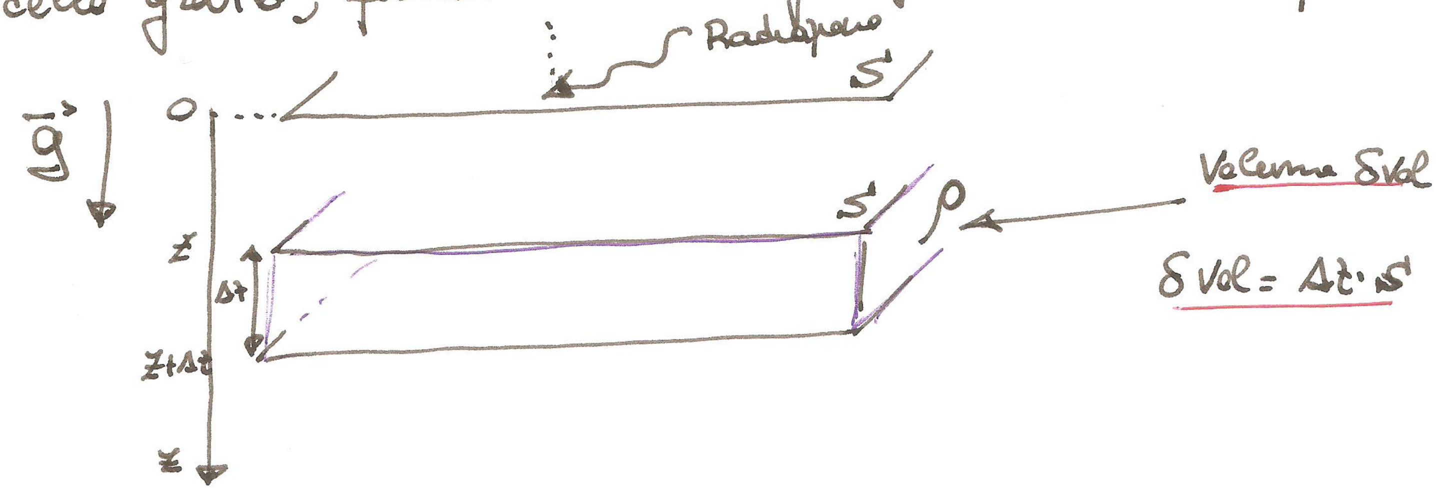
Modello di propagazione del calore dalla superficie nel mezzo confinante l'atmosfera

Ipotesi

a) La radiazione ad onda corta viene assorbita dalla superficie del mezzo confinante, almeno per una frazione; si ricordi la definizione di albedo.

b) Il mezzo è continuo ed omogeneo e si estende dalla superficie verso l'interno del mezzo confinante all'infinito

c) Il trasporto dell'energia, all'interno del mezzo continuo, avviene prevalentemente per conduzione. L'irraggiamento viene considerato nullo vista la densità del mezzo confinante (terreno o acqua). La convezione è considerata nulla in quanto per il terreno non è un processo presente, mentre per l'acqua non è efficace perché il riscaldamento del mezzo avviene dall'alto ($\vec{g}$), nella stessa direzione della gravità, favorendo la stratificazione stabile del fluido.



$\delta Vol = \Delta z \cdot S$

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia al volume di mezzo confinante δVol

$$\boxed{dQ = C_v\, dT + p\, dV}$$

energia netta che entra o viene prodotta nel δVol

variazione energia interna do δVol

lavoro svolto da δVol

Assunzione

Il lavoro svolto dal sistema (δvol) è trascurabile.

Tale assunzione è molto aderente alla realtà sia nel caso del terreno che dell'acqua. In quest'ultimo caso è facilmente generalizzare il modello rimuovendo questa assunzione e attribuendo un coefficiente di espansione al fluido.

C_V := capacità termica di δvol (a volume costante)

$$C_V = \Delta m \cdot c_v \qquad \text{con } \Delta m \text{ massa di } \delta vol$$

$$\Delta m = S' \cdot \Delta z \cdot \rho \qquad \text{da cui}$$

$$\boxed{C_V = S' \cdot \Delta z \cdot \rho \, c_v}$$

c_v:= calore specifico a volume costante

$$dQ = dt\Big[\oiint_{Sup(\delta vol)} -\bar{q} \cdot \bar{n} \, d\sigma +$$

integrale del flusso di calore attraverso le superfici che delimitano δvol. N.B. il dQ sarà positivo se il flusso netto è entrante nel δvol ($-\bar{q} \cdot \bar{n} \, d\sigma$) ⊛

$$+ \iiint_{\delta vol} F(\bar{r}, t) \, dVol\Big]$$

integrale dell'energia rilasciata (>0) o assorbita (<0) nell'unità di tempo all'interno del volume δvol. (es. evaporazione acqua, reazioni chimiche, ecc.)

Se il flusso di calore ⊛ avviene per conduzione, allora sarà proporzionale al gradiente termico (Legge di Fourier)

$$\boxed{\vec{q} = -k \, \vec{\nabla} T}$$

coefficiente di conducibilità termica

Verso opposto al $\vec{\nabla}$ (2° principio Termodinamica)

$$dQ = C_v\, dT + \underbrace{p\, dV}_{\simeq 0}$$ Ipotesi!

$$\boxed{dt\left[\oiint_{Sup(\delta vol)} -(-k\vec{\nabla}T\cdot\vec{n})\,d\sigma + \iiint_{\delta vol} F(\vec{r},t)\,dvol\right] = S\,\Delta z\,\rho\, C_v\, dT}$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale e ricordando che $\delta vol = S\cdot\Delta z$, inoltre che il gradiente termico è ortogonale alla superficie S (ipotesi c)) si ha

$$dt\iiint_{\delta vol}(\vec{\nabla}\cdot(+k\vec{\nabla}T) + F(\vec{r},t))\,dvol = S\,\Delta z\,\rho\, C_v\, dT$$

$$\boxed{dt\,[+k\nabla^2 T + F_m(t)]\,S\,\Delta z = S\,\Delta z\,\rho\, C_v\, dT}$$

dove per ipotesi b) si è considerato k uniforme e costante e $F_m(t) := \frac{1}{\delta vol}\iiint_{\delta vol} F(\vec{r},t)\,dvol$ il valore medio volumetrico di produzione energetica

Conseguentemente

$$dt\,[+k\nabla^2 T + F_m(t)] = \rho\, C_v\, dT$$

o nella forma di equazione differenziale di tipo parabolico

$$\boxed{\rho\, c_v\frac{\partial T}{\partial t} - k\nabla^2 T = F_m(t)}$$

Definendo $\boxed{\alpha^2 := \frac{k}{\rho\, c_v}}$ coefficiente di conduzione del calore nel mezzo (è positivo o nullo sempre) (caso escluso)

$\boxed{f_m(t) := \frac{F_m(t)}{\rho\, C_v}}$ funzione sorgente

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha^2 \nabla^2 T = f_m(t)$$

Caso particolare in cui la temperatura è funzione solo del tempo e di una variabile spaziale z (parallela a $\vec{g}$)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

da cui

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f_m(t)}$$

Combinazioni lineari delle soluzioni di questa equazione, e di quella omogenea ($f_m(t)=0$) saranno soluzioni dell'equazione. Consideriamo il caso, molto diffuso nella realtà dell'equazione omogenea, cioè casi in cui non ci sono contributi energetici interni al volume di mezzo considerato

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0}$$

Consideriamo T una funzione di t e z come prodotto di due funzioni che dipendano esclusivamente dalle rispettive variabili (metodo della separazione delle variabili)

$$\boxed{T(z,t) = A(z) \cdot B(t)}$$

dipende solo dalla coordinata spaziale

dipende solo dal tempo.

$$A(z)\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} B(t) = 0$$

Assumiamo che $A(z) \neq 0 \quad \forall z \in \{\text{dominio di } z\}$

$B(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

inoltre ricordiamo che $\alpha^2 \geq 0$ ma $\alpha^2 = 0$ indica che non c'è trasmissione per conduzione quindi lo escludiamo da cui $\alpha^2 > 0$.

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial t}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\frac{1}{A} = \lambda^2}$$

λ è una costante, complessa nella sua concezione generale, che è stata definita tramite il quadrato per convenienza nella ricerca delle soluzioni in campo complesso.

N.B. λ non dipende né da z e né da t in quanto è comune ad entrambe le identità che coinvolgono solo B ed A.

La soluzione di $\boxed{\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha^2\lambda^2}$ più generale

è: $$\boxed{B(t) = B_0\, e^{\alpha^2\lambda^2 t}}$$ (B_0 è una costante)

La soluzione di $\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \lambda^2 A}$ più generale

è: $$\boxed{A(z) = A_{0-}\, e^{-\lambda z} + A_{0+}\, e^{\lambda z}}$$

$\left.\begin{matrix} A_{0-} \\ A_{0+} \end{matrix}\right\}$ sono costanti.

La soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

è

$$\boxed{T(z,t) = \left(A_{0-} e^{-\lambda z} + A_{0+} e^{+\lambda z}\right) B_0 e^{\alpha^2 \lambda^2 t}} \quad (*)$$

Le condizioni al contorno ① e la condizione iniziale ② sono caratterizzanti la soluzione e la definiscono in modo univoco.

Condizioni al contorno

Consideriamo per $z=0$ (cioè in superficie) che la radiazione viene assorbita con andamento delle temperature nel tempo modulato (esempio diurno).
Il caso generale della modulazione a più frequenze (annuale + diurna) è una banale estensione.

Quindi

$$\boxed{T(z=0,t) = \Delta T_0 e^{i(\omega t + \varphi)} + T_0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Essendo il modello definito per $z \to +\infty$ dobbiamo anche supporre che non ci siano divergenze della funzione $T(z,t)$ per $z \to +\infty$ e $\forall t \in \mathbb{R}$.

[Osservazione]

Visto che T_0 è una temperatura costante, ad esempio la media annuale allora la funzione $T(z,t) - T_0$ rappresenta la funzione anomalia la quale è definita senza dalla soluzione generale $(*)$ tenendo presente che $T(z,t)$ sarà l'anomalia rispetto al valore di riferimento T_0

La condizione al contorno per $z=0$ dell'anomalia è

$$\boxed{T(z=0,t) = \Delta T_0 e^{i(\omega t+\varphi)}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che

$$(A_{0-} e^{-\lambda 0} + A_{0+} e^{\lambda 0}) B_0 e^{\alpha^2 \lambda^2 t} = \Delta T_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

ossia

$$\left[(A_{0-} + A_{0+}) B_0 e^{-i\varphi}\right] e^{\alpha^2 \lambda^2 t} = \Delta T_0 e^{i\omega t}$$

che è un'identità $\forall t \in \mathbb{R}$ solo se

a) $\boxed{\alpha^2 \lambda^2 t = i\omega t}$

b) $\boxed{(A_{0-} + A_{0+}) B_0 e^{-i\varphi} = \Delta T_0}$

Dalla condizione a) si ottiene la dipendenza di λ da α e ω infatti

$$\boxed{\lambda^2 = i \frac{\omega}{\alpha^2}}$$

Le cui radici sono

$$\lambda = \sqrt[2]{\lambda^2} = \begin{cases} (1+i) \dfrac{1}{\alpha} \sqrt{\dfrac{\omega}{2}} & \text{(scelta)} \\ -(1+i) \dfrac{1}{\alpha} \sqrt{\dfrac{\omega}{2}} & \end{cases}$$

Possiamo scegliere una qualsiasi di queste soluzioni visto che $A_{0-} e^{-\lambda z} + A_{0+} e^{\lambda z}$ è simmetrica rispetto alla scelta e le costanti A_{0-} e A_{0+} sono da determ.

Pertanto la soluzione generale assume la forma;

$$\boxed{T(z,t) = \left(A_{0-} e^{-\frac{1+i}{\alpha}\sqrt{\frac{\omega}{2}}z} + A_{0+} e^{+\frac{1+i}{\alpha}\sqrt{\frac{\omega}{2}}z}\right) B_0 e^{i\omega t}}$$

Tenendo presente che per $z \to +\infty$ la funzione non deve divergere, si ha che $A_{0+} = 0$ da cui

$$T(z,t) = A_{0-} B_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{z}{\alpha}} e^{i\left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{z}{\alpha}\right]}$$

Inoltre riesumendo l'identità b) noto che $A_{0+} = 0$ si ha

$$\boxed{A_{0-} B_0 = \Delta T_0 e^{i\varphi}}$$

Da cui

$$\boxed{T(z,t) = \Delta T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{z}{\alpha}} e^{i\left[(\omega t + \varphi) - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{z}{\alpha}\right]}}$$

Osservazione

La grandezza $\boxed{D := \alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega}}}$ ha le dimensioni di una lunghezza.

Ricordiamo $[\alpha^2] = \frac{[L]^2}{[t]}$ e $[\omega] = [t]^{-1}$

Questa grandezza viene chiamata profondità di propagazione del calore (o di smorzamento) (Dumping depth)

1) D diminuisce se la frequenza del forzante energetico aumenta $\boxed{D \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}}$

2) D aumenta se la diffusività energetica del terreno aumenta $\boxed{D \propto \alpha}$

$$T(z,t) = \Delta T_0 \, e^{-z/D} \, e^{i[(\omega t+\varphi) - z/D]}$$

$\downarrow$ smorzamento dell'anomalia con la profondità

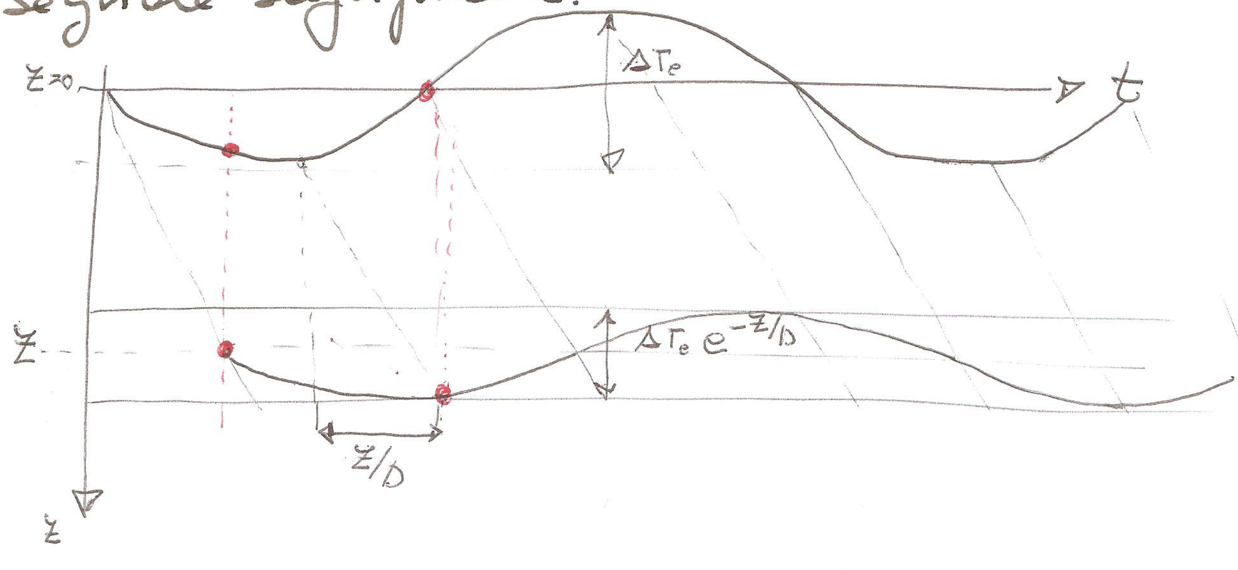
$\downarrow$ sfasatura dell'anomalia con la profondità

Osservazione

L'anomalia di temperatura che forzo il sistema dalla superficie, si propaga nel mezzo con fumble per conduzione.

Essa viene smorzata dal fattore $e^{-z/D}$ inoltre, il segnale, viene sfasato rispetto alla fase superficiale e la sfasatura aumenta con la profondità. $(-z/D)$ il segno - indica un ritardo

La sfasatura è diversa a seconda della frequenza del segnale superficiale.



Generalizzazione per forzante stagionale e giornaliera

$$T(z=0,t) = \Delta T_{0\,day} \, e^{i(\omega_{day} t + \varphi_{day})} + \Delta T_{0\,season} \, e^{i(\omega_{seas} t + \varphi_{seas})} + T_0$$