Modello geostrofico di circolazione atmosferica alle medie latitudini – scala sinottica (vento geostrofico)

Considerando le componenti scalari dell'equazione per la conservazione della quantità di moto e assumendo che le accelerazioni siano nulle, cioè vi sia un bilancio esatto tra le forze (accelerazioni) che agiscono sul volume di fluido si ottengono le equazioni per la circolazione atmosferica geostrofica.

In forma vettoriale a seconda della coordinata verticale scelta

$$\begin{cases} 0 = -f\vec{k}\times\vec{V} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_H p \\ 0 = -f\vec{k}\times\vec{V} - \vec{\nabla}_H \Phi \end{cases}$$

Per la componente verticale ($w=0$) si ha staticità.

La soluzione del sistema di due equazioni per le componenti orizzontali della velocità è banale

$$0 = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1) \qquad 0 = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad\qquad 0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g &= +\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ v_g &= \frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned}}$$

In coordinate $\boxed{z}$ In coordinate $\boxed{p}$

Osservazione

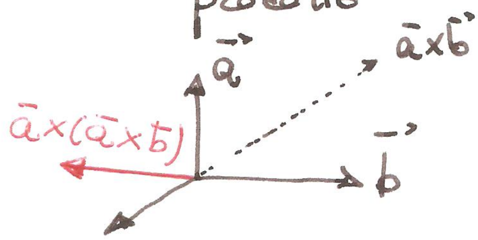
Le equazioni (1) sono equazioni diagnostiche, in quanto non coinvolgono le derivate rispetto al tempo, quindi queste soluzioni (u_g, v_g) sono stazionarie

Forma vettoriale del vento geostrofico e sue caratteristiche

Si ricordi che dalla definizione di prodotto vettoriale, dati due vettori ~~qualsiasi, ma non paralleli~~ ortogonali, siano $\vec a$ e $\vec b$ si ha:

$$\vec a \times (\vec a \times \vec b) = -c\,\frac{\vec b}{|\vec b|}$$

dove c è il modulo del vettore prodotto



Inoltre dato $\vec a \perp \vec b$ si noti che

$$|\vec a \times (\vec a \times \vec b)| = a^2 b \quad \text{con } a = |\vec a|,\ b = |\vec b|$$

Quindi una soluzione per l'equazione del bilancio geostrofico si ottiene moltiplicando l'equazione per $\vec k$ e dividendolo per lo scalare f

$$\frac{\vec k}{f} \times \left(0 = -f\vec k \times \vec V - \frac{1}{\rho}\vec\nabla_H p \right)$$

da cui essendo $\vec k \perp \vec V$ sempre nel nostro caso in esame

$$0 = \vec V - \frac{\vec k}{f\rho} \times \vec\nabla_H p \quad \text{cioè} \quad \boxed{\vec V_g = \frac{\vec k}{f\rho} \times \vec\nabla_H p}$$

analogamente in coordinate isobariche:

$$\boxed{\vec V_g = \frac{\vec k}{f} \times \vec\nabla_H \Phi}$$

Osservazioni

1) Il vento geostrofico è sempre orizzontale ($\perp \vec k$)
2) Il vento geostrofico è sempre ortogonale al gradiente di pressione o del geopotenziale, che sono le cause del moto
3) Il modulo del vento geostrofico dipende linearmente dal gradiente di pressione (o del geopotenziale)
4) Il verso del vento geostrofico cambia da un emisfero all'altro.

Lavoro compiuto "dal vento geostrofico" (motivo di stazionarietà)

Il lavoro compiuto da un volume elementare di atmosfera in moto secondo il modello geostrofico è sempre nullo.

$$dL = \bar{F}\cdot d\vec{l} \quad \text{dove } \bar{F} \text{ è la forza che agisce sul volume}$$

Mostriamolo solo nel caso delle coordinate isobariche, per le coordinate z la dimostrazione è del tutto analoga.

$$\bar{F} = \rho\left(-f\bar{k}\times\bar{V}_g - \bar{\nabla}_H\Phi\right) \quad ; \quad \bar{V}_g = \frac{\bar{k}}{f}\times\nabla_H\Phi \quad e\ d\bar{l} = \bar{V}_g dt$$

quindi

$$dL = \rho\left(-f\bar{k}\times\bar{V}_g - \bar{\nabla}_H\Phi\right)\cdot\bar{V}_g dt =$$

$$= \underbrace{\rho\left(-f\bar{k}\times\bar{V}_g\right)\cdot\bar{V}_g}_{\text{Vettori ortogonali}} dt + \underbrace{\rho\left(-\bar{\nabla}_H\Phi\right)\cdot\left(\frac{\bar{k}}{f}\times\bar{\nabla}_H\Phi\right)}_{\text{Vettori ortogonali}} = 0$$

Pertanto il modello di vento geostrofico non dissipa energia compiendo lavoro, quindi può avere caratteristica di stazionarietà

Divergenza del vento geostrofico

Nell'analisi di scala svolta all'inizio dello studio dei moti sinottici, si è concluso che la conservazione della massa si riduce al mantenimento della divergenza nulla dei moti delle masse d'aria

Calcoliamo la divergenza del vento geostrofico e verifichiamo se tale condizione è soddisfatta

Ricordiamo che $\bar{\nabla}\cdot\bar{V}_g = \dfrac{\partial u_g}{\partial x} + \dfrac{\partial v_g}{\partial y} + \dfrac{\partial w_g}{\partial z}$

In coordinate isobariche si ha:

$$\vec{\nabla}_p\cdot\vec{V}_g = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial p}(0)$$

$$= \cancel{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \cancel{\frac{1}{f}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}}$$

In quanto f dipende solo dagli spostamenti lungo il meridiano, dove la latitudine (φ) varia e i campi meteorologici sono caratterizzati da continuità e derivabilità continua

Ricordiamo inoltre che:

$$v_g = \frac{1}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad \text{e che} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dy} \quad \text{con} \quad \frac{dy}{d\varphi}=R_T$$

Pertanto $\vec{\nabla}_p\cdot\vec{V}_g = -\frac{v_g}{f}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{1}{R_T}$

essendo $f = 2\Omega\sin\varphi \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\varphi} = 2\Omega\cos\varphi$ perciò

$$\boxed{\vec{\nabla}_p\cdot\vec{V}_g = -\frac{v_g}{R_T}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}$$

con φ latitudine e R_T raggio terrestre

Quindi, in coordinate isobariche il vento geostrofico NON è non divergente, ma manifesta convergenza ($\vec{\nabla}_p\cdot\vec{V}_g<0$) se vi è componente del vento verso le zone polari. Tale convergenza è dovuta alla geometria del sistema di coordinate usato, infatti i meridiani convergono verso i poli. Ovviamente si ha divergenza nel moto verso l'equatore. Ricordando che $R_T \simeq 6.5\cdot 10^6\,m$ e $v_g \simeq 10\,m\,s^{-1}$ per latitudini superiori a quelle tropicali, dove $\cos\varphi/\sin\varphi$ resta dell'ordine dell'unità o minore si noti che $\boxed{\vec{\nabla}_p\cdot\vec{V}_g \lesssim 10^{-6}s^{-1}}$ che è un valore da confrontare con quello ottenuto dall'analisi di scala $10^{-5}s^{-1}$

In coordinate a z costante si ha

$$\vec{\nabla}_z \cdot \vec{V}_g = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(0)$$

$$= \frac{1}{\rho^2 f}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \cancel{\frac{1}{\rho f}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}} - \frac{1}{\rho^2 f}\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho f^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{\rho f}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}}$$

$$= -\frac{u_g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v_g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{v_g}{f}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ricordando che $\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{R_T}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ ed usando la forma del prodotto scalare tra $\vec{V}_g$ e $\vec{\nabla}_H \rho$ per i primi due addendi

$$\boxed{\vec{\nabla}_z \cdot \vec{V}_g = -\frac{1}{\rho}\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_H \rho - \frac{v_g}{R_T}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}$$

In questo sistema di coordinate dove z è costante nella derivazione rispetto x ed y la divergenza è dato da due addendi: uno dovuto alla convergenza dei meridiani verso i poli l'altro che coinvolge il gradiente della densità dell'aria.

Se imponiamo che la massa sia conservata con la sola imposizione di $\boxed{\vec{\nabla}_z \cdot \vec{V}_g = 0}$ ciò implica che la densità dell'aria dovrà variare lungo i meridiani.
Infatti $\vec{\nabla}_z \cdot \vec{V}_g = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_H \rho = -\frac{v_g}{R_T}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}$

dove il secondo membro è ~~neg~~ativo nell'emisfero Nord per $v_g > 0$ (moto verso il polo Nord) e per $v_g < 0$ nell'emisfero SUD (moto verso il polo SUD).

Quindi $\frac{1}{\rho}\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_H \rho < 0$ per moti verso i poli, da cui si ha che la conservazione della massa sarà garantita solo se la densità dell'aria diminuisce verso i poli (!)

I risultati ottenuti applicando la condizione di divergenza nulla al vento geostrofico sono poco aderenti alla realtà il che significa che c'è qualche incongruenza nell'insieme di equazioni ottenute adottando le semplificazioni di scala sinottica. Non c'è da stupirsi, perché le equazioni che sono congruenti con i principi fondamentali e tra di loro, sono quelle originali non semplificate.

Quindi non è conveniente utilizzare la divergenza del vento geostrofico per approssimare la reale divergenza del vento orizzontale alla scala sinottico. Ciò nonostante le altre caratteristiche del vento geostrofico sono molto aderenti alla realtà, come si vedrà anche in seguito.

Se invece assumiamo che l'equazione di continuità ammetta variazioni della densità e che orizzontalmente la divergenza del vento geostrofico sia nulla allora si ottiene un importante risultato che aiuta a comprendere la presenza delle celle di Ferrel oltre a quella di Hadley.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \qquad e \qquad \underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\vec{V}_g\cdot\vec{\nabla}_H\rho\right) = -\frac{v_g}{R_T}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\rho\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$$

assunto
$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_g = 0$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V}_H\cdot\vec{\nabla}_H\rho + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \rightarrow \sim \vec{\nabla}\cdot\vec{V}_g = 0$

$\vec{V}_H\cdot\vec{\nabla}_H\rho \rightarrow = \vec{V}_g\cdot\vec{\nabla}_H\rho$

assumiamo
$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$
in quanto non ci sono variazioni locali

$$-\frac{v_g}{R_T}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{1}{\rho}w\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial z}}_{<0} = 0$$

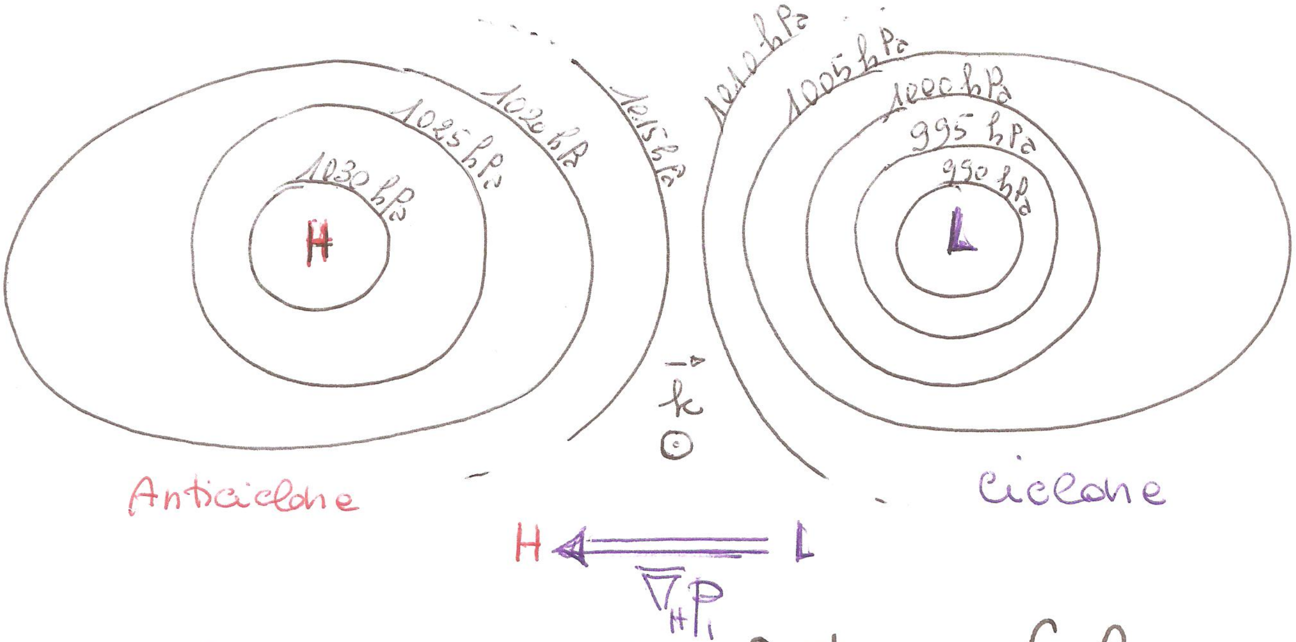
verso i poli < 0

$\boxed{w < 0 \text{ per moti verso i poli}}$

Struttura dei campi di vento geostrofico rispetto ai centri di alta e bassa pressione (alto o basso geopotenziale)

Consideriamo una tipica struttura del campo di pressione (detto anche campo barico) al suolo, alle medie latitudini

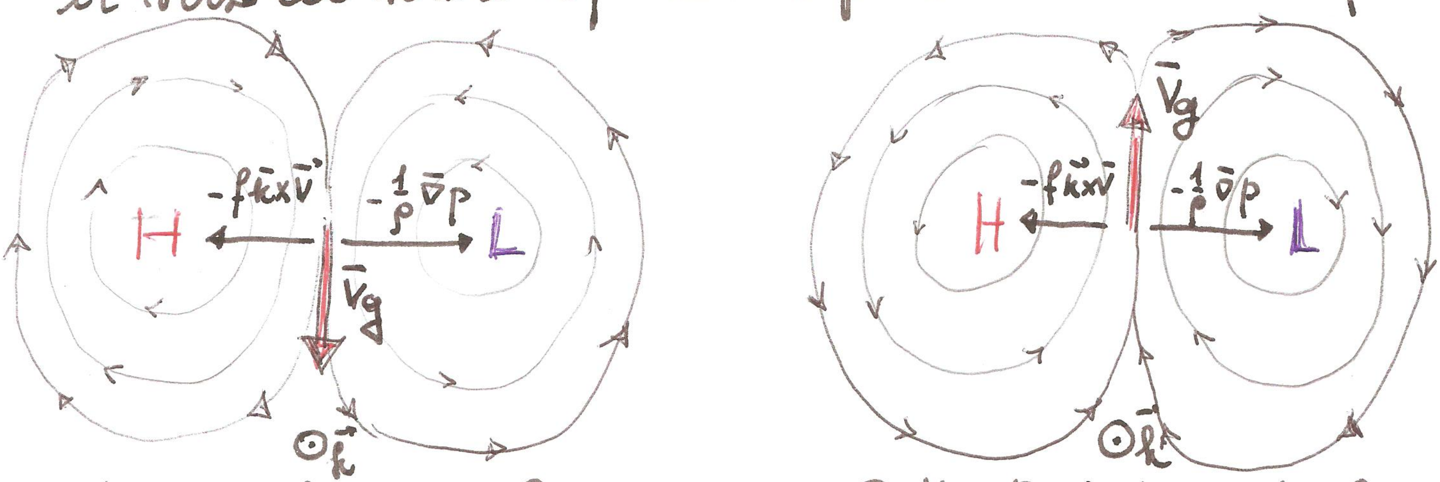
Ci saranno aree di alta pressione, indicate con H, e aree di bassa pressione, indicate con L.



Dalla forma vettoriale del vento geostrofico

$$\vec V_g = \frac{\vec k}{f\rho} \times \vec\nabla_H p$$

Si nota il vento è sempre ortogonale al gradiente di pressione, quindi parallelo (tangente) alle isobare, inoltre il verso del vettore dipende dal parametro di Coriolis f



N.H. Emisfero Nord $f>0$ S.H. Emisfero Sud $f<0$

Nomenclatura

Le aree interessate da pressione atmosferica più alta rispetto alle aree circostanti sono chiamate aree di alta pressione o anticicloni.

Le aree interessate da pressione atmosferica più bassa rispetto alle aree circostanti sono chiamate depressioni o cicloni (area ciclonica)

Osservazioni

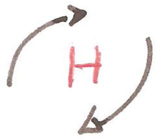
a) E' sempre il gradiente della pressione che individua i cicloni e gli anticicloni NON il valore assoluto della pressione.

b) E' il gradiente di pressione che determina l'intensità del vento geostrofico

c) Il vento geostrofico è il risultato dell'equilibrio tra ~~la~~ forza di Coriolis ed il gradiente di pressione

d) Nell'emisfero Nord la circolazione geostrofica attorno alle aree di alta e bassa pressione è sempre

oraria attorno agli anticicloni



$f>0$

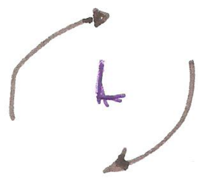
antioraria attorno ai cicloni

e) Nell'emisfero Sud la circolazione geostrofica attorno alle aree di alta e bassa pressione è sempre

antioraria attorno agli anticicloni

$f<0$

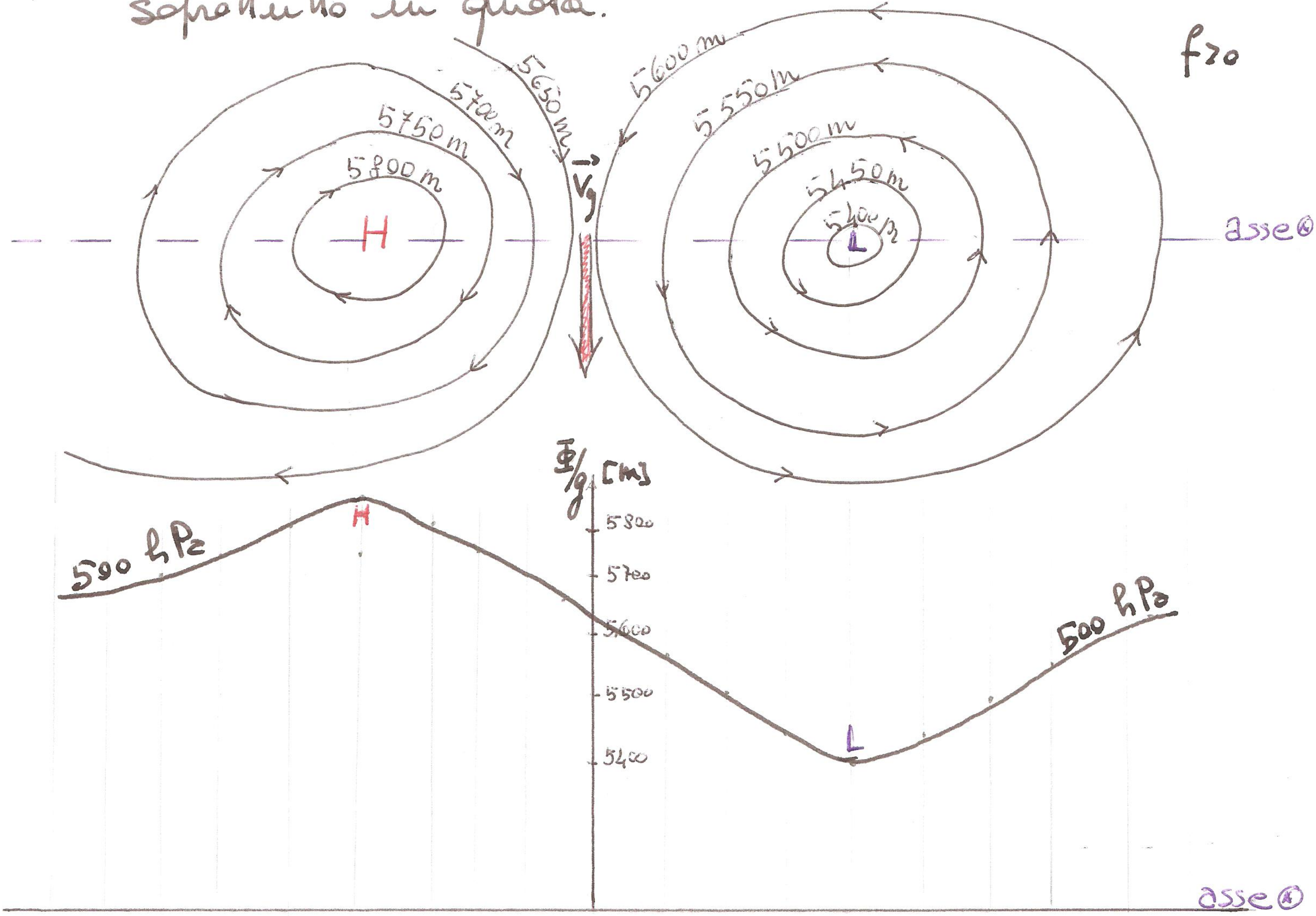
oraria attorno ai cicloni



f) Le stesse strutture, ma nel campo del geopotenziale, assumono la stessa nomenclatura. Ciò deriva dalla relazione tra il gradiente di pressione in coordinate z e quello del geopotenziale in coordinate isobariche

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_z p = \vec{\nabla}_p \Phi$$

Il campo di pressione è principalmente usato al suolo. Il campo del geopotenziale viene usato soprattutto in quota.



La superficie isobarica a 500 hPa si trova a quote variabili in funzione della posizione orizzontale e del tempo $\Phi_{500hPa}(x, y, t)$