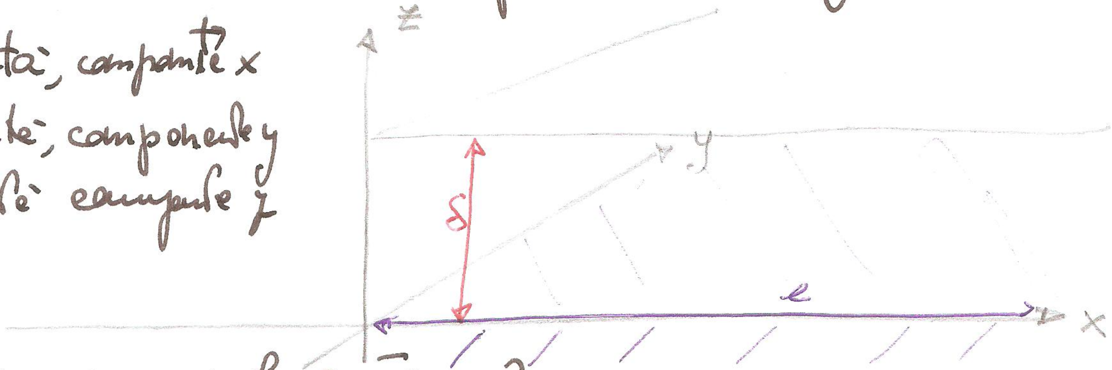
Modello generale per lo strato limite non turbolento

Dalle considerazioni e le assunzioni che portano alla definizione di Strato Limite si è visto che, nello strato limite sono rispettate le seguenti relazioni

$u \to$ velocità, componente x
$v \to$ velocità, componente y
$w \to$ velocità, componente z



$z < 0$ mezzo confinante
$z \geq 0$ fluido
} occupazione dello spazio

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$ cioè $$\boxed{\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \simeq 1}$$ in tutto lo strato limite

Ciò comporta:

a) $\boxed{\frac{\delta}{l} \simeq \frac{1}{\sqrt{R_e}}}$ b) $\boxed{\frac{w}{u} \simeq \frac{1}{\sqrt{R_e}}}$ dove R_e è il numero di Reynolds $\boxed{R_e = \frac{u l}{\nu}}$

La costruzione di un modello generale per lo strato limite necessita della definizione delle 3 equazioni per la conservazione della quantità di moto, della equazione per la conservazione della massa e della definizione delle condizioni al contorno.

Nel caso in cui si assuma che le caratteristiche dello strato limite non dipendano dalla dimensione che è ortogonale alla direzione prevalente di moto del fluido e giacente sulla superficie del mezzo confinante, le equazioni per la quantità di moto si riducono a due sole

Consideriamo le condizioni al contorno of problema

1) Sicuramente deve essere valida la no-slip condition quindi

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,z,t) = 0 \\ w(x,y,z,t) = 0 \end{array}\right\} \quad z = 0$$

Ricordiamo che u, v, w sono definite solo se $z \geq 0$

$v(x,y,z,t) = 0$ } per assunzione, comunque anch'esso deve soddisfare la no-slip condition

Sicuramente lontano dal mezzo confinante la velocità parallela al mezzo confinante non sarà funzione della distanza z

2) $$u(x,y,z,t) = U(x,y,t) \quad \boxed{\text{se } \frac{z}{\delta} \to +\infty}$$

U è la velocità del fluido non influenzato dal mezzo confinante e sarà noto grazie a misure o alla conoscenza del campo di pressione, in quella regione di fluido, la quale ne determina il moto secondo il modello di fluido inviscido

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

osservazione: nel caso stazionario di un fluido incomprimibile si ha che il teorema di Bernulli è soddisfatto in quella regione di spazio lontano dal confinante

3) È necessario conoscere un profilo di velocità per u ad un certo punto di coordinata x cioè $u(x_0,y,z,t)$ (ricordiamo che vista l'indipendenza rispetto alla y si ha che si deve conoscere

$$\boxed{u(x_0,z,t_0)}$$

Nel caso stazionario, se si assume ciò non è necessario specificare il momento temporale in cui si conosce u, quindi $\boxed{u(z) \text{ a } x = x_0}$

Adimensionalizzazione delle equazioni per la conservazione della quantità di moto e della massa.

Con lo scopo di ritenere e valutare solo i contributi alle equazioni (addendi) aventi lo stesso ordine di grandezza, tutte le grandezze (campi) saranno adimensionalizzati utilizzando le grandezze scala dedotte o note dall'analisi condotta preliminarmente sullo strato limite

Usiamo ℓ, δ e p_0, U_0 $\begin{cases} \text{dove } p_0 \text{ è } p_0(x_0, y, z, t) \\ \text{dove } U_0 \text{ è } U(x_0, y, z, t) \end{cases}$ per $\frac{z}{\delta} \to +\infty$

$$\hat{x} = \frac{x}{\ell} \; ; \; \hat{y} \text{ (non è necessario in quanto già assunto non considerato)} \; ; \; \hat{z} = \frac{z}{\delta} = \frac{z}{\ell}\sqrt{Re}$$

$$\hat{u} = \frac{u}{U_0} \; ; \; v(\text{ " " ... }) \; ; \; \hat{w} = \frac{w}{u}\sqrt{Re} = \frac{w}{U_0}\sqrt{Re}$$

$$\hat{p} = \frac{p - p_0}{\rho U_0^2}$$

ρ è la densità del fluido

Pertanto le equazioni hanno gli operatori che si riscrivono in forma adimensionale, anche quello temporale ricordando che il tempo scala è dato dalle scale della velocità e dello spazio

$$\hat{t} = \frac{t\, U_0}{\ell}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \cdot \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \boxed{\frac{U_0}{\ell}\frac{\partial}{\partial \hat{t}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \boxed{\frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z}} = \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = \boxed{\frac{\sqrt{Re}}{\ell}\frac{\partial}{\partial \hat{z}}}$$

Scriviamo l'equazione per la componente x della conservazione delle quantità di moto nella sua forma generale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{=0} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

per ipotesi di dipendenza dei campi solo dalle coordinate x e z (flusso bidimensionale)

Applicando gli operatori adimensionalizzati sui campi che vengono espressi nella forma adimensionale si ha:

$$\boxed{\frac{U_0^2}{\ell}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \boxed{\frac{U_0^2}{\ell}}\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \boxed{\frac{U_0^2}{\ell}\frac{\cancel{\sqrt{R_e}}}{\cancel{\sqrt{R_e}}}}\hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{1}{\cancel{\rho}}\,\boxed{\frac{\cancel{\rho}U_0^2}{\ell}}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \boxed{\nu\frac{U_0}{\ell^2}}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \boxed{\frac{U_0^2\,\nu R_e}{\ell^2}}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}$$

$$\frac{U_0^2}{\ell}\left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}}\right] = \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \underbrace{\frac{1}{R_e}}_{\text{unica dipendenza dal numero di Reynolds}}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right]\frac{U_0^2}{\ell}$$

Scriviamo l'equazione per la componente z della conservazione delle quantità di moto nella sua forma adimensionale generale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial w}{\partial y}}_{=0} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{=0} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

per ipotesi di dipendenza dei campi solo dalle coordinate x e z

Applicando gli operatori adimensionali e raccogliendo i fattori comuni

$$\underbrace{\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}\right]}_{\text{Dipendono dal numero di Reynolds}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \underbrace{\frac{1}{R_e^2}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2}}_{\text{Dipendono dal numero di Reynolds}}$$

Unico addendo che non dipende dal numero di Reynolds

Scriviamo l'equazione per la conservazione della massa in forma adimensionale (Divergenza nulla)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\substack{=0\\ \text{per ipotesi}}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{V_0}{l}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{V_0}{\sqrt{Re}}\frac{\sqrt{Re}}{l}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$ da cui

$$\frac{V_0}{l}\left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}\right] = 0$$

Quindi il set completo di equazioni adimensionali che descrivono il fluido è il seguente:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \boxed{\frac{1}{Re}}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \qquad \text{per } x$$

$$\boxed{\frac{1}{Re}}\left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}\right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \boxed{\frac{1}{Re^2}}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \boxed{\frac{1}{Re}}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \qquad \text{per } z$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

Osservazione

Le equazioni debbono rimanere valide (soddisfatte) anche per $Re \longrightarrow +\infty$ come da ipotesi di Prandtl, quindi è possibile considerare rilevanti, ai fini della descrizione del sistema fisico solo i termini che non dipendono da $1/Re$

Quindi il sistema di equazioni da usare per lo strato limite, qualsiasi esso sia in quanto è stato adimensionalizzato, si riduce a

1) $$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}$$

2) $$0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}}$$

3) $$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

In queste equazioni non compare più il numero di Reynolds, quindi daranno dare soluzioni valide per qualsiasi regime di moto (qualsiasi numero di Reynolds purché $Re \gg 1$ anche $Re \to +\infty$)

Il numero di Reynold è stato utilizzato solo per definire la scala spaziale alla dimensione z e della corrispondente velocità mettendola in relazione con l e $\bar{U}_0$ rispettivamente.

Osservazione

La restrizione di trattare un flusso bi-dimensionale non invalida il modello tridimensionale, in quanto l'equazione per la coordinata y sarà normalizzata e scalata allo stesso modo di quanto fatto per la componente x.

Osservazione

Il modello non fa alcuna ipotesi sulla forma della superficie del mezzo confinato. Si assume solamente che le grandezze scala non dipendano da curvature della superficie, ipotesi ragionevole nella maggior parte dei casi.

Osservazione

Nella realizzazione del modello di strato limite qui sviluppato, non si fa uso delle informazioni riguardanti il mezzo confinante e la sua superficie (rugosità), quindi il modello è valido se le condizioni al contorno sono rispettate.

Pertanto solo la no-slip condition che deve essere assunta descrittiva della realtà e la dipendenza solo locale ($z \leq \delta$) dei campi dalla coordinata z.

Quindi il modello è valido anche nel caso la superficie sia un'interfaccia tra due fluidi aventi velocità molto diverse.

Osservazione

In questo modello di strato limite la pressione non varia lungo z ma può variare lungo x

N.B.

Le equazioni non hanno considerato il contributo della gravità, che invece è tipica dello strato limite atmosferico e neppure dell'accelerazione dovuta alla forza di Coriolis

Infine

Non ci sono equazioni prognostiche per la component z della velocità quindi ci dobbiamo aspettare stazionarietà, sempre, lungo z