Approssimazione piano β per le equazioni del moto

Le equazioni per la conservazione della quantità di moto di un volume d'aria, sono state sviluppate nel sistema di coordinate solidali con la rotazione terrestre, attorno al proprio asse, e tenendo conto della sfericità delle superfici parallele alla superficie terrestre.

Richiamandole e trascurando i termini di curvatura oltre che adottando l'equilibrio idrostatico, in coordinate isobariche si ha; per i soli termini rilevanti alla scala sinottica

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$

Si noti che le equazioni <u>non sono lineari</u>, infatti le derivate totali di u e v contengono i termini avvettivi. Infatti:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})u = \frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{v\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v = \frac{\partial v}{\partial t} + \boxed{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \boxed{v\frac{\partial v}{\partial y}}$$

Dove non sono stati riportati i termini $w\frac{\partial u}{\partial z}$ e $w\frac{\partial v}{\partial z}$ in quanto $w = 0$ per ipotesi di idrostaticità, assunta in queste considerazioni

Inoltre esiste una seconda fonte di non linearità, che è legata al parametro di Coriolis. Infatti il parametro di Coriolis dipende solo dalla coordinata y ma con una funzione non lineare

$$\boxed{f := 2\Omega \sin\varphi} \qquad \text{con} \quad \varphi(y)$$

Il parametro di Coriolis si annulla per $y=0$ cioè all'equatore e questo richiede un'ulteriore analisi delle equazioni, per evitare soluzioni divergenti, come quelle relative al vento geostrofico se spinte a $f=0$.

Se le soluzioni, delle equazioni per la conservazione della quantità di moto, sono cercate per regioni di superfici sferiche limitate in y, cioè $\boxed{y \in [y_0 - \Delta y; y_0 + \Delta y]}$ allora è possibile linearizzare le equazioni rispetto al parametro di Coriolis nel seguente modo.

$$\boxed{f(y) \simeq f(y_0) + \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=y_0} (y-y_0)}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(2\Omega \sin\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(2\Omega \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dy} = 2\Omega \cos\varphi \frac{d\varphi}{dy}$$

Ricordando che $y = R_T \varphi$ dove $R_T \simeq 6400\,km$ cioè è il raggio terrestre, si ha:

$$\boxed{\beta := \frac{df}{dy} = 2\Omega \cos\varphi \frac{1}{R_T} = \frac{f^*}{R_T} \lessapprox 10^{-11}\, s^{-1} m^{-1}}$$

dove si è utilizzata la definizione $f^* := 2\Omega \cos\varphi$

Quindi, fissata una posizione di riferimento per le soluzioni lungo i meridiani, le equazioni per la conservazione della quantità di moto, a scala sinottica possono esprimersi

a) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = f_0 v + \beta_0 (y-y_0) v - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

b) $$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -f_0 u - \beta_0 (y-y_0) u - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

c) $$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$

Dove è stato indicato il valore di f e di β calcolato in y_0 come f_0 e β_0 rispettivamente

La linearizzazione rispetto al parametro $\boxed{f}$ viene chiamata approssimazione del piano β.

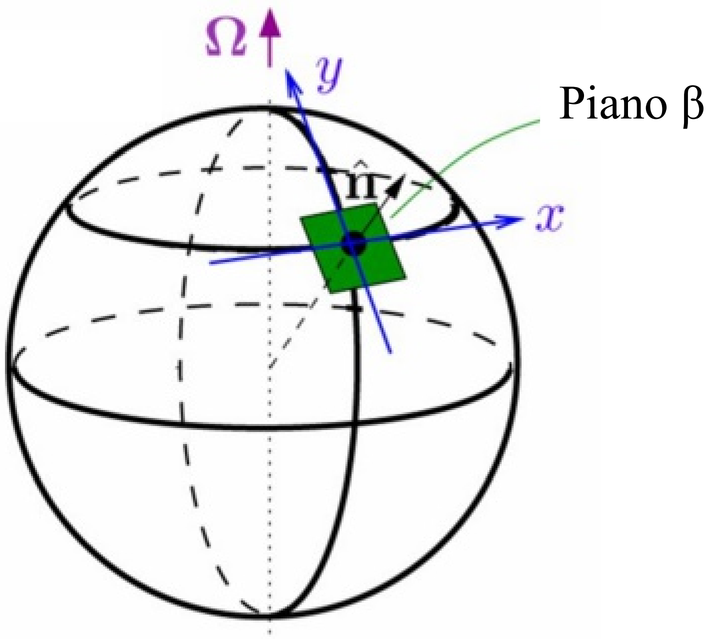
Geometricamente, l'approssimazione al piano β significa che le soluzioni delle equazioni vengono cercate su un piano tangente la superficie sferica nel punto ad $y = y_0$

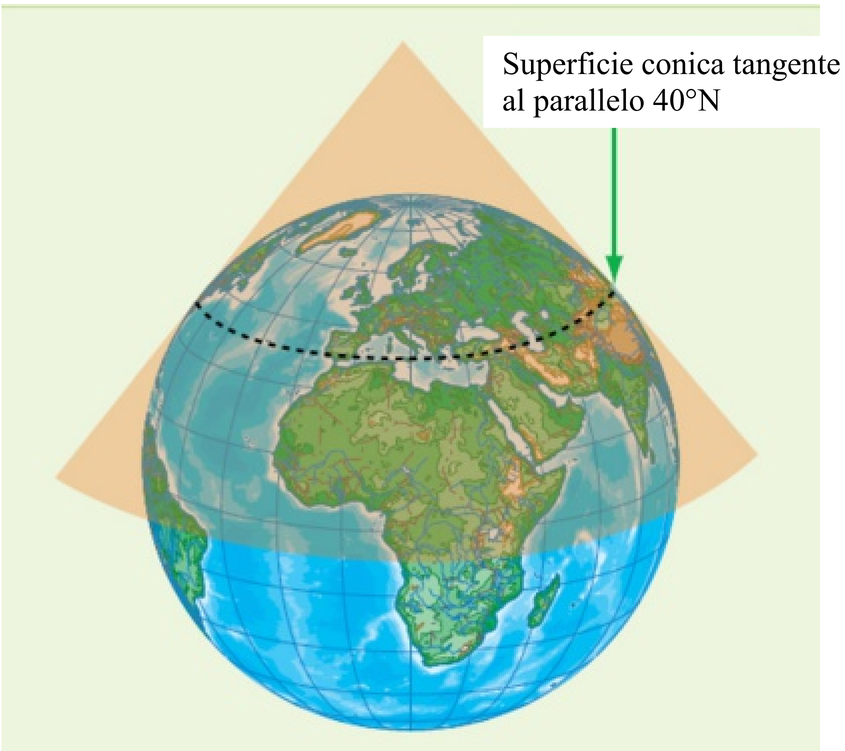
Nel caso l'approssimazione venga applicata per regioni prossime all'equatore $f_{eq} = f(y=0) = 0$ e $\beta_{eq} = \frac{2\Omega}{R_T}$. In questo caso limite si parla di piano β equatoriale

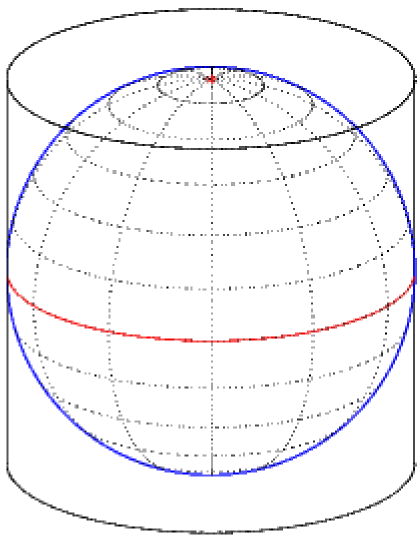
a) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \beta_{eq}\, y v - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

b) $$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\beta_{eq}\, y u - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

c) $$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$







Superficie cilindrica
tangente all'equatore