Onde di Rossby in atmosfera

In atmosfera, il flusso dominante alle medie latitudini e alla scala planetaria è caratterizzato dalle correnti occidentali, i westerlies, che sono identificate con la componente u del vettore velocità, la quale è considerabile costante lungo l'intero percorso zonale, cioè lungo i paralleli, e decisamente maggiore rispetto alla componente meridionale v.

A questo flusso prevalente si sovrappone un'ondulazione della componente meridionale (v), oltre che a quella zonale (u) a cui corrisponde un'alternanza di aree a venti geopotenziale, quindi anche pressione, modulata con la medesima periodicità spaziale.

L'ondulazione dei campi delle medie latitudini è riconoscibile anche mediante l'osservazione dei campi nuvolosi che permettono di individuare le regioni frontali calde e fredde che si alternano lungo i paralleli.

Queste onde periodiche rispetto alla coordinata x, quindi anche nel tempo, in virtù del legame esistente tra spazio e tempo nel sistema dinamico atmosferico, sono chiamate onde di Rossby.

È possibile sviluppare un modello analitico per le onde di Rossby in atmosfera a partire dalle equazioni fondamentali della fisica dell'atmosfera e di alcune ipotesi, che sono determinate dall'analisi di scala del fenomeno e dalle sue evidenze osservative.

Ipotesi per lo sviluppo del modello delle onde di Rossby

a) La dinamica delle onde di Rossby è quella della scala sinottica, ma con evidenze di NON stazionarietà delle soluzioni, ovvero ci sono delle onde che si propagano nello spazio e nel tempo. La propagazione è lungo i paralleli

b) Il sistema è barotropico, quindi il moto, cioè la velocità non varia con la quota. Il trasporto delle proprietà atmosferiche è prevalente lungo i paralleli. Il moto dei volumi d'aria è adiabatico.

Dalle ipotesi a) le equazioni per la conservazione della massa e della quantità di moto possono essere usate nella loro forma semplificata per la scala sinottica, facendo attenzione di permettere al sistema di essere non stazionario, quindi avente accelerazioni non nulle.

La conservazione della massa si riduce all'equazione di un flusso non divergente $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$ ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

La conservazione della quantità di moto conserverà solo i termini importanti alla scala sinottica, quindi saranno trascurabili i termini di curvatura e i termini dell'accelerazione di Coriolis aventi ordini di grandezza parecchio inferiori rispetto ai principali. Ovviamente sarà confermato l'equilibrio idrostatico, ovvero

$$\bar{i}) \quad \frac{du}{dt} = fv - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\bar{j}) \quad \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\bar{k}) \quad 0 = \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho}$$

(equilibrio idrostatico)

Equazioni in coordinate isobariche

Dall'ipotesi b) le equazioni per la conservazione dell'energia e di stato non sono necessarie per lo sviluppo del modello.

Dall'equazione dell'equilibrio idrostatico si ottiene la soluzione $w(x,y,p,t)=0$, cioè non ci sono moti verticali

Ne consegue che la conservazione della massa si riduce a due soli addendi:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$$

Anche nelle due equazioni scalari per la conservazione della quantità di moto i termini avvettivi si riducono a due addendi, ovvero

$$\text{i)}\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\boxed{w\frac{\partial u}{\partial z}}=fv-\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$w=0 \Rightarrow \quad =0$$

$$\text{j)}\quad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\boxed{w\frac{\partial v}{\partial z}}=-fu-\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Dall'ipotesi b) essendo il trasporto delle proprietà atmosferiche prevalente lungo i paralleli (avvezione zonale) si avrà $\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right| \gg \left|v\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ e $\left|u\frac{\partial v}{\partial x}\right| \gg \left|v\frac{\partial v}{\partial y}\right|$

Pertanto le due equazioni per la conservazione della quantità di moto si riducono a:

$$\text{i)}\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=fv-\frac{\partial \phi}{\partial x}}; \qquad \text{j)}\quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}=-fu-\frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

Consideriamo la forma delle soluzioni alle seguenti tre equazioni che descrivono il moto che stiamo investigando: (4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Big\} \quad \text{conservazione massa}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= fv - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} &= -fu - \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \text{conservazione quantità di moto}$$

Ci sono 3 equazioni scalari per tre campi incogniti (u, v, ϕ) || quindi le soluzioni sono in principio determinabili

Il moto che cerchiamo è composto dal flusso principale verso ovest (westerlies) a cui si sovrappone l'ondulazione delle onde di Rossby quindi

$$u(x,y,t) = U + \hat{u}(x,y,t)$$

$$v(x,y,t) = \hat{v}(x,y,t) \qquad (*)$$

U := velocità costante nello spazio e nel tempo $U > 0$
questo è il valore medio della velocità verso ovest

$\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono le componenti che si sommano a U e sono oscillanti in x e t, cioè sono onde che si propagano lungo i paralleli (x)

Considerazioni sul geopotenziale ϕ. Questa funzione contiene tutta l'informazione sulla causa del moto che stiamo modellizzando, quindi dovrà spiegare la velocità costante U e le sue componenti oscillanti.
Quindi

$$\phi(x,y,t) = \Phi(x,y) + \hat{\phi}(x,y,t) \qquad (*)$$

$\bar{\Phi}(x,y)$ darà permettere di ottenere la soluzione del set di equazioni in assenza di oscillazioni

$\hat{\phi}(x,y,t)$ darà aggiungere le informazioni che determinano le oscillazioni

Otteniamo informazioni su $\bar{\Phi}(x,y)$ studiando le equazioni nel caso in cui $\bar{U}$ sia la sola soluzione, cioè

$\hat{u}(x,y,t) = \hat{v}(x,y,t) = \hat{\phi}(x,y,t) = 0$

Dalla conservazione della massa si ottiene un'identità

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}}_{=0} = 0$$

$\bar{U}$ non dipende da x, y $\qquad$ $v = 0$

Dalle equazioni di conservazione della quantità di moto

i) $$\underbrace{\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}}_{=0} = \underbrace{f\bar{v}}_{=0} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = 0$$ cioè

$\bar{\Phi}$ non dipende da x

$\bar{\Phi}(y)$

j) $$\underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\bar{U}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}}_{=0} = -f\bar{U} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\bar{U} = -\frac{1}{f}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}}$$

$\bar{\Phi}(y)$ determina $\bar{U}$ secondo il modello geostrofico

Integrando $\dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -f\bar{U}$ ricordando che $f := 2\Omega \sin\varphi$

e $d\varphi R_T = dy$ con φ latitudine e R_T raggio terrestre, si ottiene il profilo meridionale del geopotenziale con massimo all'equatore

Ricerca delle soluzioni per le componenti oscillanti

$$\hat{u}(x,y,t) \quad ; \quad \hat{v}(x,y,t) \quad ; \quad \hat{\phi}(x,y,t)$$

Visto che le onde di Rossby si propagano lungo x cerchiamo delle funzioni della forma seguente

$$\psi(x,y,t) = \underset{\uparrow \text{ ampiezza oscillazione}}{\psi_0(y)}\, \underbrace{e^{i(\omega t - kx)}}_{\text{parte oscillante}}$$

Conseguentemente

$$\hat{u}(x,y,t) = u_0(y)\, e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\hat{v}(x,y,t) = v_0(y)\, e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\hat{\phi}(x,y,t) = \phi_0(y)\, e^{i(\omega t - kx)}$$

Ricordiamo che la parte oscillante della funzione è comune a tutte ovvero

$$\frac{\hat{u}(x,y,t)}{u_0(y)} = \frac{\hat{v}(x,y,t)}{v_0(y)} = \frac{\hat{\phi}(x,y,t)}{\phi_0(y)} = e^{i(\omega t - kx)}$$

Sostituendo le funzioni $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ e $\phi(x,y,t)$ nelle equazioni di continuità e per il momento si ottengono le relazioni tra i campi oscillanti.

Dalla ipotesi b) il trasporto (avvezione) è principalmente dovuto alla velocità $\bar{U}$ da cui le equazioni per il momento risultano essere lineari

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} = fv - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} = -fu - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

} conservazione momento linearizzate

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

} conservazione della massa

Alcune osservazioni generali sulle derivazioni delle funzioni che portano l'informazione sulla componente oscillante

- $$\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t} = i\omega\, \psi(x,y,t) = i\omega\, \psi_0(y)\, e^{i(\omega t - kx)}$$
- $$\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial x} = -ik\, \psi(x,y,t) = -ik\, \psi_0(y)\, e^{i(\omega t - kx)}$$
- $$\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_0(y)}{\partial y}\, e^{i(\omega t - kx)}$$

Da cui le equazioni del modello diventano

$$\frac{\partial(\bar{U}+\hat{u})}{\partial t} + U\frac{\partial(\bar{U}+\hat{u})}{\partial x} = f\hat{v} - \frac{\partial(\Phi+\hat{\phi})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = -f(\bar{U}+\hat{u}) - \frac{\partial(\Phi+\hat{\phi})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\bar{U}+\hat{u})}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0$$

dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{ik\, u_0(y) = \frac{\partial v_0(y)}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = -ik\hat{u}, \qquad \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} e^{i(\omega t - kx)}$$

dalle equazioni per il momento

$$i)\quad \underbrace{\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \underbrace{\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}}_{=0} + \bar{U}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = f\hat{v} - \underbrace{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}$$

$$j)\quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = -f\bar{U} - f\hat{u} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}$$

$$-f\bar{U} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0$$

moto stazionario prevalente geostrofico responsabile del trasporto ($\bar{U}$) dei Westerlies

da cui

$$i')\quad i\omega u_0(y) - ik\bar{U}u_0(y) = f v_0(y) + \phi_0(y)\cdot ik$$

$$j')\quad i\omega v_0(y) - ik\bar{U}v_0(y) = -f u_0(y) - \frac{\partial \phi_0(y)}{\partial y}$$

Sostituendo la relazione $ik\,u_0(y) = \frac{\partial v_0(y)}{\partial y}$ si ottengono due equazioni con i soli campi v_0 e ϕ_0

$$i)\quad i[\omega - k\bar{U}]\frac{1}{ik}\frac{\partial v_0(y)}{\partial y} = f v_0(y) + \phi_0(y)\, ik$$

$$j)\quad i[\omega - k\bar{U}]\, v_0(y) = -f\frac{\partial v_0(y)}{\partial y}\left(\frac{1}{ik}\right) - \frac{\partial \phi_0(y)}{\partial y}$$

Derivando l'equazione per la componente $\bar{i}$ rispetto ad y, moltiplicando quella per $\bar{j}$ per $(+ik)$ e sommandole si ottiene la seguente equazione solo per $v_0(y)$

$$\bar{i})\frac{\partial}{\partial y}\Big| \quad i[\omega - k\bar{U}]\frac{1}{ik}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v_0 + f\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial \phi_0}{\partial y}ik$$

$$\bar{j})\cdot(ik)\Big| \quad -k[\omega - k\bar{U}]v_0 = -f\frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(+\frac{\partial \phi_0}{\partial y}ik\right)$$

Ricordiamo che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è la variazione del parametro di Coriolis lungo il meridiano che viene definito $\beta := \frac{df}{dy}$ (ricordare che $f(y)$)

$$\frac{[\omega - k\bar{U}]}{k}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - k[\omega - k\bar{U}]v_0 = \beta v_0$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + v_0\left[\frac{\beta}{U - \frac{\omega}{k}} - k^2\right] = 0$$

Ricordando che $\frac{\omega}{k}$ per un'onda corrisponde alla velocità di fase $c := \frac{\omega}{k}$; quindi la soluzione $v_0(y)$ cercata deve soddisfare l'equazione

$$\boxed{\frac{d^2 v_0}{d y^2} + v_0\left[\frac{\beta}{U - c} - k^2\right] = 0}$$

Vista la dipendenza unicamente da y di $v_0(y)$ si ha che $\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{d^2 v_0}{dy^2}$

Nel caso in cui $\boxed{\left[\frac{\beta}{U-c} - k^2\right] > 0}$ l'equazione da risolvere è quella dell'oscillatore armonico. Tale condizione si ha se $0 \le c < U$ sicuramente ovvero se la velocità di fase è quella di onde che si propagano verso ovest più lentamente della velocità del flusso geostrofico in cui sono inserite

In generale ci sono due possibilità

$$U - c > 0 \Rightarrow \frac{\beta}{U-c} > k^2 \Rightarrow c > U - \frac{\beta}{k^2}$$

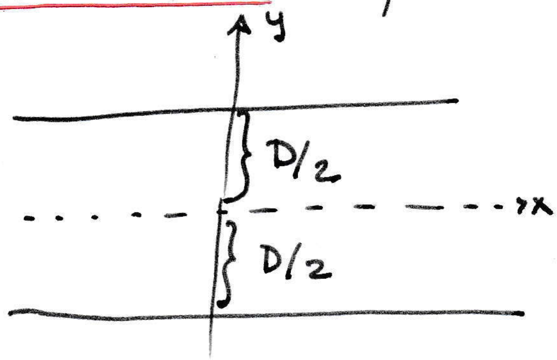
$$U - c < 0 \Rightarrow \frac{\beta}{U-c} > k^2 \Rightarrow c < U - \frac{\beta}{k^2}$$

Sicuramente in entrambi i casi va garantito $c \neq U$

La soluzione generale dell'equazione per $v_0(y)$ è

$$\boxed{v_0(y) = A \cos\left[\left(\frac{\beta}{U-c} - k^2\right)^{1/2} y\right] + B \sin\left[\left(\frac{\beta}{U-c} - k^2\right)^{1/2} y\right]}$$

Per individuare il valore da associare a ciascuna delle due costanti A e B sono da prendere in considerazione le condizioni al contorno del fenomeno che si intende far descrivere alle soluzioni. Nel nostro caso, le onde di Rossby esisteranno in una regione limitata compresa tra due paralleli che assumiamo distare $D/2$ da un parallelo di riferimento a cui associamo, senza perdere di generalità il valore $y=0$



Quindi $y \in [-D/2 ; D/2]$

L'ampiezza dell'onda dovrà essere massima per $y=0$ mentre ai bordi dovrà essere sempre nulla, cioè estinguersi

Quindi $v_0(y=0) = \max$ sempre $\Rightarrow A\cdot 1 + B\cdot 0 = A$
perciò la costante A è il valore massimo dell'ampiezza sempre e ciò implica che B deve essere zero
Inoltre $v_0(y = \pm D/2) = 0$ sempre $\Rightarrow \left[\frac{\beta}{U-c} - k^2\right]^{1/2} \cdot \left(\pm\frac{D}{2}\right) = n\frac{\pi}{2}$
con $n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$

Quindi la soluzione specifica per le onde osservate alle medie latitudini prevede

$$\left(\frac{\beta}{U-c} - k^2\right)\left(\frac{D^2}{4}\right) = n^2\frac{\pi^2}{4}$$

e ricordando che $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ con λ lunghezza dell'onda

si ha

$$\boxed{c = U - \frac{\beta\lambda^2/4\pi^2}{1 + \left(\frac{n\lambda}{2D}\right)^2}}$$

Nel caso in cui D venga fatto tendere a $+\infty$, cioè condizioni al contorno di annullamento dell'ampiezza dell'onda molto lontano da $(y=0)$ il suo parallelo centrale si ha

$$\boxed{c = U - \beta\frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

che è la relazione tipica delle onde di Rossby in atmosfera
Si noti che per onde aventi lunghezza (λ) contenute, sarà sempre $\boxed{0 \leq c < U.}$

Ad ogni modo, in questa condizione limite ($D \to +\infty$) non è escluso che λ sia sufficientemente grande da rendere $c < 0$, quindi da generare onde che si propagano verso ovest, opposte al flusso dominante (U) alle medie latitudini. Questo fenomeno, seppur raro, è stato osservato.

Se supponiamo di considerare onde stazionarie, cioè che non cambiano posizione in x nel tempo, si ha

$$c = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = U - \beta \frac{\lambda^2}{4\pi^2}$$

La lunghezza di tali onde è determinata dall'intensità del flusso dominante (U) e dal parametro β

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}$$

Considerando che il valore di β alle medie latitudini è circa $1.6 \cdot 10^{-11}\ m^{-1}s^{-1}$ e che U sia prossimo a $50\ ms^{-1}$ inoltre che il raggio terrestre è approssimativamente $6.4 \cdot 10^{6}\ m$ il numero di onde stazionarie che il modello prevede sono n_W

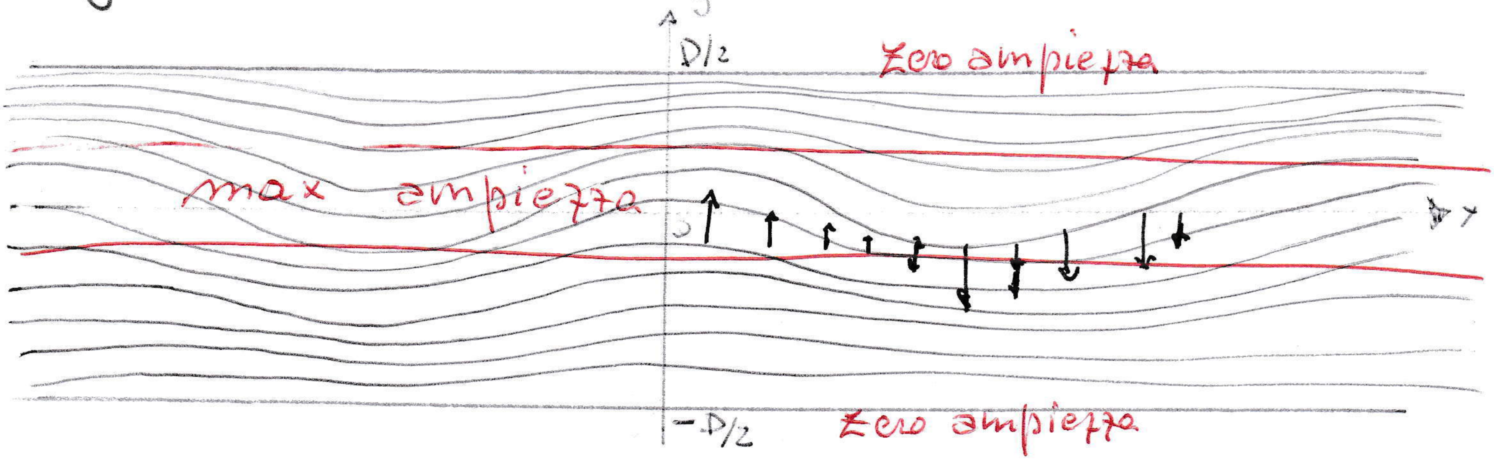
$$n_W = \frac{\text{lunghezza parallelo}}{\lambda} = \frac{2\pi R_T \cos\varphi}{\lambda} \simeq 3$$

Questo numero è sorprendentemente, viste le approssimazioni introdotte nel modello, prossimo alla realtà. Ci sono circa 3 onde stazionarie attorno al pianeta e dalle 5 alle 8 dovute alla baroclinicità e allo sviluppo dei cicloni extratropicali.

La relazione generale:

$$\boxed{c = U - \frac{\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2}}{1+\left(\frac{n\lambda}{2D}\right)^2}}$$

Va sotto il nome di velocità delle onde di Haurwitz che descrive le onde che si sviluppano in un dominio finito lungo y



La soluzione trovata per il campo $\hat{v}(x,y,t)$ permette di determinare le soluzioni per gli altri campi, ovvero

$$u_0(y) = \frac{1}{ik}\frac{dv_0(y)}{dy}$$

$$\phi_0(y) = \frac{1}{ik}\left[-f\, v_0(y) + i\, u_0(y)\,[\omega - kU]\right]$$