in verso negativo con il semicerchio  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [-\pi, 0]$ , percorso in verso positivo. Per ogni  $R > |a|$  si ha

$$\int_{\varphi_R} e^{iwz} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( e^{iwz} \frac{1}{a^2+z^2}, -ai \right) = -\frac{\pi}{a} e^{wa}.$$

Il sostegno di  $\gamma_R$  si trova nel semipiano inferiore,  $w < 0$ , e

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \Im m(z) < 0}} f(z) = 0.$$

Possiamo allora applicare il lemma di Jordan e otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{a} e^{aw} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_R} e^{iwz} f(z) dz \\ &= -\int_{\mathbb{R}} e^{iwx} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{iwz} f(z) dz \\ &= -\int_{\mathbb{R}} e^{iwx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Perciò

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

Supponiamo ora  $\omega < 0$ . Ripetiamo il ragionamento descritto sopra, considerando questa volta il circuito  $\varphi_R$  somma del segmento reale  $[-R, R]$  percorso in verso positivo con il semicerchio  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , percorso in verso positivo. Si ottiene in definitiva

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

**Ulteriori esempi.** Vediamo alcune ulteriori applicazioni della teoria dei residui per il calcolo di integrali.

- Esempio. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(t)} dt.$$

Posto  $z = e^{it}$  si ha, dalle formule di Eulero,

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Poniamo  $\gamma(t) = e^{it}$ , per  $t \in [0, 2\pi]$ , e cerchiamo una funzione  $f$  che verifichi

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(t)}.$$

Avremo allora, per definizione di integrale,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(t)} dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Si calcola facilmente

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right)^2},$$

da cui

$$f(z) = \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1}.$$

La funzione integranda presenta quattro poli semplici reali:  $\pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$ . Di questi, solo i punti  $\pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  sono interni alla curva  $\gamma$ . Si ha

$$\operatorname{Res}(f, -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}) = \operatorname{Res}(f, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Pertanto, per il teorema dei residui, si conclude

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(t)} dt = 2\pi i \cdot 2 \left( -\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \pi\sqrt{2}.$$

- Seno integrale e seno cardinale. Si consideri la funzione seno integrale

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Si osservi che la funzione  $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$  non è di classe  $L^1$  perché la funzione  $\left| \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right|$  non è integrabile sull'intervallo  $]0, +\infty[$ . Tuttavia, la funzione  $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$  è integrabile (ma non assolutamente) secondo Riemann nell'intervallo  $]0, +\infty[$ .

Definiamo inoltre la funzione seno cardinale ponendo

$$\operatorname{senc}(x) := \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si tenga presente che talvolta si definisce seno cardinale la funzione normalizzata, cioè

$$\operatorname{senc}(x) := \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si osservi che la funzione seno integrale è la primitiva della funzione seno cardinale che vale 0 nell'origine.

Si vuole calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Si}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z}{z} + i \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

Fissiamo  $0 < r < R$  e costruiamo il circuito  $\varphi_{r,R}$ , costituito dal semicerchio superiore  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_r(t) = re^{it}$ , in verso negativo, seguito dal segmento  $[r, R]$ , dal semicerchio superiore  $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ , in verso positivo, seguito dal segmento  $[-R, -r]$ . La funzione  $f$  è olomorfa all'interno del circuito  $\varphi_{r,R}$ , pertanto, per il teorema di Cauchy, si ha

$$\int_{\varphi_{r,R}} f(z) dz = 0.$$

Si noti che l'integrale non dipende da  $r$  o da  $R$ . Per il lemma di Jordan con  $w = 1$ , essendo  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} = 0$ , si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Per il lemma del piccolo cerchio, essendo  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)z = 1$ , si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \pi i.$$

Pertanto, prendendo i limiti per  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow +\infty$ , si ottiene, sfruttando anche la parità della funzione  $\frac{\text{sen } x}{x}$  e la disparità della funzione  $\frac{\cos x}{x}$ ,

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0}} \left( \int_{-R}^{-r} f(x) dx - \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \right) \\
 &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - \pi i + 0 \\
 &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx - \pi i \\
 &= 2i \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx - \pi i
 \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

• Esempio. Sia  $a \in \mathbb{R}$ . Vogliamo calcolare gli integrali

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \text{sen } x}{x^2 + a^2} dx \quad \text{e} \quad PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$

Considero le funzioni  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z-ia}$  e  $g(z) = \frac{e^{iz}}{z+ia}$ . Fissiamo  $R > |a|$  e costruiamo il circuito  $\varphi_R$ , costituito dal segmento  $[-R, R]$ , in verso positivo, seguito dal semicerchio superiore  $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ , in verso positivo. La funzione  $f$  ha all'interno del circuito  $\varphi_R$  il polo semplice  $ia$ , mentre la funzione  $g$  è olomorfa all'interno del circuito  $\varphi_R$ . Pertanto si ha

$$\int_{\varphi_R} \frac{e^{iz}}{z-ia} dz = 2\pi i e^{-a} \quad \text{e} \quad \int_{\varphi_R} \frac{e^{iz}}{z+ia} dz = 0.$$

Per il lemma di Jordan con  $w = 1$ , essendo  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{z \pm ia} = 0$ , si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z \pm ia} dz = 0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(f(z) + g(z)) &= \frac{1}{2}e^{iz} \left( \frac{1}{z-ia} + \frac{1}{z+ia} \right) = \frac{z \cos z}{z^2 + a^2} + i \frac{z \text{sen } z}{z^2 + a^2}, \\
 \frac{1}{2ia}(f(z) - g(z)) &= \frac{1}{2ia}e^{iz} \left( \frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} \right) = \frac{\cos z}{z^2 + a^2} + i \frac{\text{sen } z}{z^2 + a^2}.
 \end{aligned}$$

Pertanto, sfruttando anche la disparità delle funzioni  $\frac{x \cos x}{x^2+a^2}$  e  $\frac{\text{sen } x}{x^2+a^2}$ , si conclude

$$\begin{aligned}
 \pi i e^{-a} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_R} \frac{1}{2} (f(z) + g(z)) dz \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{x \text{sen } x}{x^2 + a^2} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\gamma_R} \frac{1}{2} \left( \frac{e^{iz}}{z - ia} + \frac{e^{iz}}{z + ia} \right) dz \right) \\
 &= i PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \text{sen } x}{x^2 + a^2} dx
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \pi \frac{e^{-a}}{a} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_R} \frac{1}{2ia} (f(z) - g(z)) dz \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\text{sen } x}{x^2 + a^2} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\gamma_R} \frac{1}{2ia} \left( \frac{e^{iz}}{z - ia} - \frac{e^{iz}}{z + ia} \right) dz \right) \\
 &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx
 \end{aligned}$$

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \text{sen } x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a} \quad \text{e} \quad PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

Si osservi che per  $a = 0$  si riottiene il risultato già noto

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi.$$