Accelerazione del volume elementare di atmosfera nel sistema di coordinate cartesiano relativo al punto

L'accelerazione del volume elementare di atmosfera compare nell'equazione per la conservazione della quantità di moto e si tratta di una derivata totale (lagrangiana) della velocità

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

Inoltre, avendo scelto il sistema di coordinate cartesiane relativo al punto in cui si trova il volume, la velocità si esprime in funzione dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ come segue

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Si ricordi che le componenti scalari della velocità sono dei campi che dipendono dallo spazio e dal tempo:

$$u = u(x,y,z,t)$$
$$v = v(x,y,z,t)$$
$$w = w(x,y,z,t)$$

Si consideri anche il fatto che i versori cambiano a seconda della posizione del punto nello spazio (φ, λ, z) ma non nel tempo (se il punto non cambia nel tempo

In sintesi

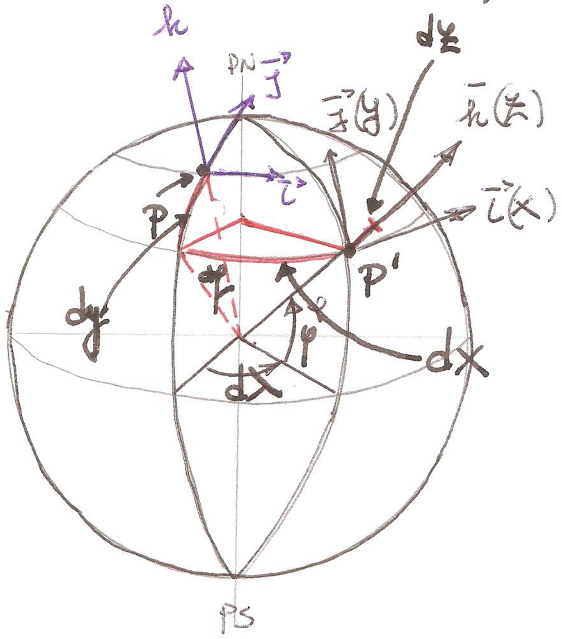
$$\vec{i} = \vec{i}(\varphi,\lambda,z) \quad \text{ma} \quad \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{j} = \vec{j}(\varphi,\lambda,z) \quad \text{ma} \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{k} = \vec{k}(\varphi,\lambda,z) \quad \text{ma} \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = 0$$

Legame tra le variazione dello posizione del punto e le distanze espresse nel sistema di coordinate cartesiane

Gli spostamenti di un punto dalla sua posizione originaria se infinitesimi, possono essere espressi come differenziali delle lunghezze rispetto al sistema di riferimento cartesiano del punto nella posizione originaria, come descritto qui di seguito



Consideriamo il punto P e il suo spostato in P'

$P(\varphi, \lambda, z)$ $\quad$ $P'(\varphi+d\varphi, \lambda+d\lambda, z+dz)$

La posizione di P' rispetto a P lungo l'asse $\vec{i}$ è data dalla seguente relazione

$$dx = (R_T + z)\cos\varphi \, d\lambda \simeq R_T \cos\varphi \, d\lambda$$

Ricordando che $R_T \gg z$

N.B. x non è una lunghezza su un cerchio massimo

Rispetto all'asse $\vec{j}$ lo spostamento è

$$dy = (R_T + z)\, d\varphi \simeq R_T \, d\varphi$$

Ricordando che $R_T \gg z$

y è una lunghezza su un cerchio massimo

Rispetto all'asse $\vec{k}$ lo spostamento è

$dz = dz$

z è una lunghezza misurata lungo $\vec{k}$

Espressione delle componenti scalari dell'accelerazione nel sistema di coordinate cartesiane relative al punto.

Ricordando che l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità e che nel sistema di coordinate cartesiane del punto essa è: $\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$ si ha

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(u\bar{i}) + \frac{d}{dt}(v\bar{j}) + \frac{d}{dt}(w\bar{k})$$

Tenendo presente che i versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ dipendono dal punto, il quale può variare la sua posizione nel tempo si ha:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{du}{dt}\bar{i} + u\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dv}{dt}\bar{j} + v\frac{d\bar{j}}{dt} + w\frac{d\bar{k}}{dt} + \frac{dw}{dt}\vec{k}$$

variazioni del campo delle velocità nel tempo

Variazioni della direzione dei versori per il cambio di posizione del punto nel tempo.

Osservazione

Le variazioni delle direzioni dei versori nel tempo (si ricordi che sono dovute a spostamenti del punto nello spazio) danno origine a contributi all'accelerazione che sono denominati "i termini di curvatura.

~~Glt~~ Gli addendi $\frac{d\bar{i}}{dt}$, $\frac{d\bar{j}}{dt}$ e $\frac{d\bar{k}}{dt}$ producono componenti dell'accelerazione che sono proiettati su direzioni anche diverse dalle rispettive direzioni individuate dai versori stessi.