meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 2.0
soluzione equazioni del moto

Luigi BREGANT
bregant@units.it

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

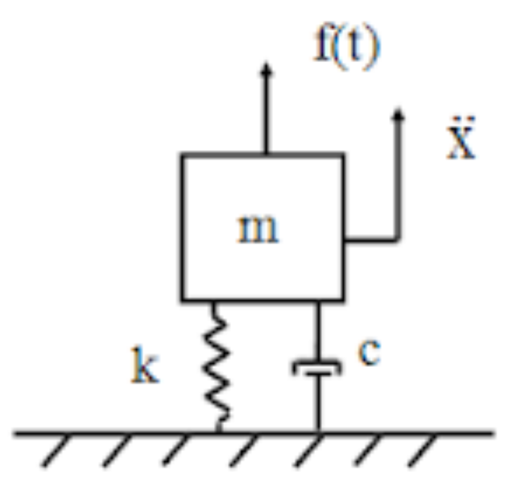
Soluzioni Equazioni del moto - Approcci

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

- Integrazione ODE nel tempo
- Funzione di Trasferimento
- Zeri, Poli e Guadagni
- Rappresentazione Modale
- Stato Spazio

Integrazione ODE nel tempo

Prima di integrare le equazioni differenziali del moto con tecniche numeriche possiamo provare a trovare la soluzione in forma chiusa … (Analisi II)



Ricordiamo l'equazione del moto .. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f - W$

la soluzione dell'equazione differenziale sarà la combinazione
della soluzione dell'equazione omogenea (..=0) e di quella particolare (..=f(t))
tralasciando solitamente il cedimento statico x_s
concentrando l'attenzione sulle vibrazioni attorno al punto di equilibrio

$$x_s = \frac{W}{k}$$

La soluzione dell'equazione omogenea, per un sistema SDOF con le CI è nota:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} sin\omega_d t\right)\right]$$

Breve ripasso.. come si arriva alla soluzione:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad c_c = 2\sqrt{km}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

divido per m, e con le sostituzioni apposite

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = 0$$

utilizzo una soluzione di primo tentativo e le sue derivate $x = Ce^{st}$ $\dot{x} = sCe^{st}$ $\dot{x} = sCe^{st}$

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + {\omega_n}^2\right) Ce^{st} = 0$$

la soluzione deve valere per ogni istante di tempo t

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + {\omega_n}^2\right) = 0$$

bisogna trovare i valori di s che annullano l'equazione

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 + 4\omega_n^2}}{2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

C_1 e C_2 dipendono dalla condizioni iniziali!

da cui la soluzione: $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

Attenzione! Il sistema SDOF ha due soluzioni complesse e coniugate!

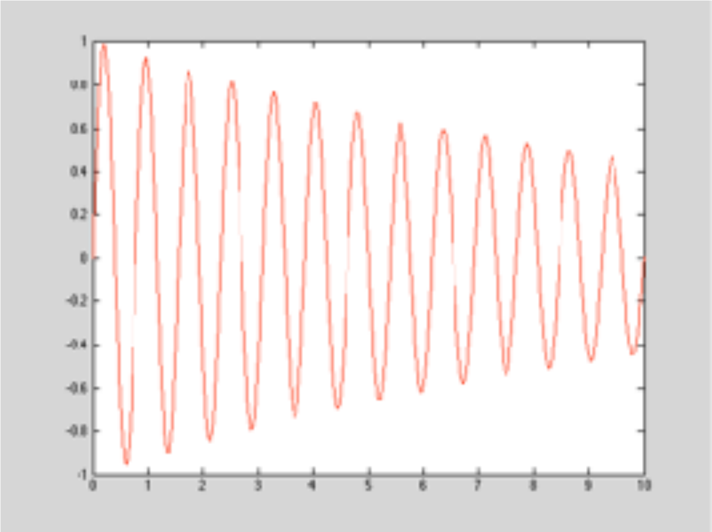
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

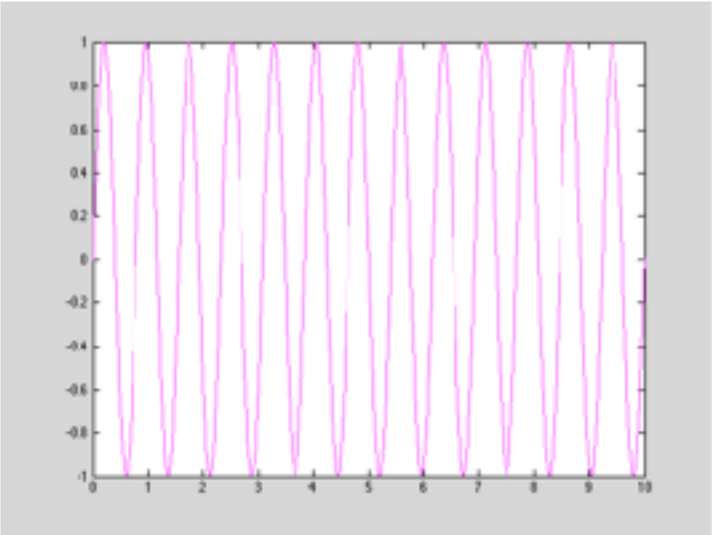
Se le plottiamo nel piano complesso vediamo come cambia la soluzione al variare dello smorzamento!

Smorzamento ipocritico

$$0 < \zeta < 1$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$





$$\zeta = 0$$

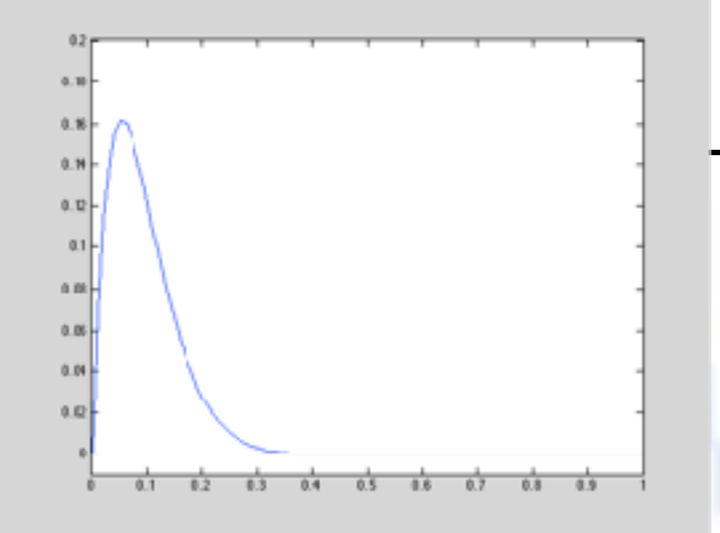
$$s_{1,2} = \pm\,\omega_n$$

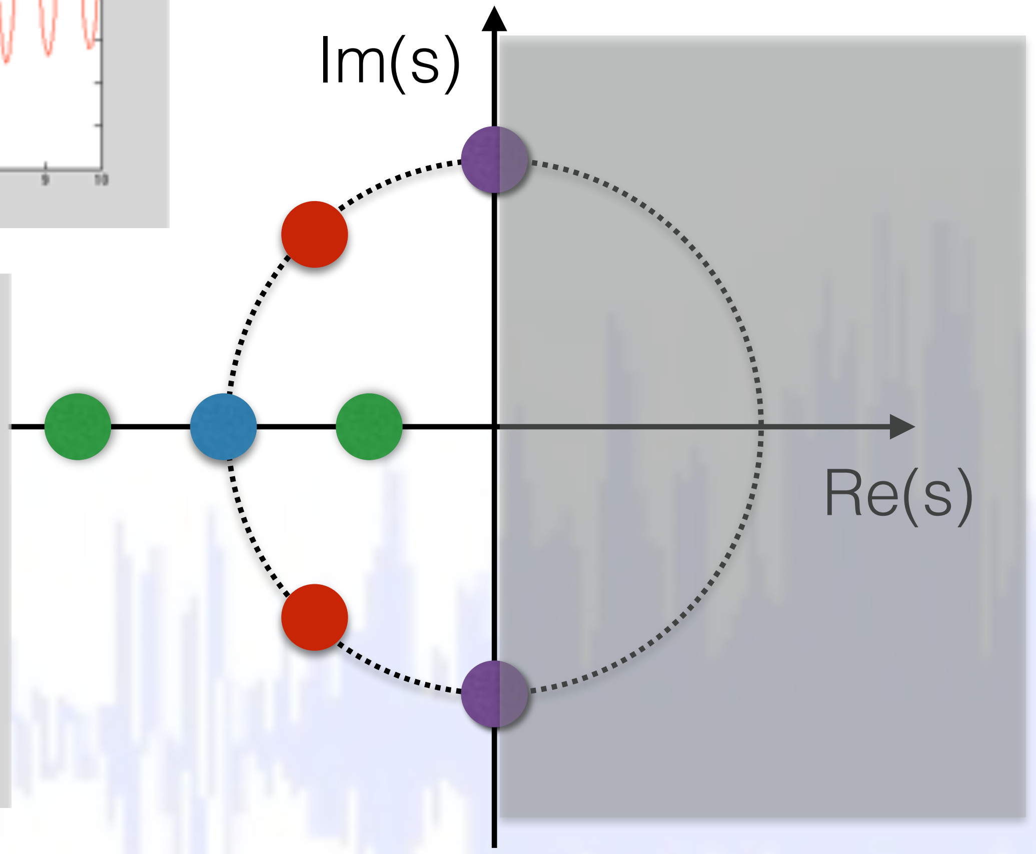
Senza smorzamento

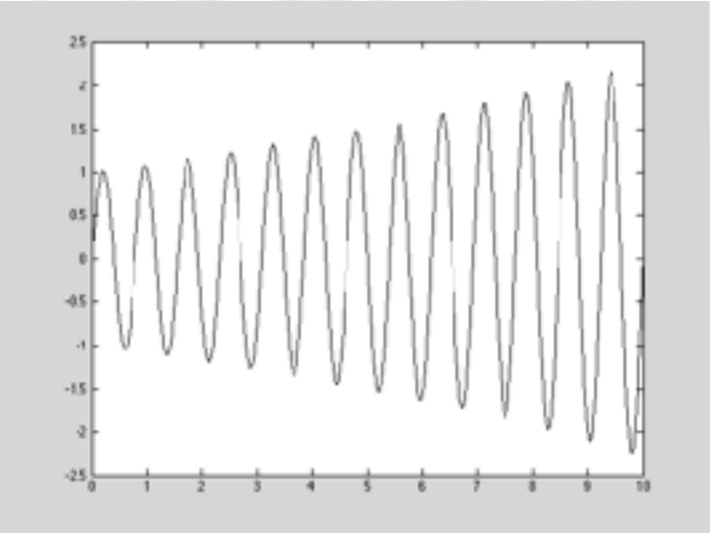
Smorzamento critico

$$\zeta = 1$$

$$s = -\zeta\omega_n$$







$$\zeta > 1$$

Smorzamento ipercritico

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega^*$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1\cosh(\omega^* t) + C_2\sinh(\omega^* t)\right]$$

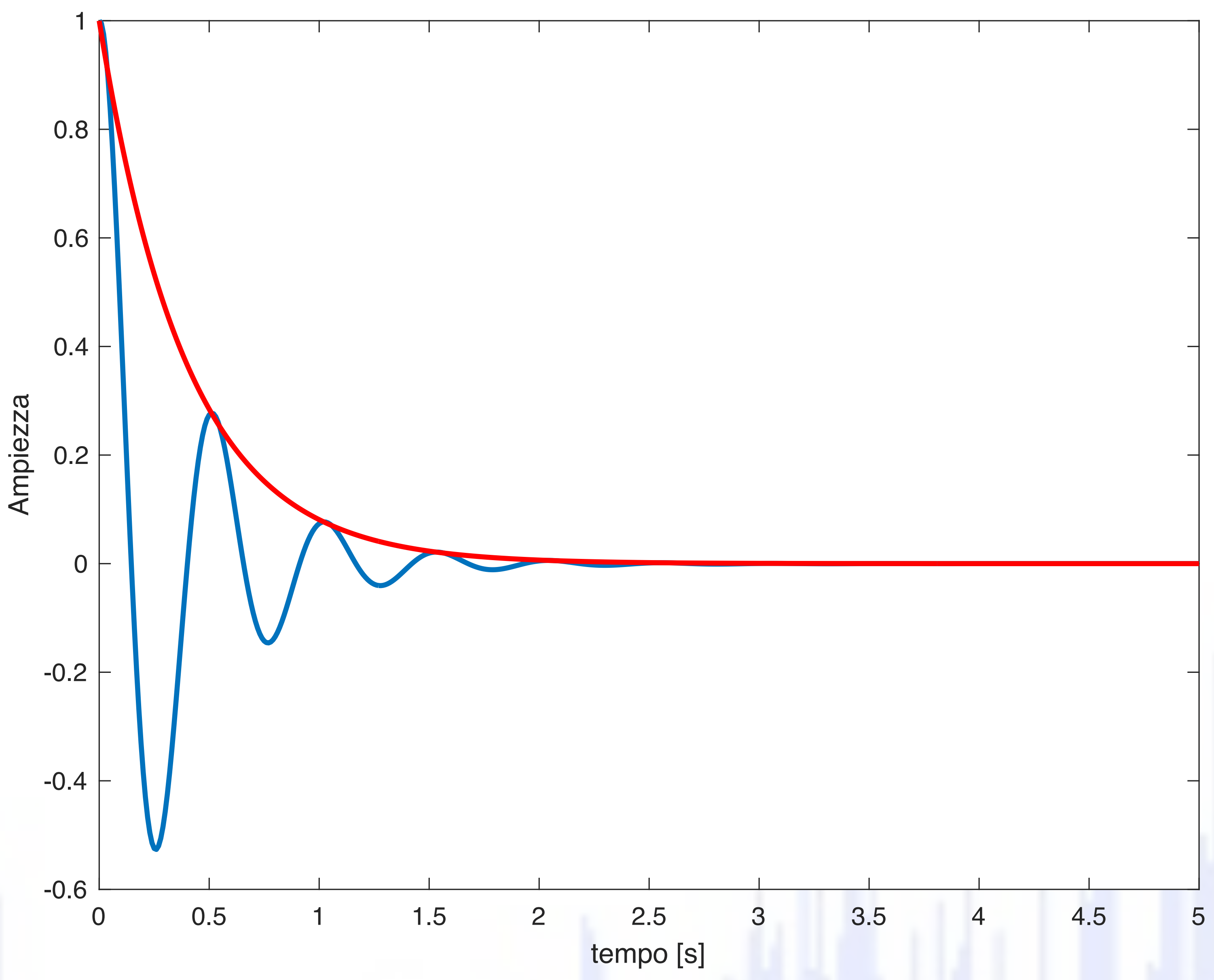
Soluzioni Stabili

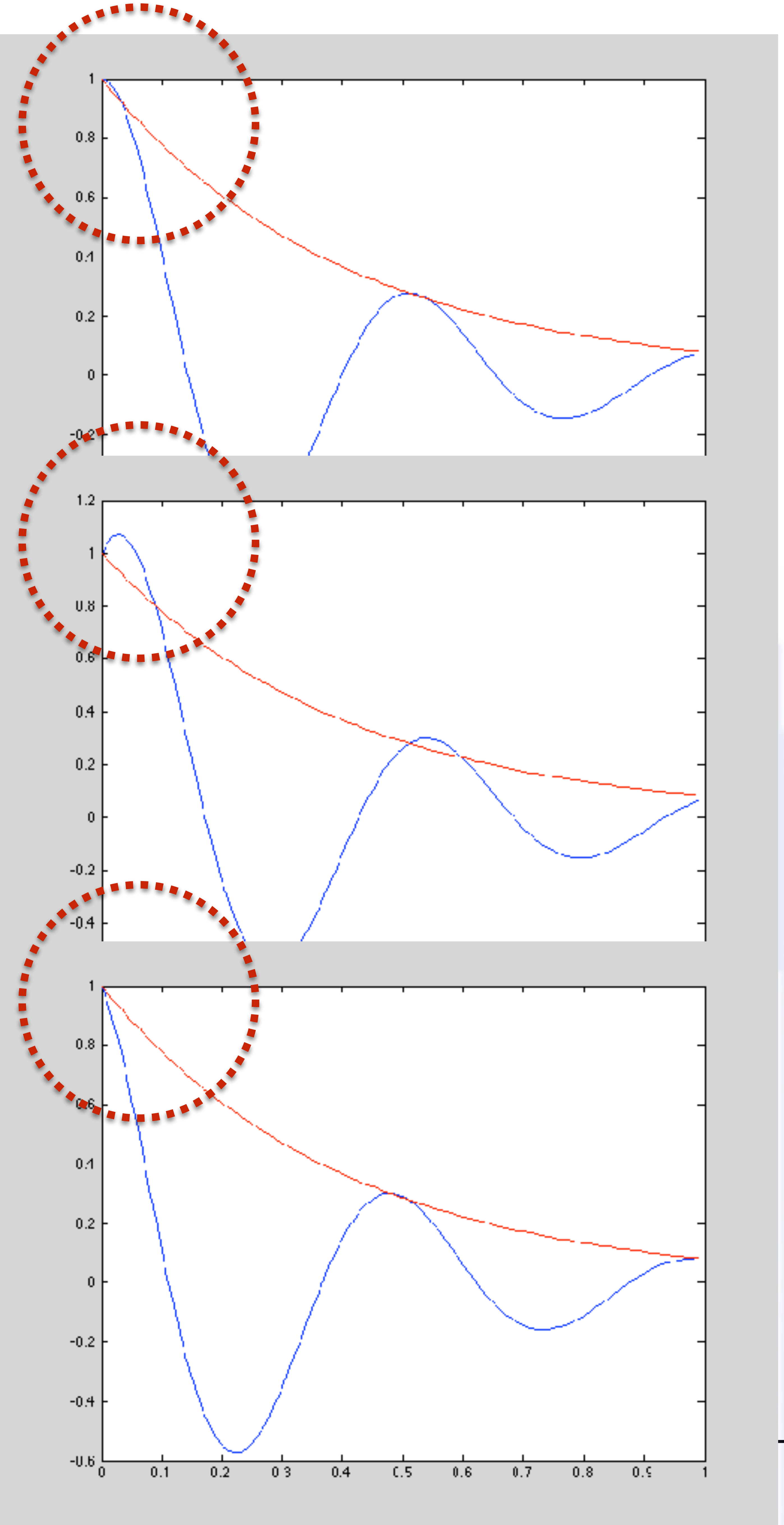
Soluzioni Instabili

Smorzamento negativo!

Ad esempio (C&P in matlab):

```
t=0:.01:5;

omegan=2*pi*2;
csi=0.2;
omegad=omegan*sqrt(1-csi^2);

x0=1;
xdot0=.3;

A=x0;
B=(xdot0+csi*omegan*x0)/omegad;

x=exp(-csi*omegan*t).*(A.*cos(omegad*t)+B.*sin(omegad*t));

plot(t,x)
hold

plot(t,exp(-csi*omegan*t),'r')
```

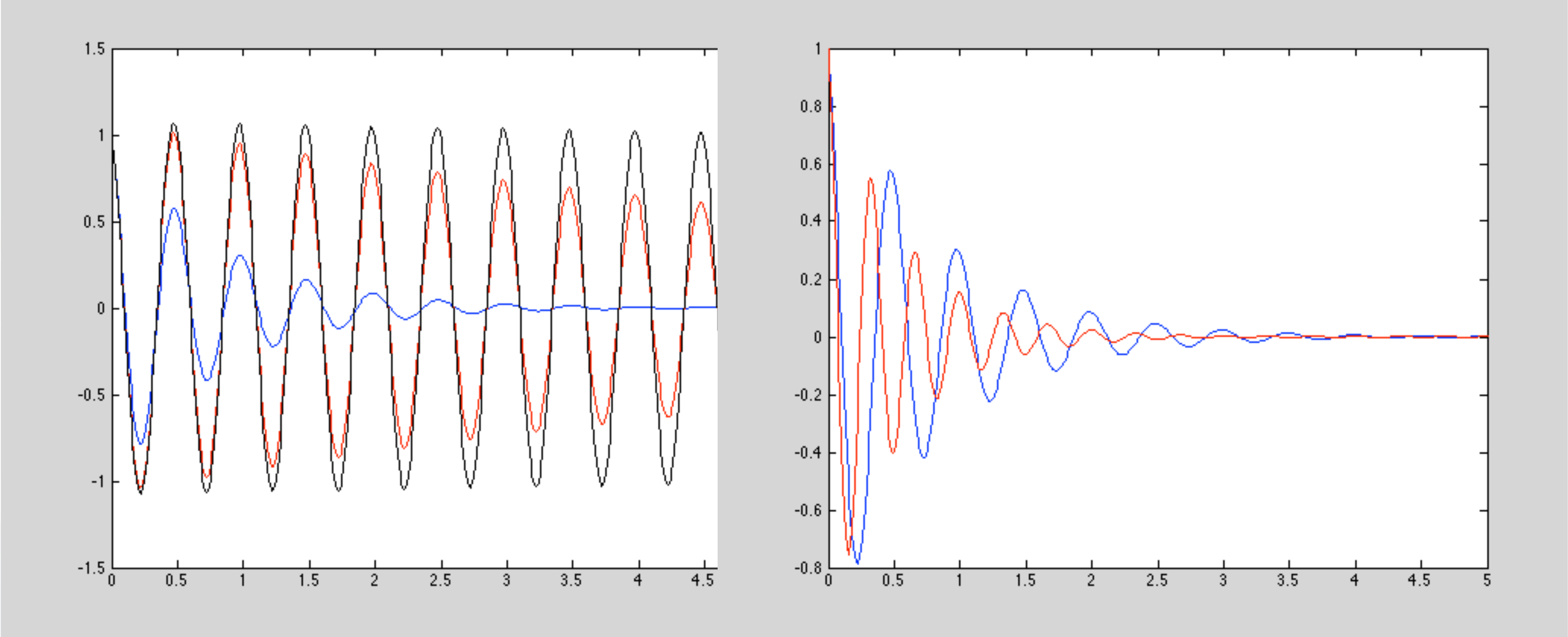




E’ possibile visualizzare facilmente cosa cambia
nella risposta del sistema
variando le condizioni iniziali..

cosa è cambiato nei grafici a sx?
>..

..oppure le caratteristiche del sistema (m,c,k)…



come posso variare la pulsazione naturale?
>..

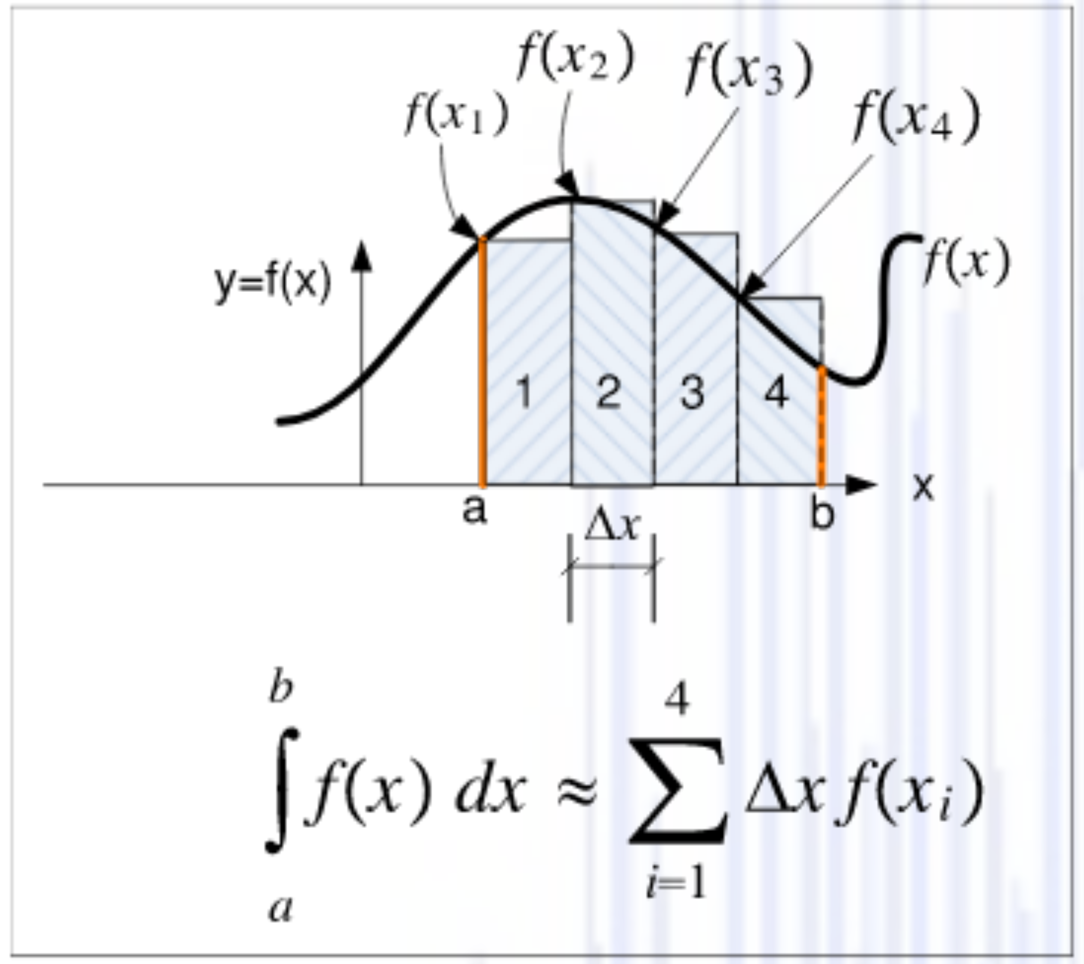
ed il fattore di smorzamento?
>..

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Se non sappiamo calcolare la soluzione in forma chiusa (o non esiste?), cosa facciamo?

Possiamo trovare una soluzione APPROSSIMATA in maniera numerica!

La soluzione è approssimata perché dipende dal metodo di integrazione (es. Newton-Cotes, Gauss..) e dall'intervallo di integrazione utilizzato (più rapide sono le variazioni della risposta più breve l'intervallo!)



Solver	Problem Type	Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. ode45 should be the first solver you try.
ode23		Low	ode23 can be more efficient than ode45 at problems with crude tolerances, or in the presence of moderate stiffness.
ode113		Low to High	ode113 can be more efficient than ode45 at problems with stringent error tolerances, or when the ODE function is expensive to evaluate.
ode15s	Stiff	Low to Medium	Try ode15s when ode45 fails or is inefficient and you suspect that the problem is stiff. Also use ode15s when solving differential algebraic equations (DAEs).
ode23s		Low	ode23s can be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances. It can solve some stiff problems for which ode15s is not effective. ode23s computes the Jacobian in each step, so it is beneficial to provide the Jacobian via odeset to maximize efficiency and accuracy. If there is a mass matrix, it must be constant.
ode23t		Low	Use ode23t if the problem is only moderately stiff and you need a solution without numerical damping. ode23t can solve differential algebraic equations (DAEs).
ode23tb		Low	Like ode23s, the ode23tb solver might be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances.
ode15i	Fully implicit	Low	Use ode15i for fully implicit problems *f(t,y,y') = 0* and for differential algebraic equations (DAEs) of index 1.

Da Matlab Documentation>
Numerical Integration and Differential Equations>
Ordinary Differential Equations >
Chose an ODE solver

Come si procede in Matlab?   (.. si può fare in Octave, Python..)

Bisogna definire la funzione da integrare, l'intervallo di integrazione, le condizioni al contorno e scegliere la tecnica di integrazione!

Proviamo con un equazione del I ordine: $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ $\dot{y} + 2y = 0$

si isola la derivata di ordine massimo: $\dot{y} = -2y$

si definisce la funzione da integrare

```
function dydt=fo(t,y)
dydt=-2*y;
```

la salvo in fo.m

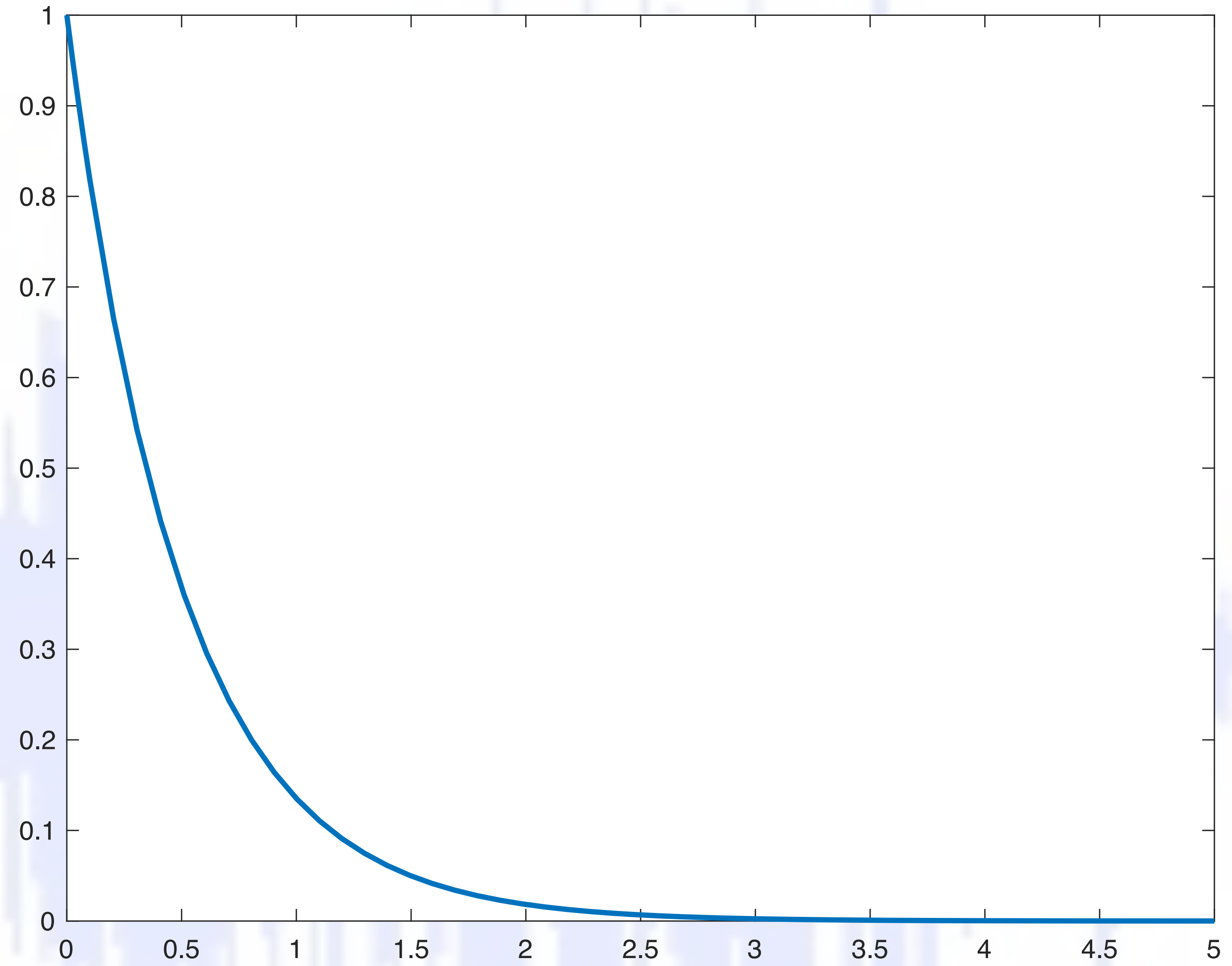
si definisce l'intervallo d'integrazione `tspan=[0 5];`

e la condizione iniziale `y0=1;`

si sceglie il metodo `ode45`

si integra `[t,y]=ode45(@fo,tspan,y0);`

si plotta il risultato `plot(t,y)`



Se l'equazione è del II ordine come quelle viste finora bisogna fare un po' di attenzione in più!

Integriamo l'equazione del pendolo vista recentemente $$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} sin\theta = 0$$

si isola la derivata di ordine massimo: $$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} sin\theta = -\omega^2 sin\theta$$

si fa una sostituzione di variabili e derivate: $$y_1 = \theta \qquad \dot{y}_1 = \dot{\theta} = y_2$$

si riscrive l'equazione del moto di ordine 2
come un sistema di 2 equazioni di ordine 1:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\omega^2 sin y_1$$

si definisce la funzione da integrare

```
function dydt=pendolo(t,y)
omega=2;
dydt=[y(2); -omega^2*sin(y(1))
```

NB definire qui il rapporto g/L=ω^2

si definisce l'intervallo di integrazione `tspan=[0 15];`

si definisce lee condizioni iniziali `y0=[3 0];`

NB definire due condizioni
al contorno, spostamento e velocità

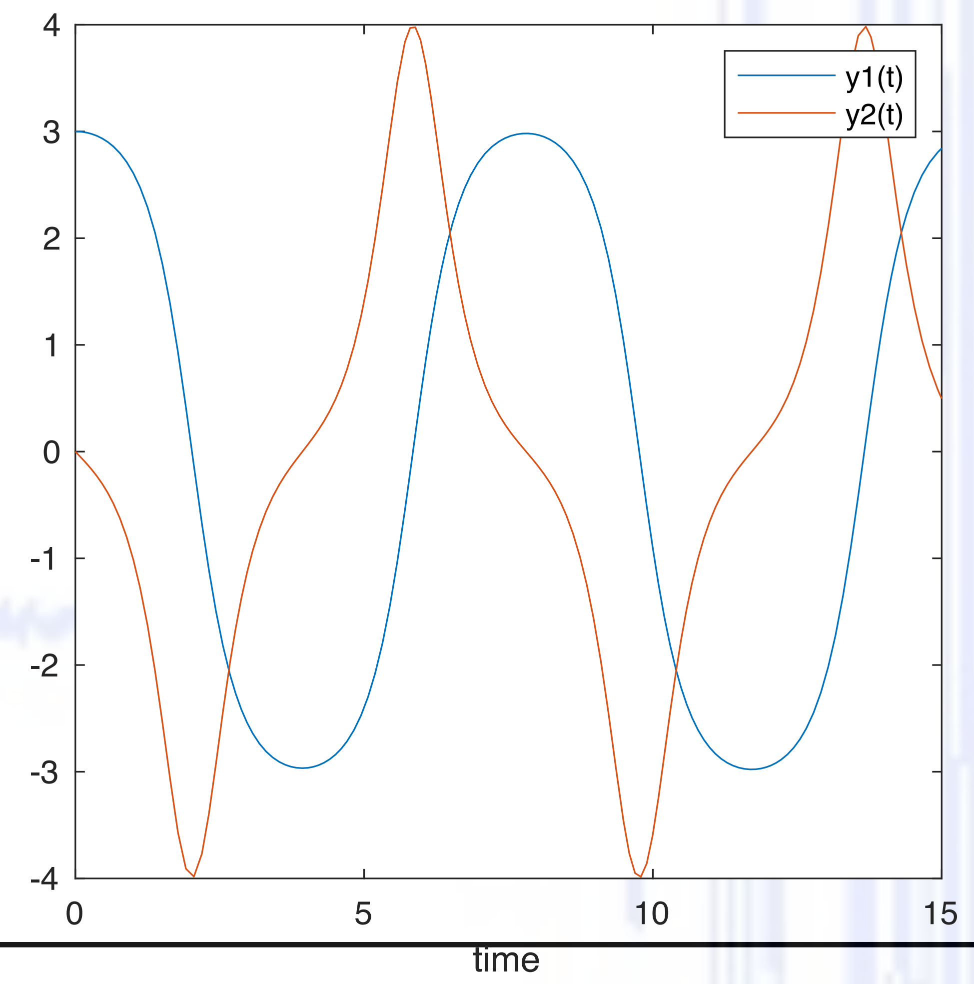
si sceglie il metodo `ode45`

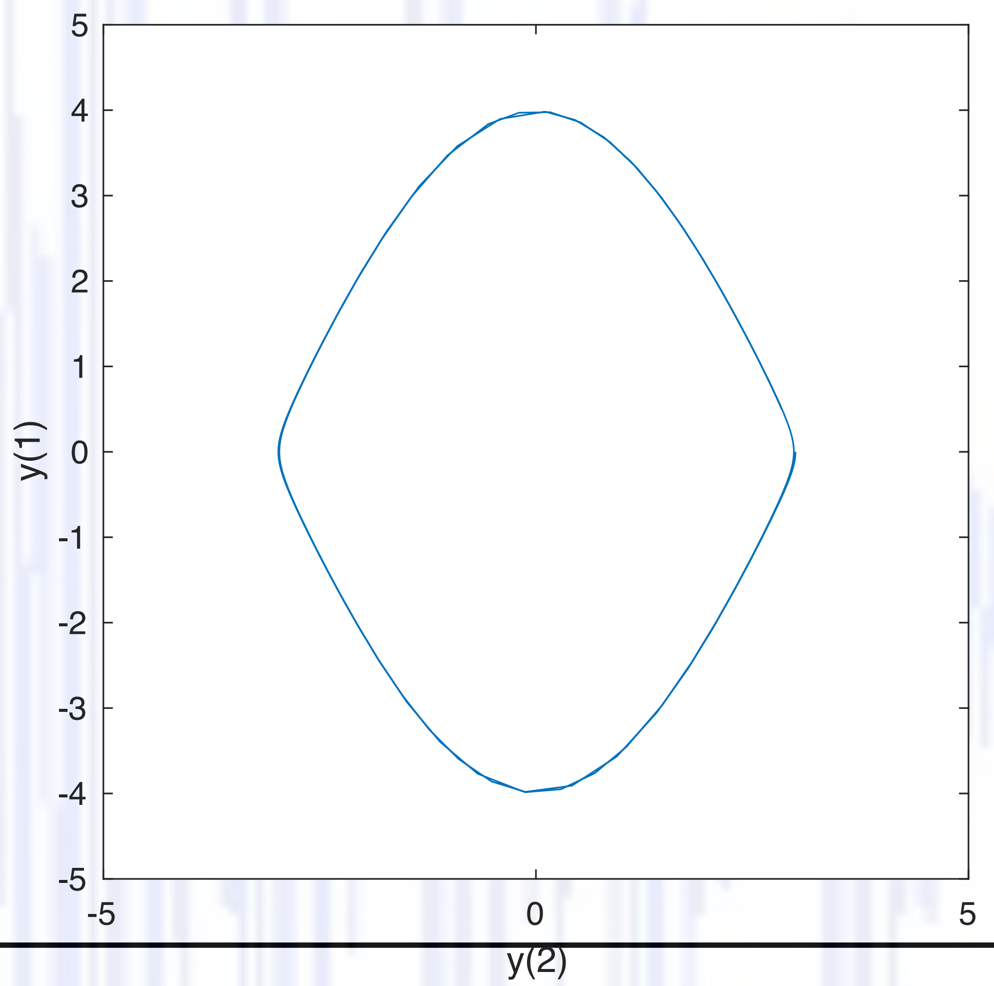
si integra `[t,y] = ode45(@pendolo,tspan,y0)`

NB y è un vettore di 2
colonne, spostamento e velocità

si plotta il risultato

```
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),t,y(:,2));
xlabel('time'); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2));
axis([-5 5 -5 5]); xlabel('y(2)');ylabel('y(1)');
```

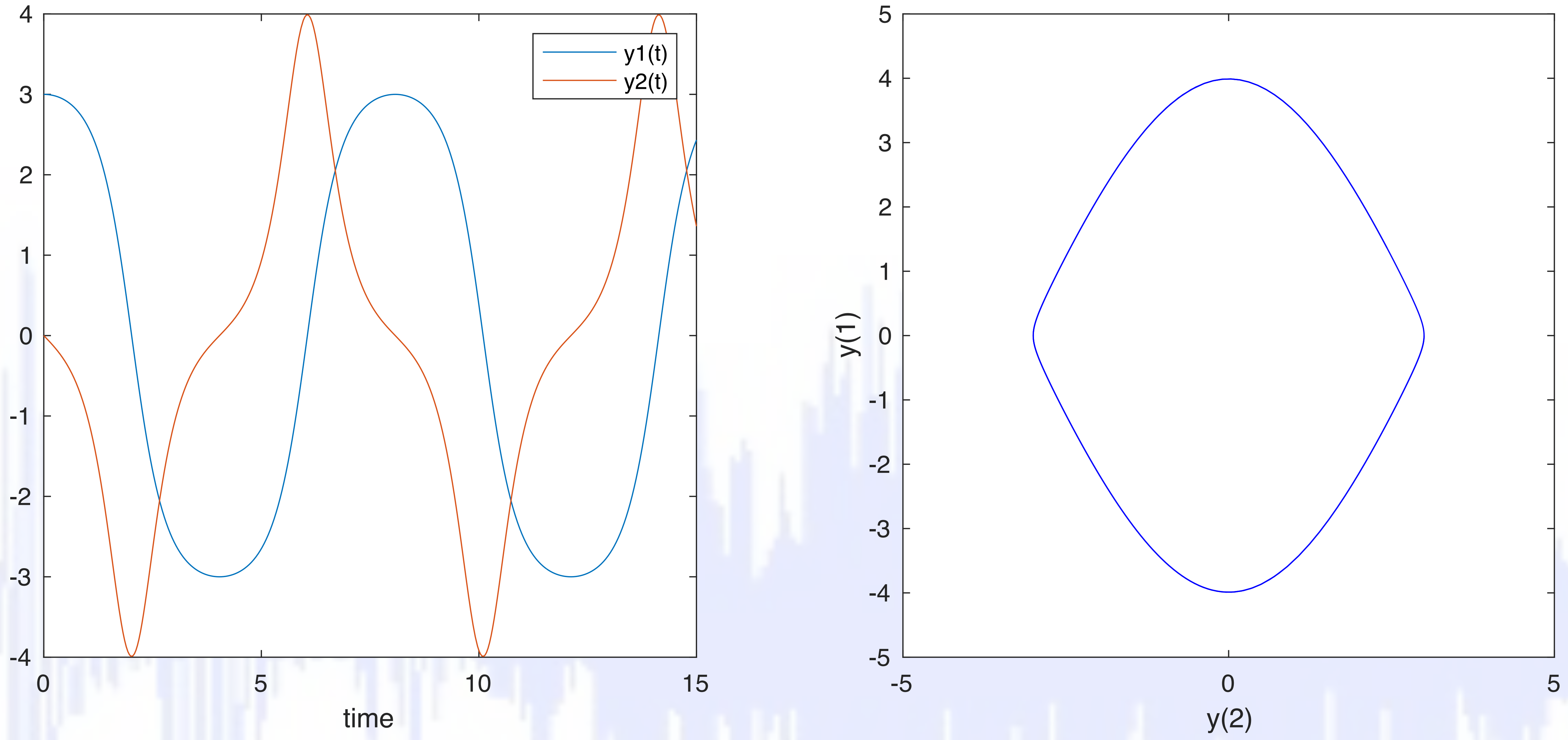




NB in matlab ci sono anche altre opzioni
maniere alternative per scrivere la stessa cosa..

```
omega = 2;

dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -omega.^2*sin(y(1))];

odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001, 'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

[t,y] = ode45(dy_dt,[0 15], [3 0],odeopt);

subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),t,y(:,2));
xlabel('time'); legend(‘y1(t)','y2(t)');

subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-');
axis([-5 5 -5 5]); xlabel('y(2)');ylabel('y(1)');
```

NB ulteriori opzioni per l’integrazioni!

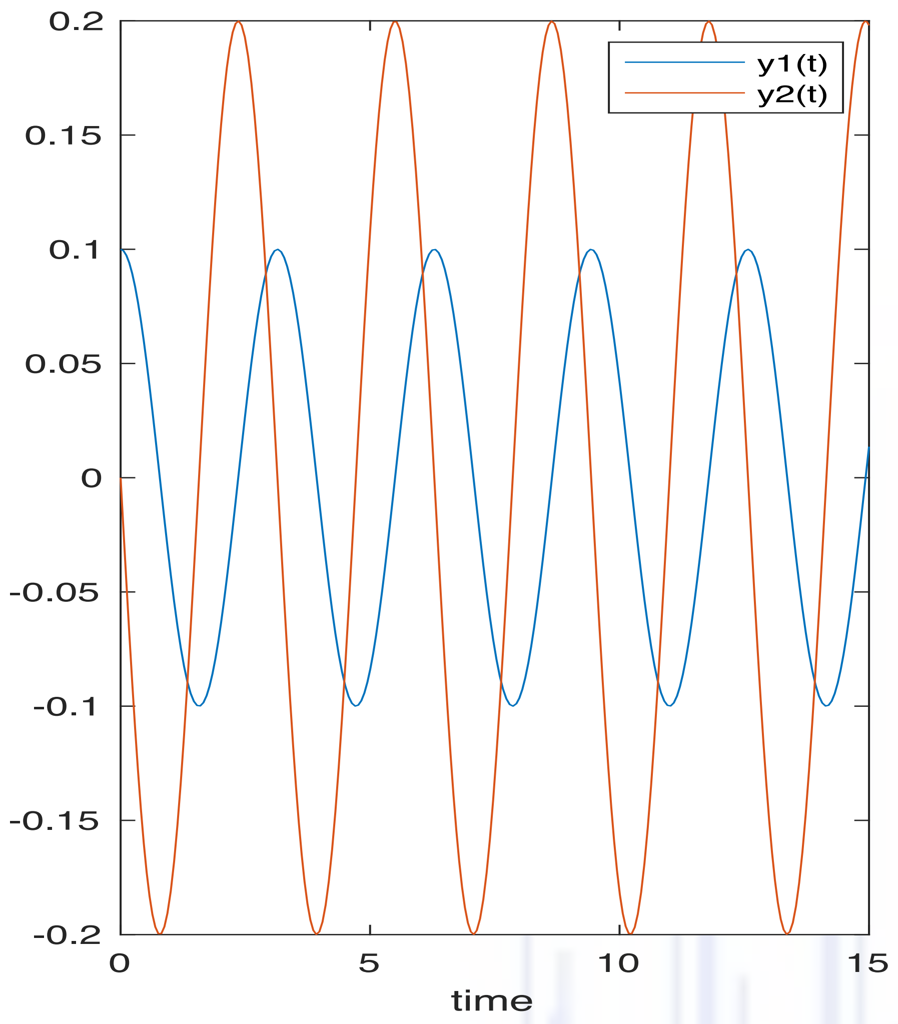


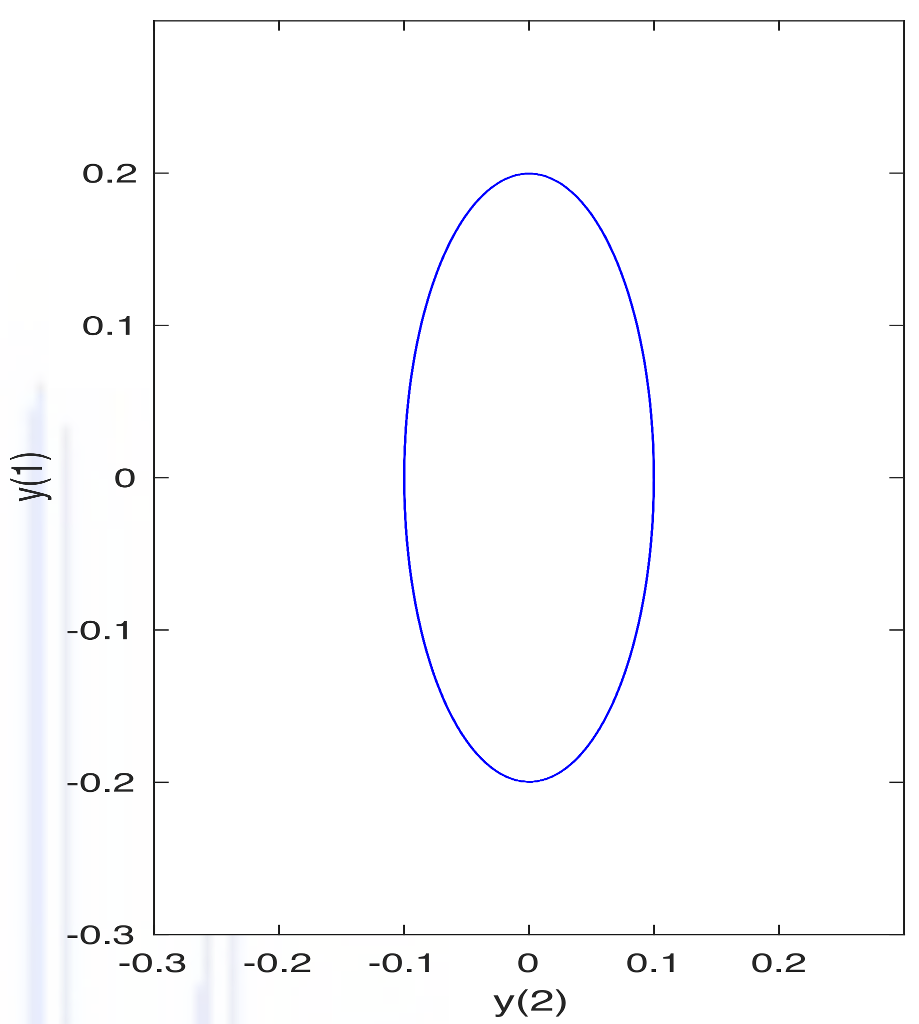
Ovviamente il risultati sono identici!

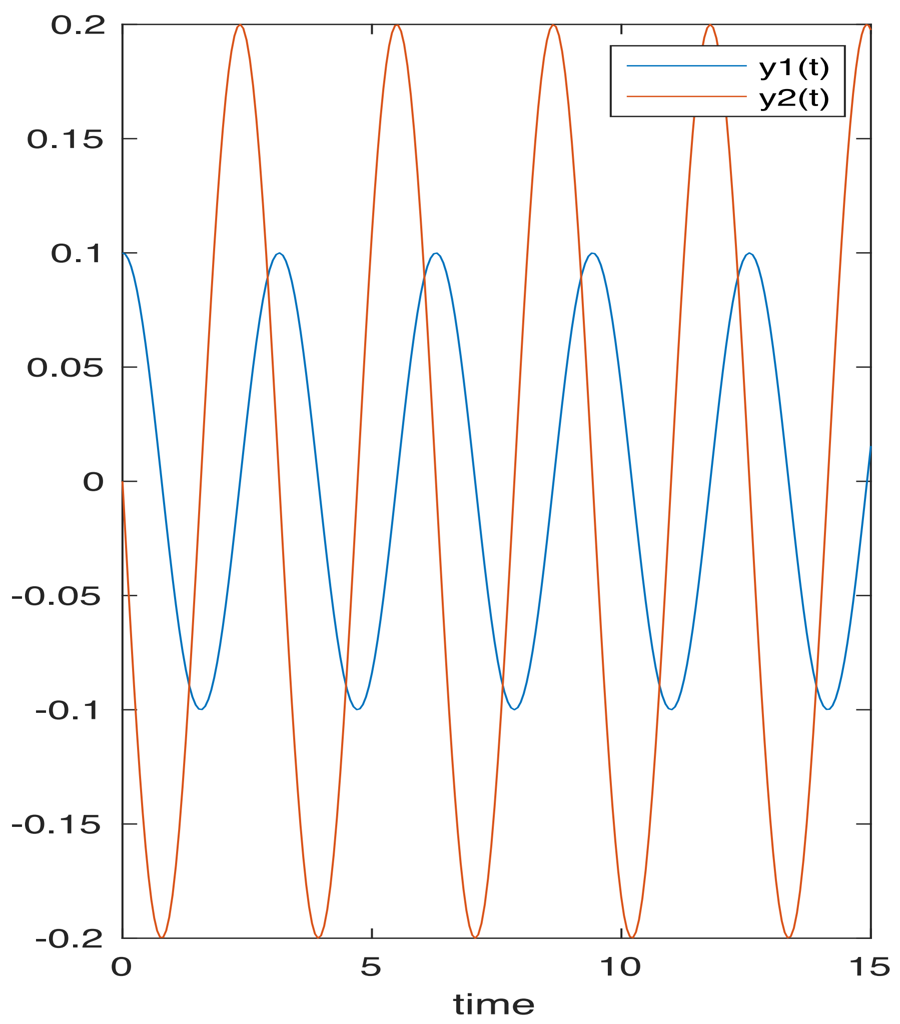
cosa succedesse si linearizza l’equazione?
>..

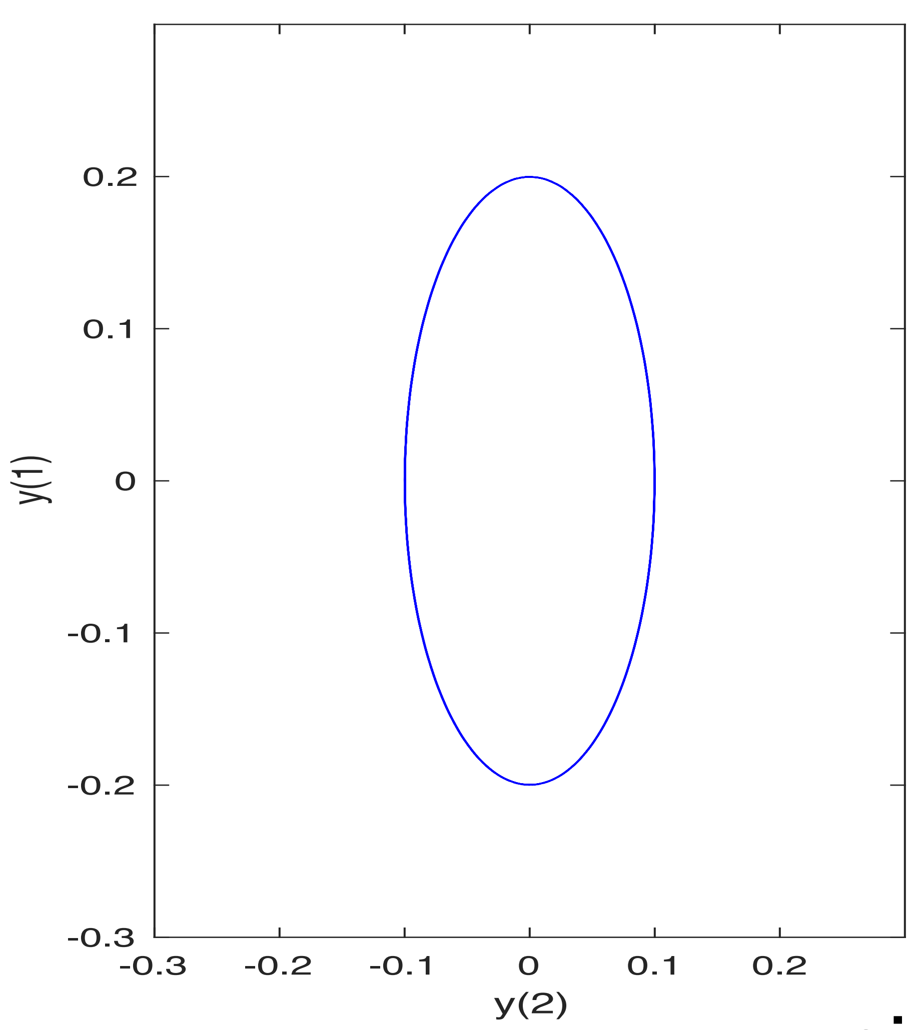
non lineare

linearizzata



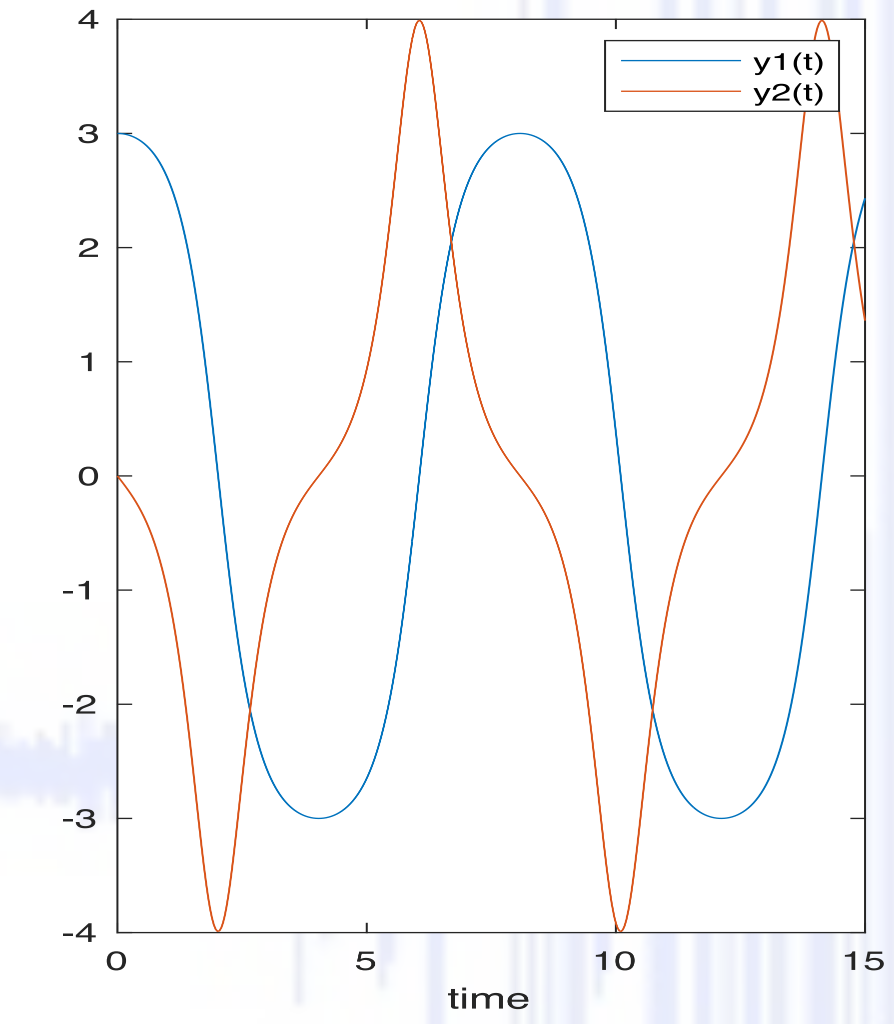


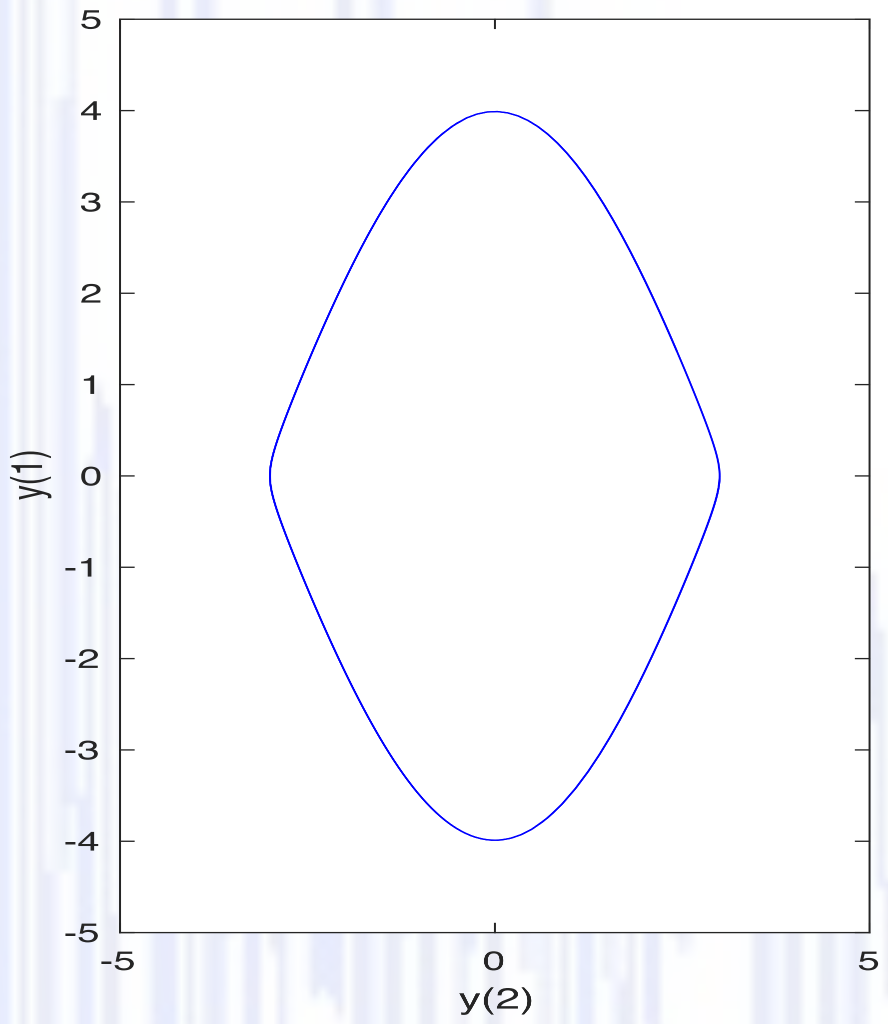


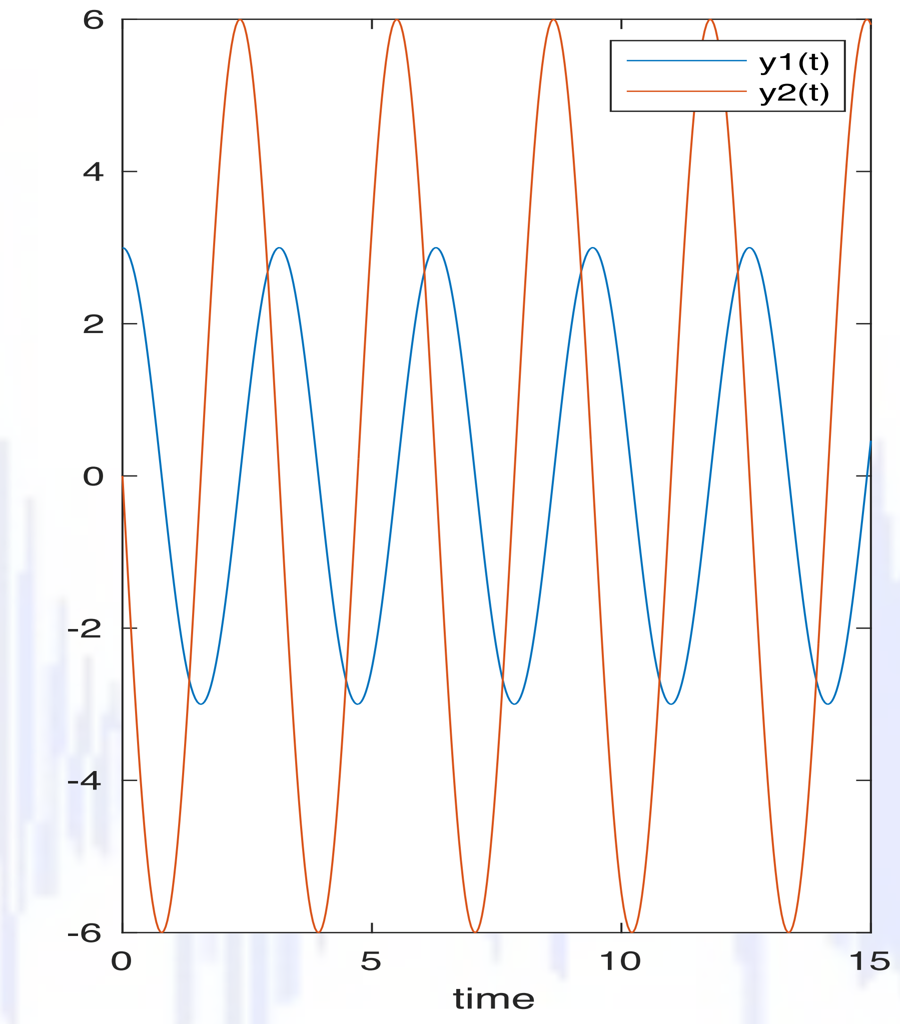


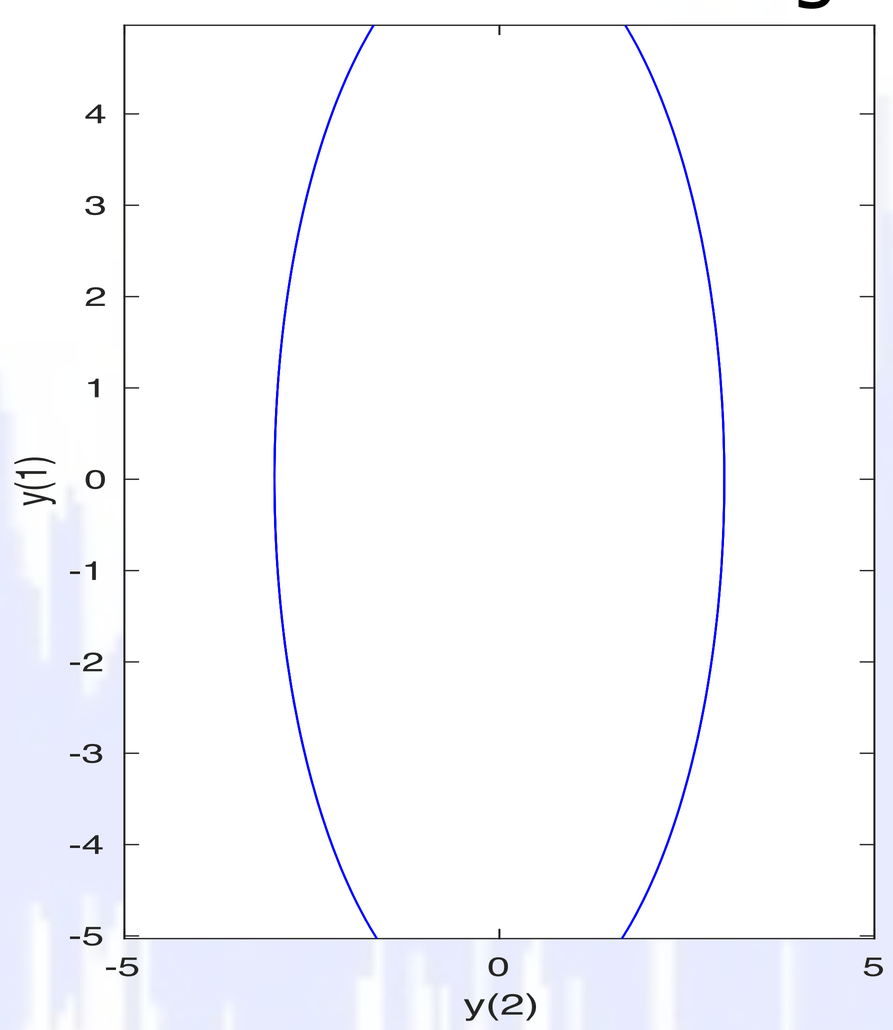
piccoli spostamenti

grandi spostamenti









La struttura descritta si possono integrare tutte le equazioni del caso..

sistema SDOF non smorzato libero

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 \end{cases}$$

sistema SDOF smorzato libero

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1 \end{cases}$$

sistema SDOF smorzato forzato

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{Fo}{m}sin(\omega t) \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1 + \frac{F_o}{m}sin\omega t \end{cases}$$

sistema MDOF smorzato forzato

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (k_1 + k_2)x_1 - k_1x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = F_0 sin\omega t \end{cases}$$

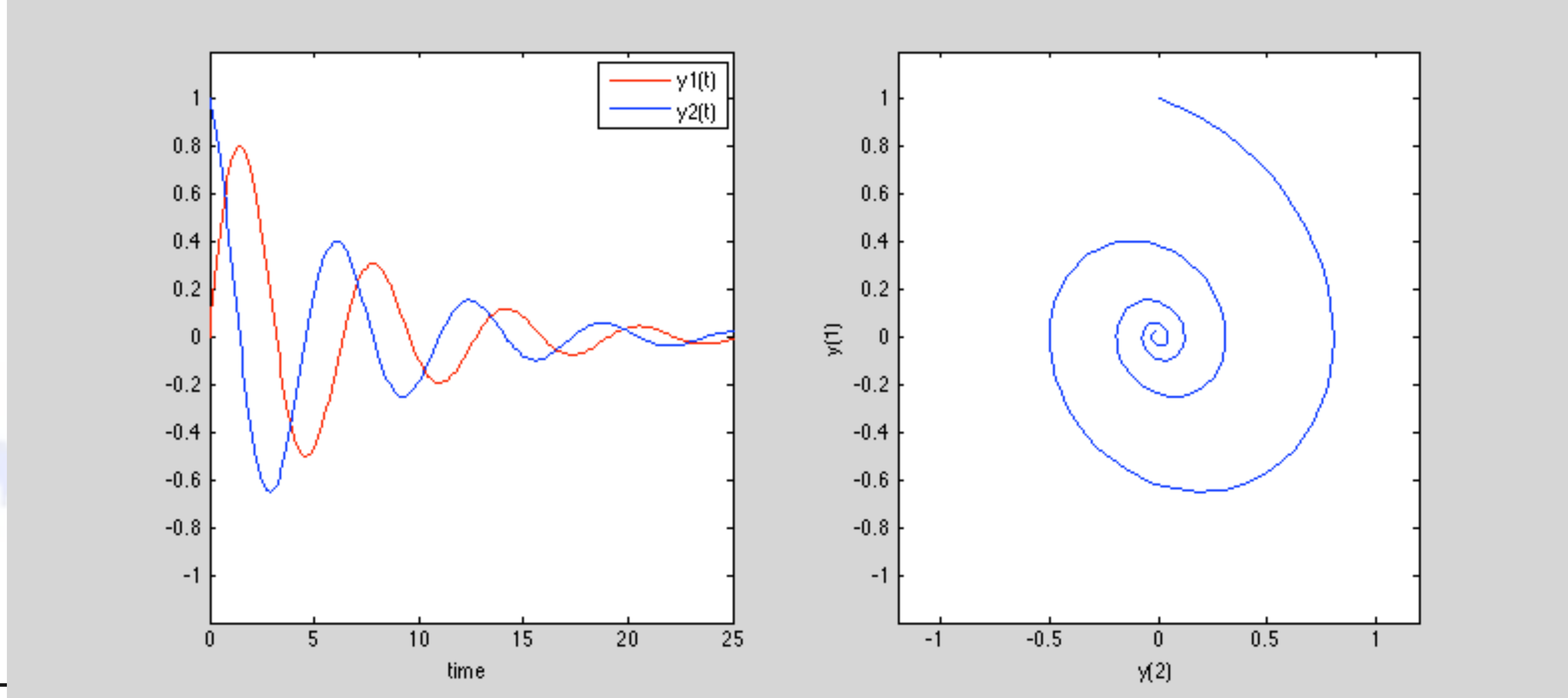
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c}{m_1}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) - \frac{k_1 + k_2}{m_1}y_1 - \frac{k_1}{m_1}y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -\frac{c}{m_2}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - \frac{k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \frac{F_0}{m_2}sin\omega t \end{cases}$$

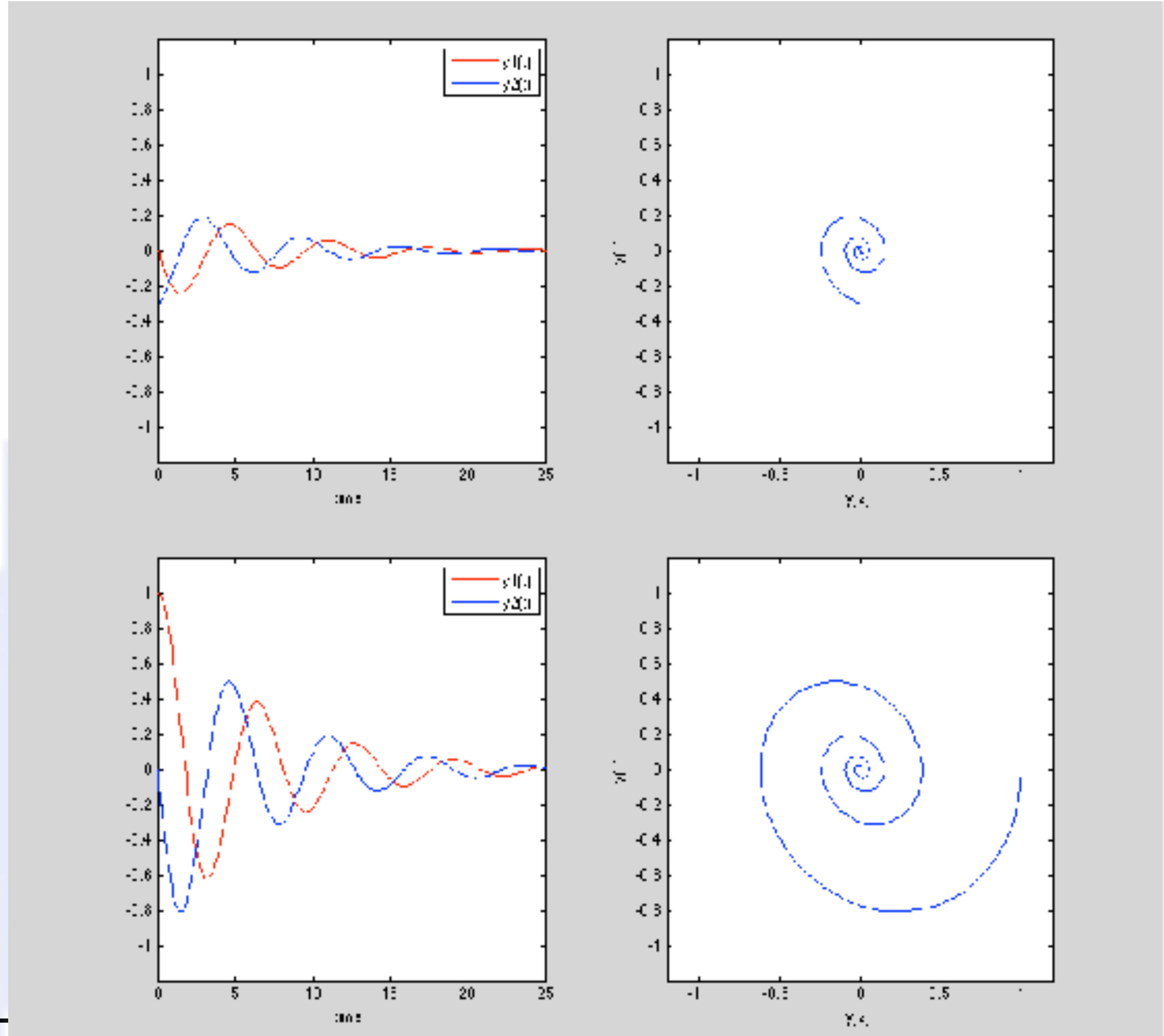
Alcuni esempi..

Sistema SDOF, smorzato, libero, con CI

cut and paste in Matlab

```
m = 1; k = 1; c = 0.3;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -(c/m) * y(2) - (k/m) * y(1) ];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 25], [0.0 1.0],odeopt);
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-');
xlabel('time'); ylim([-1.2 1.2]); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-');
xlabel('y(2)');ylabel('y(1)'); xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
```



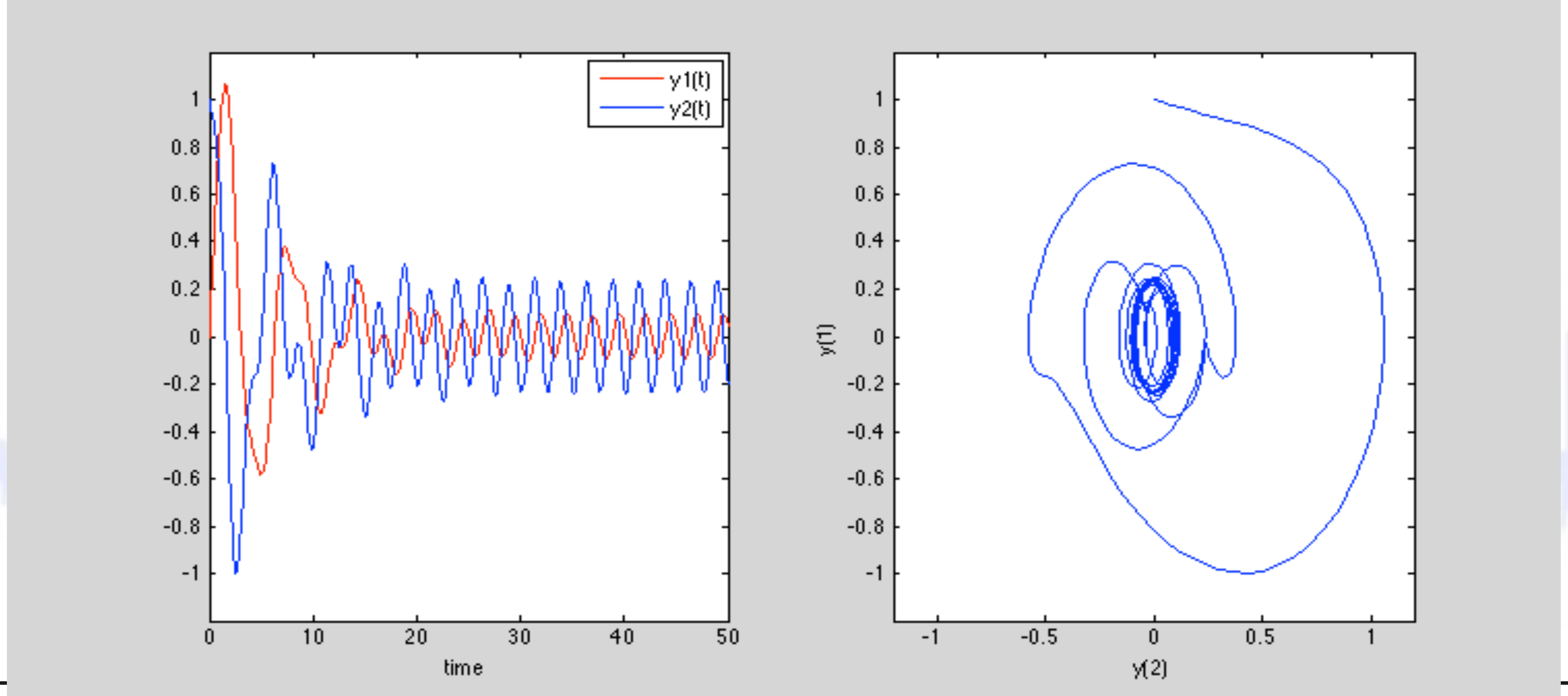


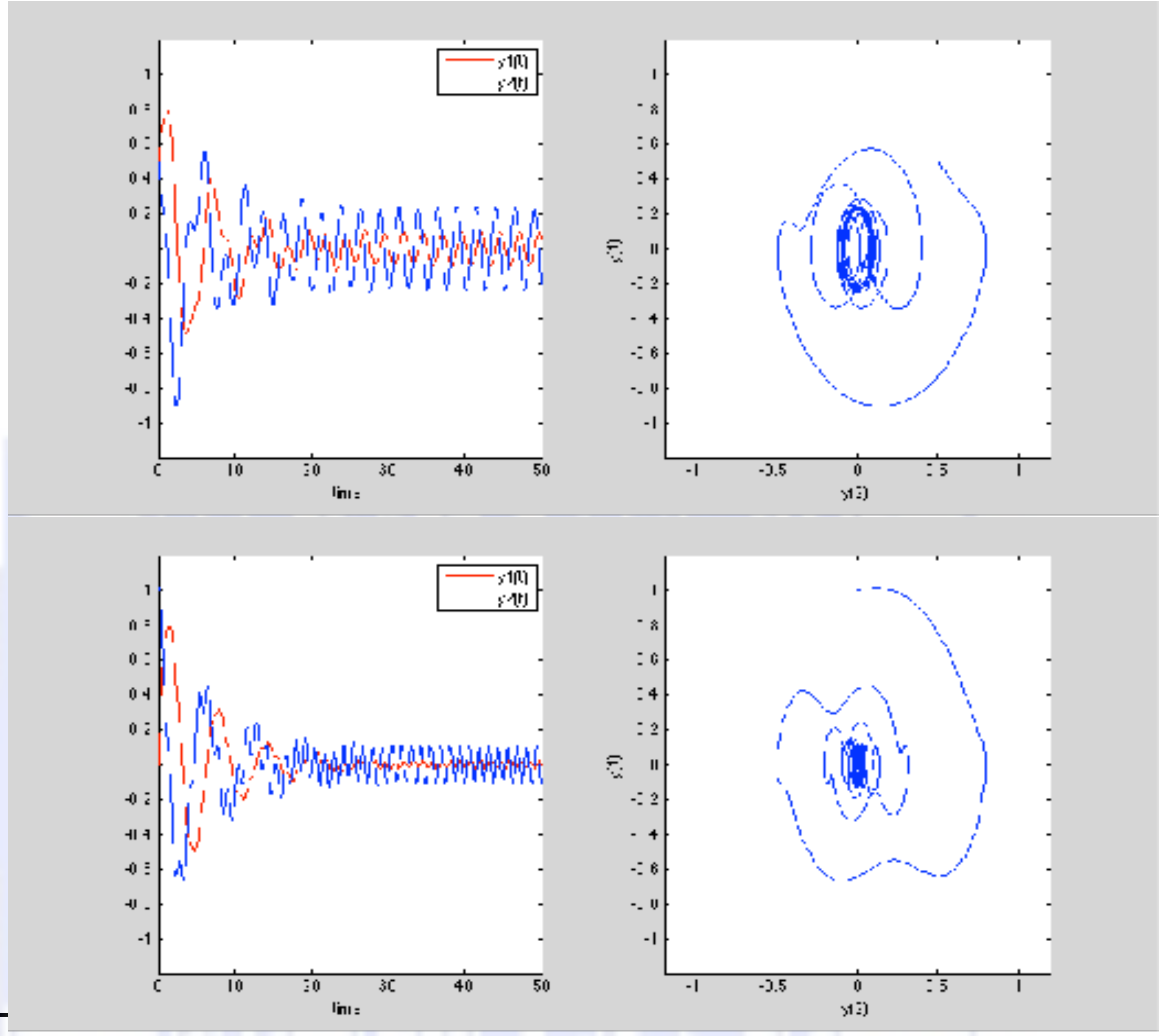
Alcuni esempi..

Sistema SDOF, smorzato, forzato, con CI

cut and paste in Matlab

```
m = 1; k = 1; c = 0.3;
F0 = 0.5; w = 2.5;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -(c/m) * y(2) - (k/m) * y(1) + (F0/m) * sin(w*t)];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 50], [0.0 1.0],odeopt);
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-');
xlabel('time'); ylim([-1.2 1.2]); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-');
xlabel('y(2)');ylabel('y(1)'); xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
```





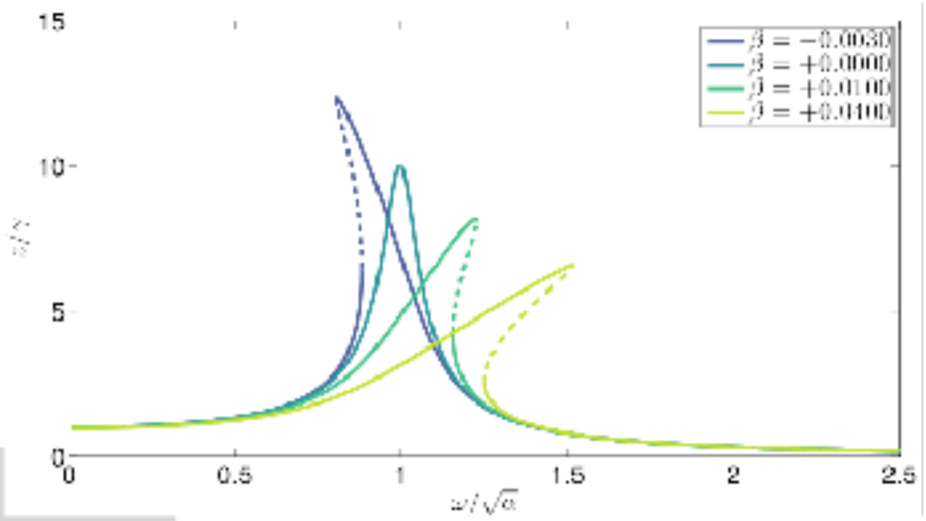
Alcuni esempi..

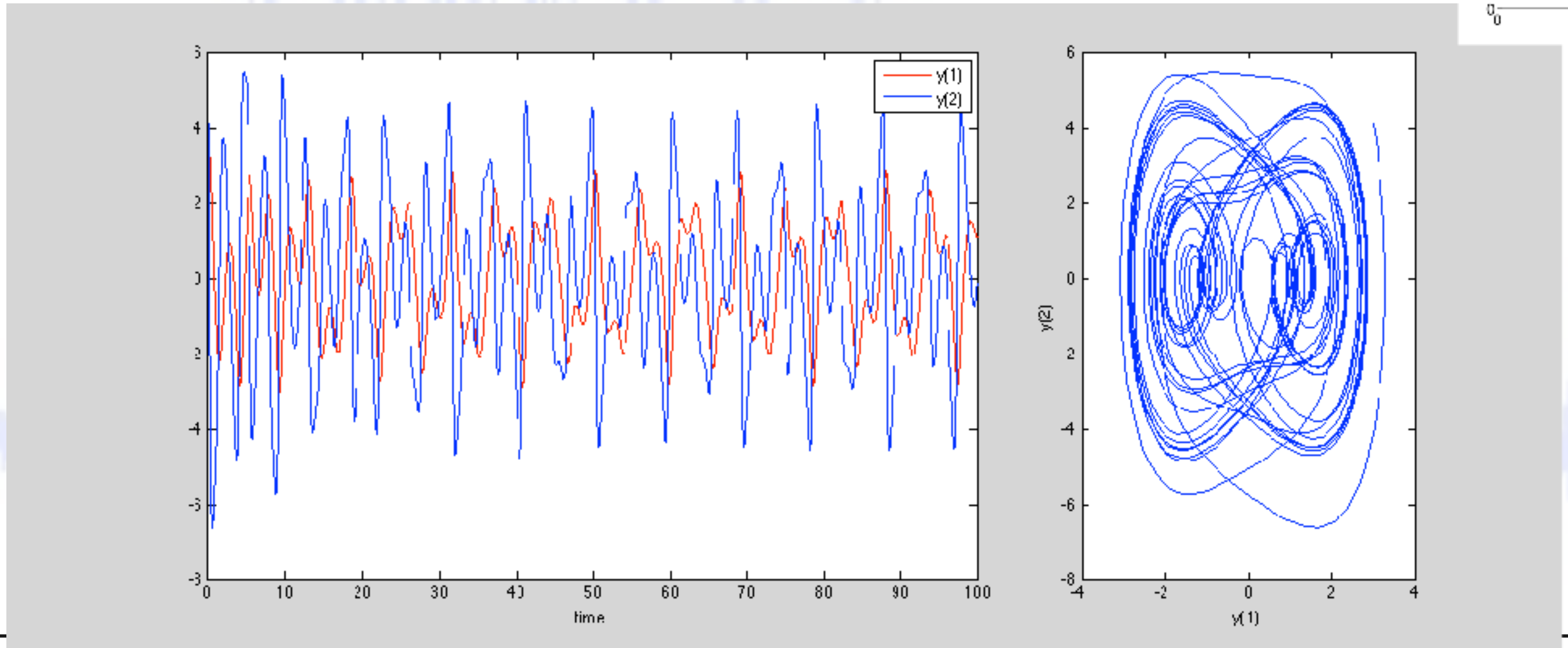
Oscillatore di Duffing

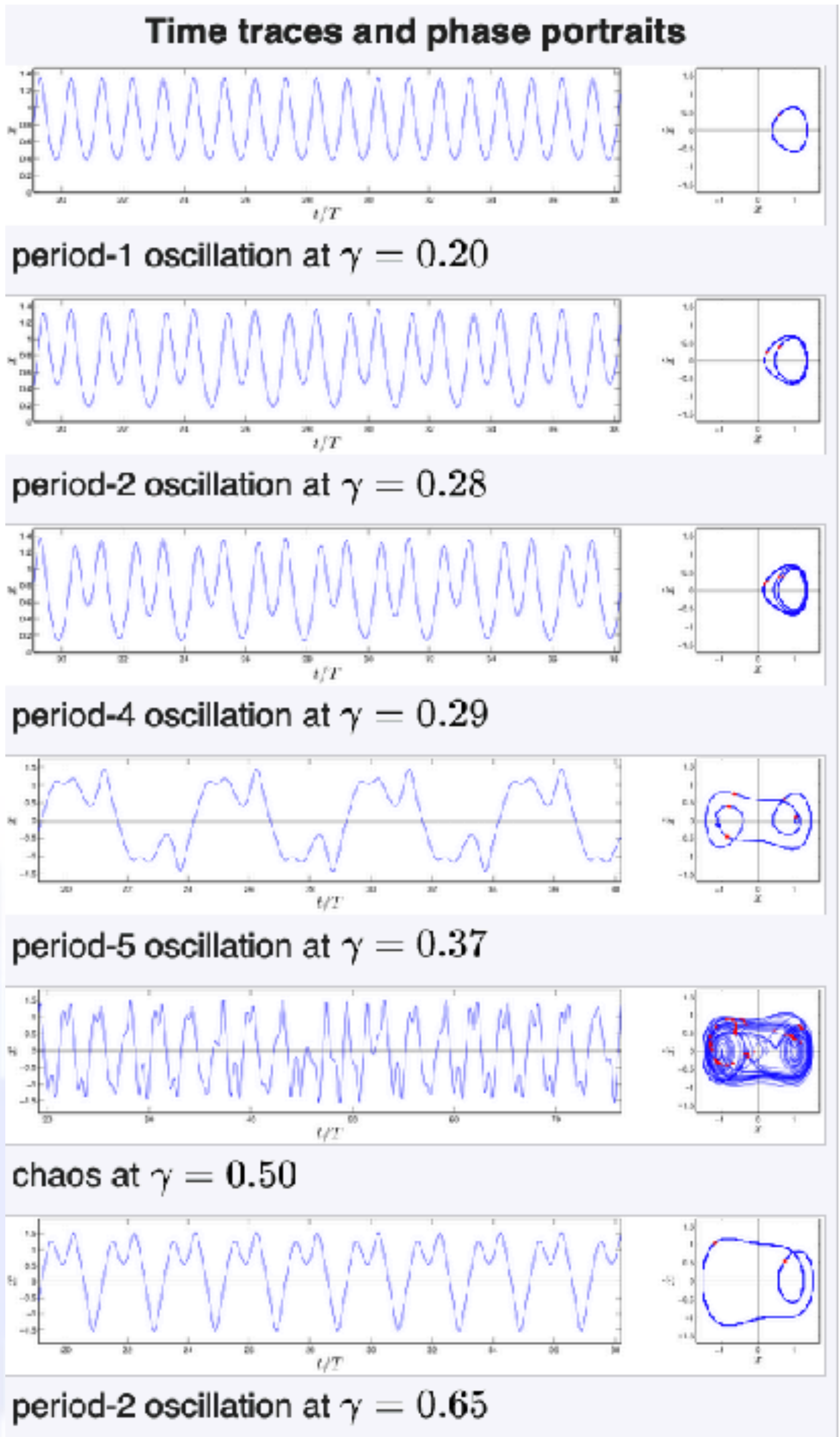
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\left(\beta x^3+\omega_0^2x\right)=\gamma\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

cut and paste in Matlab

```
delta = 0.06; beta = 1.0;
w0 = 1.0; w = 1.0; gamma = 6.0; phi = 0;
 dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -delta*y(2)-(beta*y(1)^3 + w0^2*y(1))+gamma*cos(w*t+phi)];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 100], [3.0 4.1],odeopt);
subplot(1,3,[1 2]);plot(t,y(:,1),’r-',t,y(:,2),'b-');
 xlabel('time'); legend('y(1)','y(2)');
subplot(1,3,3);plot(y(:,1),y(:,2));
xlabel('y(1)'); ylabel('y(2)');
```





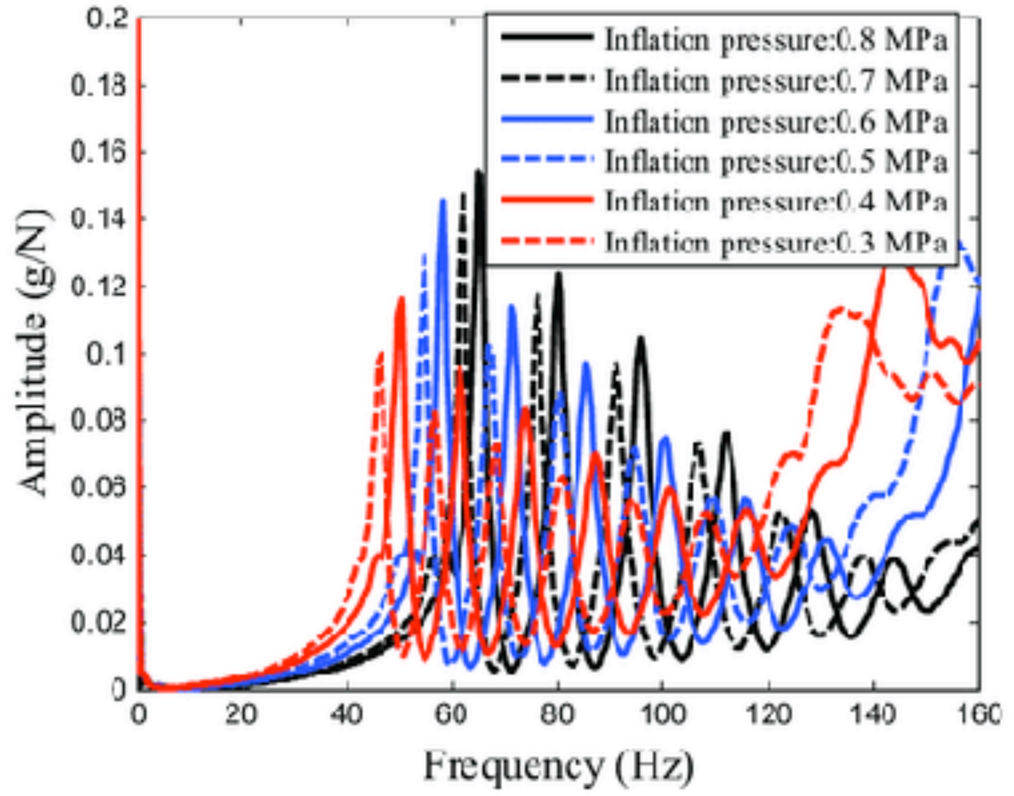


Funzioni di trasferimento

Scritte le equazioni del moto,
interessare conoscere il legame tra la forzante applicata
e la risposta del sistema.

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

es. note le asperità della strada, sapere di quanto si muove il sedile del guidatore..
come si trasferisce l'eccitazione dal pneumatico al sedile



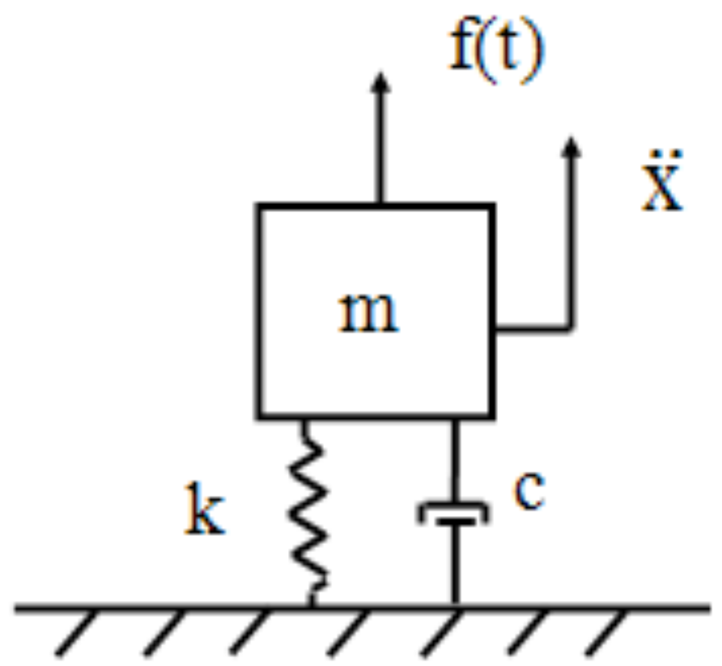
Le funzioni di trasferimento si calcolano solitamente nel dominio della
frequenza (piuttosto che nel dominio del tempo)
(proprietà della trasformata di Fourier moltiplicazione/convoluzione)

Si parte solitamente dalla trasformata di Laplace che trasforma l'equazione del moto,
differenziale ordinaria, in una equazione algebrica.
Attenzione, l'equazione di partenza è espressa nel dominio Reale
quella di algebrica nel dominio Complesso

$$A(s)=\int_0^\infty a(t)e^{-st}dt$$

s è un numero complesso!
s=a+jb

Vediamo un esempio per il solito caso di un sistema SDOF smorzato e forzato



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

a questa applichiamo la trasformata di Laplace

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$L\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) + sX(0) + \dot{X}(0)$$
$$L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) + X(0)$$

https://web.stanford.edu/~boyd/ee102/laplace-table.pdf

Notiamo il cambio di variabili t>s
ed il fatto che possiamo raccogliere X(s)

$$\left[ms^2 + cs + k\right] X(s) = F(s)$$

$$\left[Z(s)\right] X(s) = F(s)$$

$$\left[ms^2 + cs + k\right] = \left[Z(s)\right]$$

matrice di rigidezza dinamica! ..contiene inerzia e smorzamento!

Possiamo a questo punto scrivere:

$$[Z(s)] = \frac{F(s)}{X(s)}$$

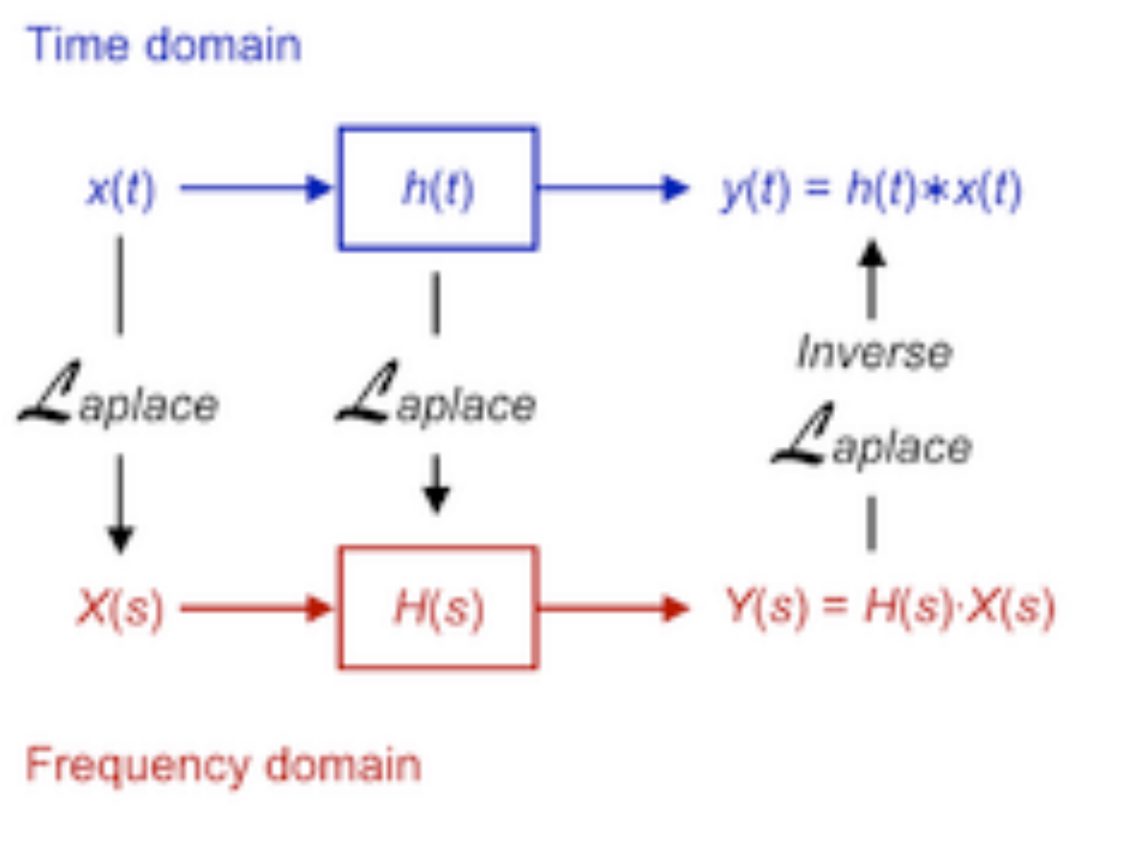
rigidezza dinamica
..definisce il legame tra lo spostamento applicato e la forza risultante

$$[H(s)] = [Z(s)]^{-1} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

funzione di trasferimento
..definisce il legame tra la forza applicata e lo spostamento risultante

$$[ms^2 + cs + k]$$

si ricorda che s è complesso! > Z(s) è complesso > H(s) è complesso!
>> Ampiezza e Fase
>> Parte Reale e Parte Immaginaria



Se s=jω , ω>0 (una fetta della funzione di trasferimento)
si parla di Funzione di Risposta in Frequenza

Luigi BREGANT
bregant@units.it

nel caso di un sistema SDOF:

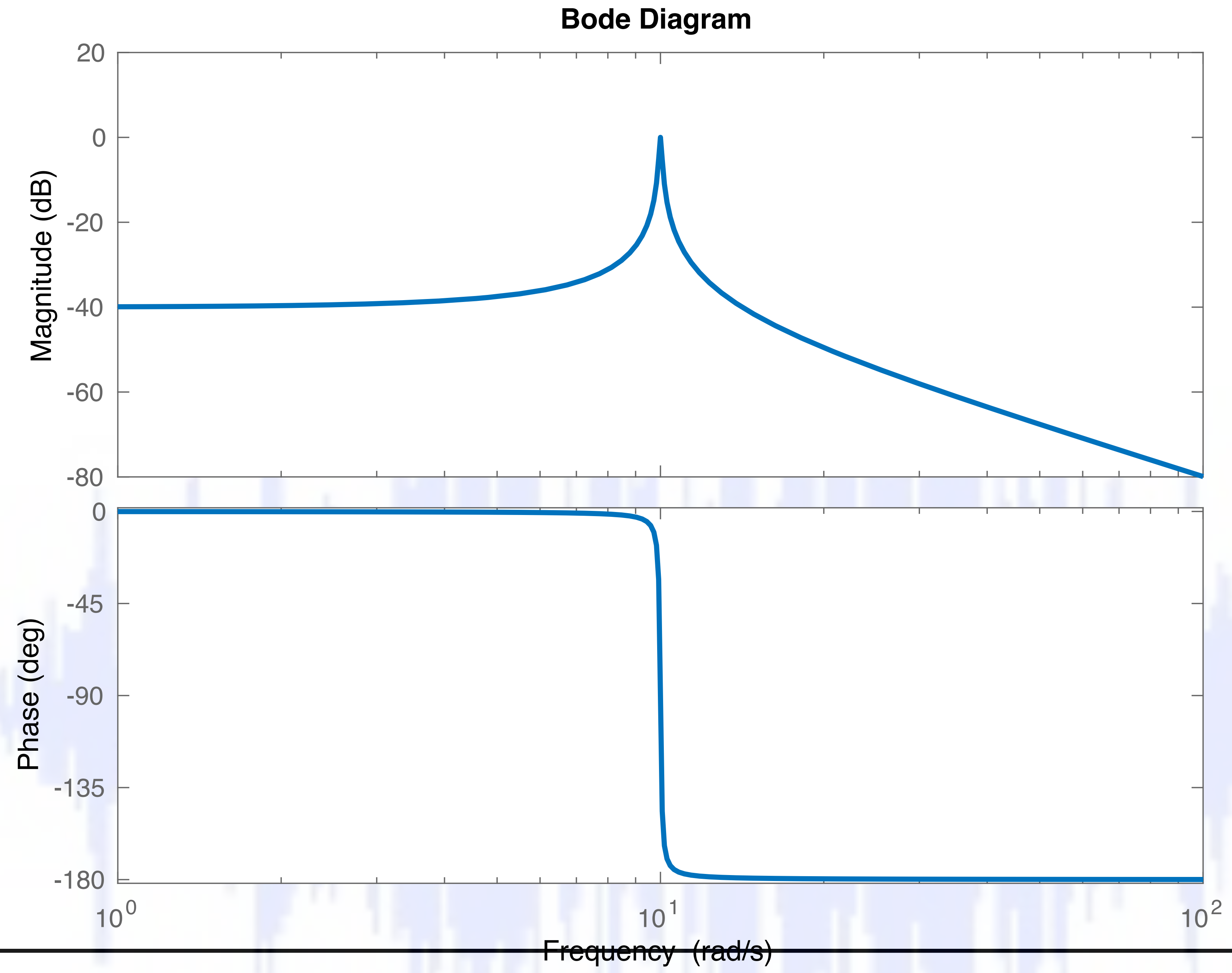
$$\left[ms^2 + cs + k\right] X(s) = F(s)$$

$$\left[H(s)\right] = \frac{1}{\left[ms^2 + cs + k\right]}$$

esistono valori di s che annullano il denominatore
> la funzione di trasferimento va all’infinito
>> risonanze del sistema

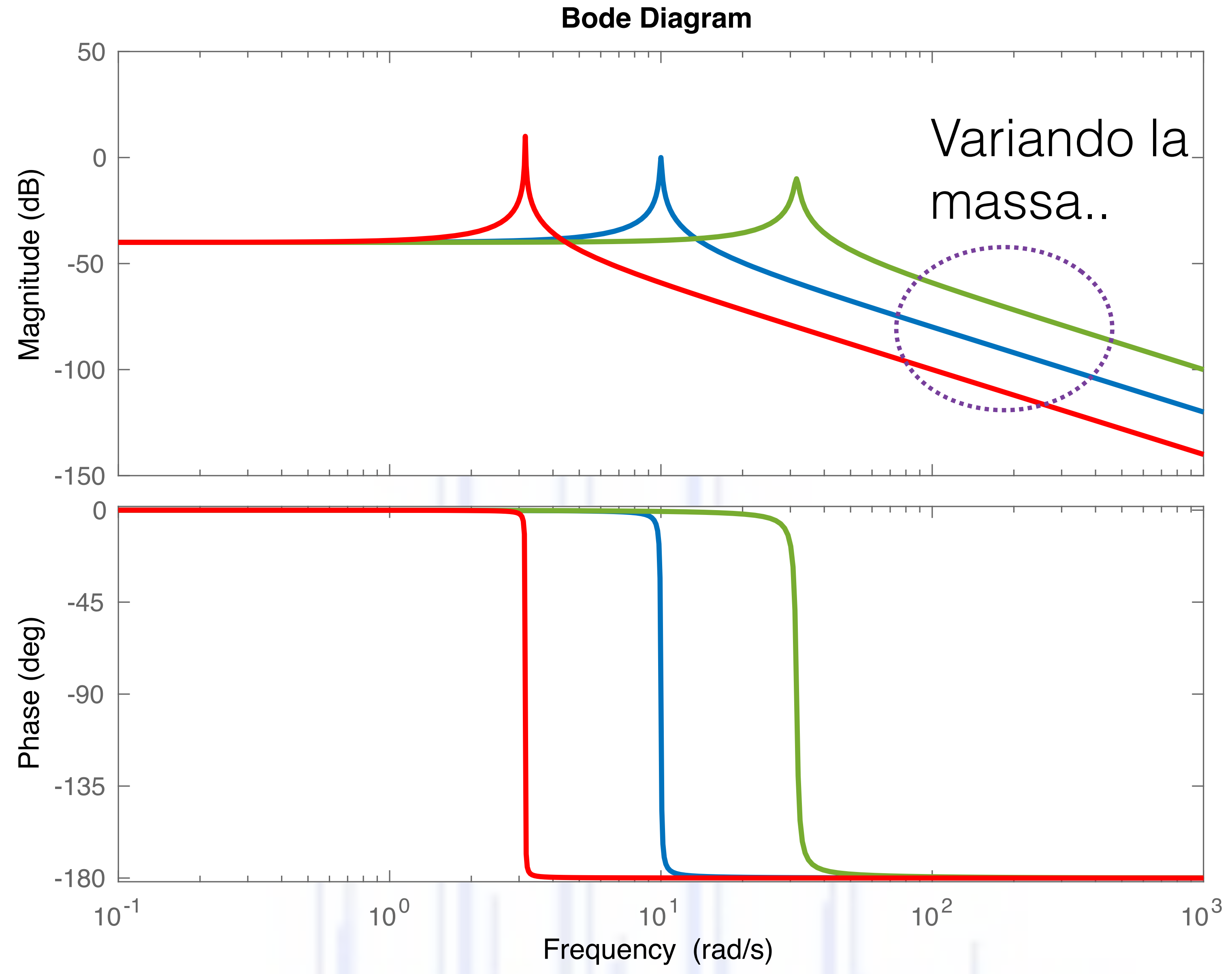
Ad esempio con
m=1 kg
c=0.1 Ns/m
k=100 N/m

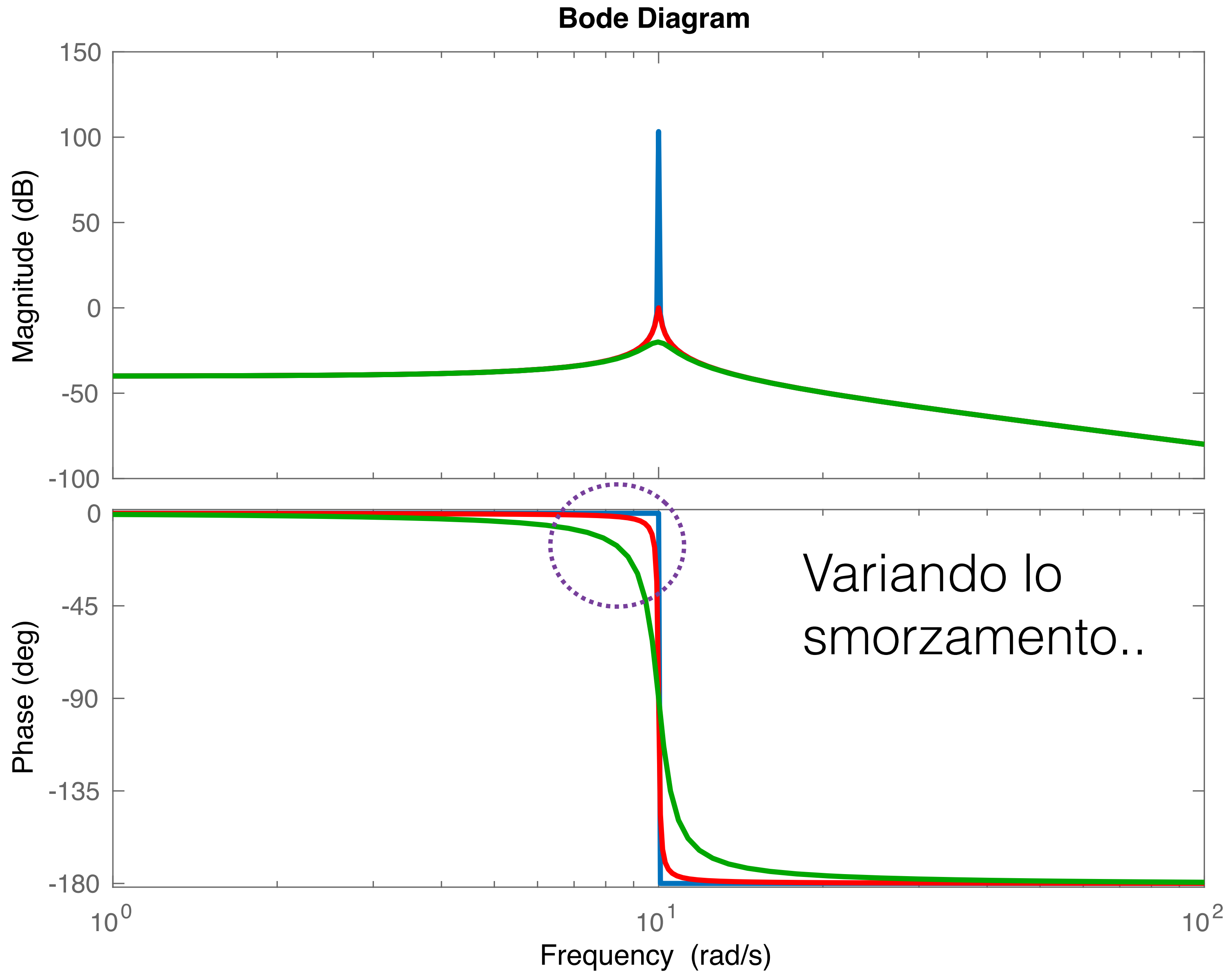
$$\left[H(s)\right] = \frac{1}{\left[1s^2 + 0.1s + 100\right]}$$

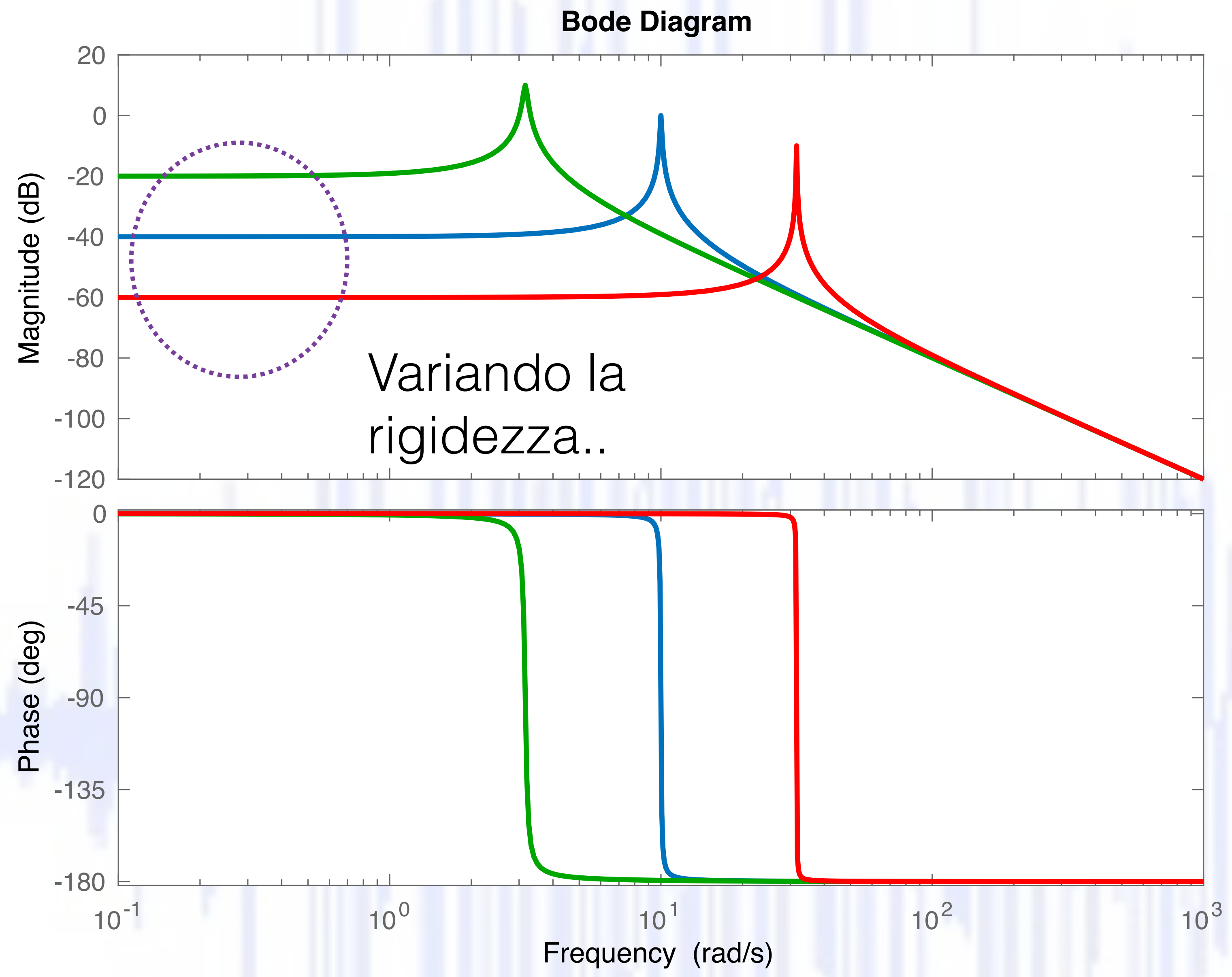


le cui radici sono *
s_1=-0.5+j9.99
s_2=0.5+j9.99

* vedi posizione
radici in funzione dello
smorzamento - slide 6







Avendo a disposizione un modello matematico è facile vedere che l'effetto hanno le variazioni delle caratteristiche del sistema sulla funzione di risposta.

NB..Gli effetti sono molto diversi ..

Nel caso di un sistema MDOF a n GDL, tutti i valori precedentemente scalari diventano matrici (NxN):

$$\left[[m]s^2 + [c]s + [k]\right]\{X(s)\} = \{F(s)\}$$

$$\left[H(s)\right] = \left[Z(s)\right]^{-1} = \frac{adj\left[Z(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]}$$

rapporto tra la matrice aggiunta di Z (NxN)
ed il determinate della matrice Z, polinomio di ordine 2N

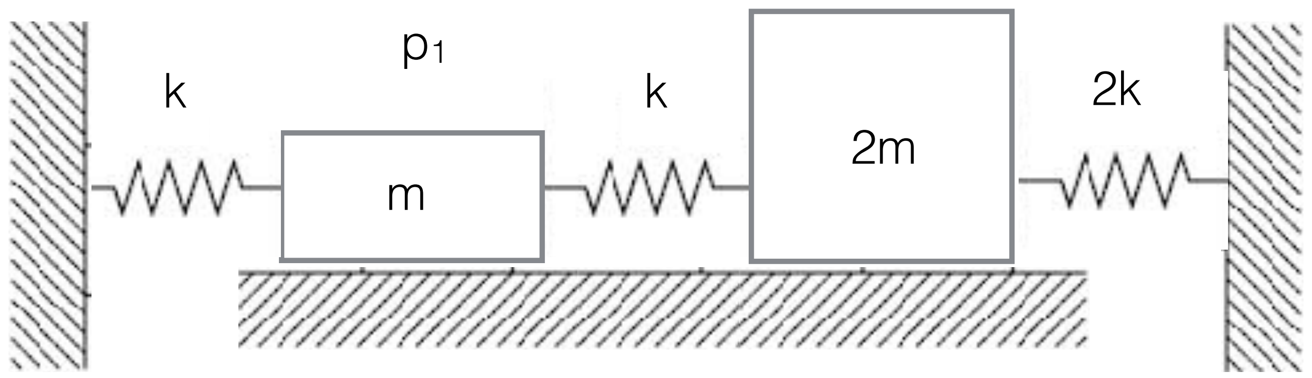
$$H_{i,j}(s) = \frac{X_i(s)}{F_j(s)}$$

NB [H(s)] è tridimensionale.. ogni singolo elemento della matrice $H_{i,j}(s)$ è definito in un range di frequenze

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]}$$

i valori di s
per cui si annulla $adj_{i,j}Z(s)$ sono gli **ZERI** della funzione > anti risonanze $H_{ij}\to 0$
per cui si annulla detZ(s) sono i **POLI** della funzione > risonanze $H_{ij}\to\infty$

Vediamo un esempio di un sistema 2gdl, non smorzato, forzato



$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

$$\left[k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}-\Omega^2 m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-\Omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\Omega^2 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

NB ogni elemento della matrice aggiunta è differente
> diverse anti risonanze

NB il determinante è uguale per tutte le funzioni
> stesse risonanze

$$[Z]^{-1}=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} 3k-\Omega^2 2m & k \\ k & 2k-\Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta}=\begin{bmatrix} \dfrac{3k-\Omega^2 2m}{\Delta} & \dfrac{k}{\Delta} \\ \dfrac{k}{\Delta} & \dfrac{2k-\Omega^2 m}{\Delta} \end{bmatrix}$$

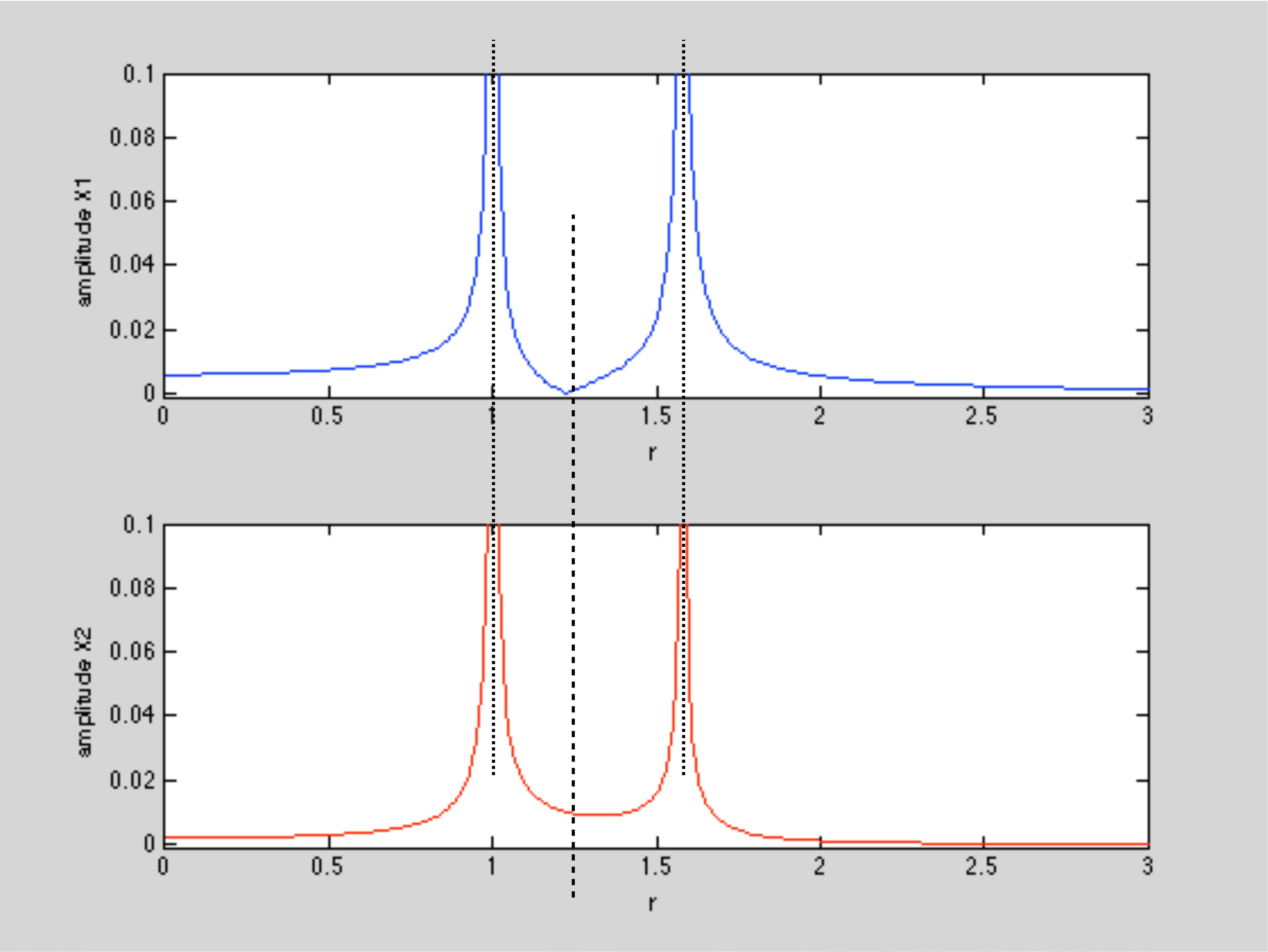
$$\Delta=\left(2k-\Omega^2 m\right)\left(3k-\Omega^2 2m\right)+k^2$$
$$=2m^2\Omega^4-7mk\Omega^2+5k^2$$

Determinante del sistema o
Polinomio Caratteristico

circa le risposte dei due gradi di libertà dovuti alla forzante p_0:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3k - \Omega^2 2m & k \\ k & 2k - \Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\left(3k - \Omega^2 2m\right) p_0}{\Delta} \\ X_2 = \dfrac{k p_0}{\Delta} \end{cases}$$



Si può plottare la risposta in funzione di $r = \Omega / \omega$..

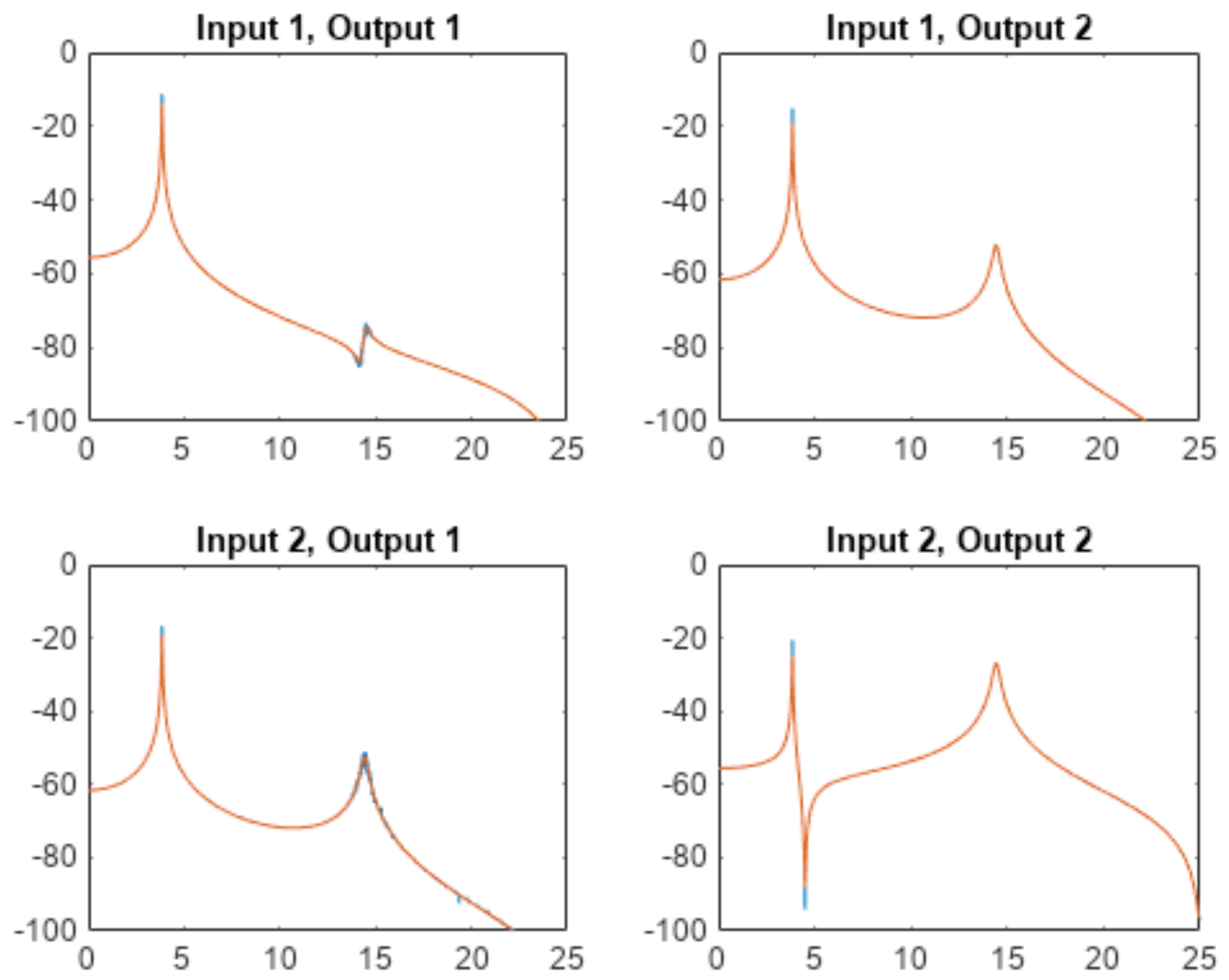
per alcuni valori di Ω, il numeratore va a zero
> **antirisonanza**, risposta va a zero,
massa 1 non si muove!! anche se c'è p_1
zeri del sistema

per alcuni valori di Ω, il denominatore va a zero
> **risonanza**, risposta va all'infinito (c=0)
poli del sistema

Da rimarcare il fatto che per un sistema a 2gdl, la matrice delle funzioni di risposta [H] è una matrice 2x2 (va da se che per un sistema a n GDL la matrice sarà NxN;

La matrice è simmetrica $H_{ij}(\omega)=H_{ji}(\omega)$ (teorema Maxwell),
derivante dal fatto che le matrici [m], [c] e [k] sono simmetriche
Nn serve calcolare tutte le NxN funzioni! (se n=100 basta calcolarne 990, non 10000!)

$$[Z]^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3k-\Omega^2 2m}{\Delta} & \dfrac{k}{\Delta} \\ \dfrac{k}{\Delta} & \dfrac{2k-\Omega^2 m}{\Delta} \end{bmatrix}$$



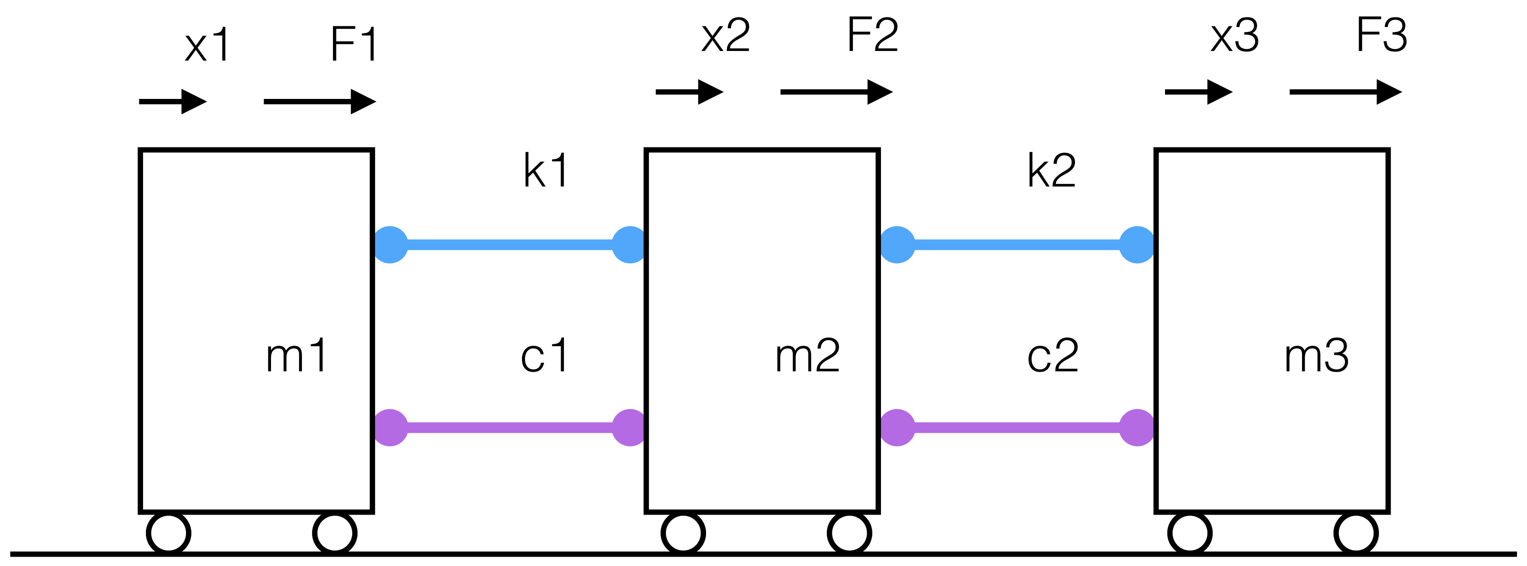
NB le righe della matrice [H] rappresentanti i punti di risposta,
le colonne i punti di eccitazione!

NB gli elementi H_{ii} sono detti funzioni di risposta diretta
gli elementi H_{ij} funzioni di trasferimento

NB nelle funzioni di risposta diretta, si presentano risonanze
e anti-risonanze in sequenza alternata

Queste FRF non sono attinenti all'esempio! provate a tracciarle voi!

Vediamo un esempio un sistema a 3gdl, smorzato, forzato



$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = f_1 \\
m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = f_2 \\
m_3\ddot{x}_3 + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2(x_3 - x_2) = f_3
\end{cases}
$$

equazioni accoppiate!

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}
+ \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}
+ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}
$$

Verificate che le matrici siano simmetriche!

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} s^2 X_1 \\ s^2 X_2 \\ s^2 X_3 \end{Bmatrix}
+ \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_3 \end{Bmatrix}
+ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}
$$

con la trasformazione di Laplace

$$
\begin{bmatrix} m_1 s^2 + sc_1 + k_1 & -sc_1 - k_1 & 0 \\ -sc_1 - k_1 & m_2 s^2 + s(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 & -sc_2 - k_2 \\ 0 & -sc_2 - k_2 & m_3 s^2 + sc_2 + k_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}
$$

La struttura è la solita: $[Z(s)]\, X(s) = F(s)$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\
[H(s)] = & \left[\begin{array}{ccc}
\dfrac{X_1(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_1(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_1(s)}{F_3(s)} \\[2ex]
\dfrac{X_2(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_2(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_2(s)}{F_3(s)} \\[2ex]
\dfrac{X_3(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_3(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_3(s)}{F_3(s)}
\end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow X_1 \\[4ex] \leftarrow X_2 \\[4ex] \leftarrow X_3 \end{array}
\end{array}
$$

frequenza

$$[H(s)] = [Z(s)]^{-1} = \frac{adj[Z(s)]}{\det[Z(s)]}$$

..il Determinante è un polinomio in s^6 (3gdlx2)

$$
Det[Z(s)] = s^2 \left[\begin{array}{c}
s^4 m_1 m_2 m_3 + s^3 (m_2 m_3 c_1 + m_1 m_3 c_1 + m_1 m_2 c_2 + m_1 m_3 c_2) \\
+ s^2 (m_1 m_3 k_1 + m_1 m_3 k_2 + m_1 m_2 k_2 + m_2 m_3 k_1 + m_2 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_2 + m_1 c_1 c_2) \\
+ s (m_3 c_1 k_2 + m_2 c_2 k_1 + m_1 c_2 k_1 + m_1 c_1 k_2 + m_3 c_2 k_1 + m_2 c_1 k_2) \\
+ (m_1 c_1 k_2 + m_2 k_1 k_2 + m_3 k_1 k_2)
\end{array}\right]
$$

Due soluzioni sono a s=0

>..?

cosa significa?

>..?

Cosa si può dire della matrice [k]?

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che i termini delle matrici [m] [c] [k] siano uguali per ogni indice i (es $m_1=m_2=m_3=m$) l'espressione del determinante (equazione caratteristica) si semplifica:

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[s^4\left(m^3\right)+\boxed{s^3\left(4m^2c\right)}+s^2\left(4m^2k+3mc^2\right)+\boxed{s\left(6mck\right)}+3mk^2\right]$$

termini pari e
termini dispari

Se si annulla lo smorzamento [c]=0 il determinate (equazione caratteristica) diventa:

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]$$

solo termini pari

cosa succede alle radici del polinomio?
> ..
dove si spostano le radica nel piano di Laplace?
>..

$$\frac{X_1}{F_1}=\frac{s^4m^2+s^2 3mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_2}=\frac{s^4m^2+s^2 2mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_3}{F_3}=\frac{s^4m^2+s^2 3mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_1}{F_2}=\frac{X_2}{F_1}=\frac{s^2mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_1}{F_3}=\frac{X_3}{F_1}=\frac{k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_3}=\frac{X_3}{F_2}=\dots$$

$$\boxed{\begin{aligned}s_{1,2}&=0\\ s_{3,4}&=\pm j\\ s_{5,6}&=\pm j\sqrt{3}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}z_{1,2}&=\pm j0.618\\ z_{3,4}&=\pm j1.618\end{aligned}}$$

$$\boxed{z_{1,2}=\pm j}$$

$$\boxed{z_{1,2}=/}$$

Poli (uguali per tutte le FRF)

$$\frac{X_i}{F_j}=\frac{f(m,c,k)}{0}\to\infty$$

Zeri (dipendenti dall'FRF)

$$\frac{X_i}{F_j}=\frac{0}{f(m,c,k)}\to 0$$

Concentriamo l'attenzione su $H_{1,1}[s]$.. ipotizziamo che m=k=1 c=0

$$\frac{X_1}{F_1} = \frac{s^4 m^2 + s^2 3mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{adj\left[Z_{1,1}(s)\right]}{\det\left[Z(s)\right]} = \frac{s^4 + 3s^2 + k^2}{s^2\left[s^4 + 4s^2 + 3\right]}$$

Notiamo il rapporto di due polinomi, cerchiamo le radici con il comando Matlab roots

radici del numeratore> **Zeri**

```
>>num= [1 0 3 0 1];
>>roots(num)
ans =
  -0.0000 + 1.6180i
  -0.0000 - 1.6180i
  -0.0000 + 0.6180i
  -0.0000 - 0.6180i
>>
```

$[1s^4+0s^3+3s^2+0s^1+1]$

4 radici, puramente immaginarie (smorzamento nullo), a due a due complesse coniugate
> **anti-risonanze** (della specifica funzione $H_{1,1}$)

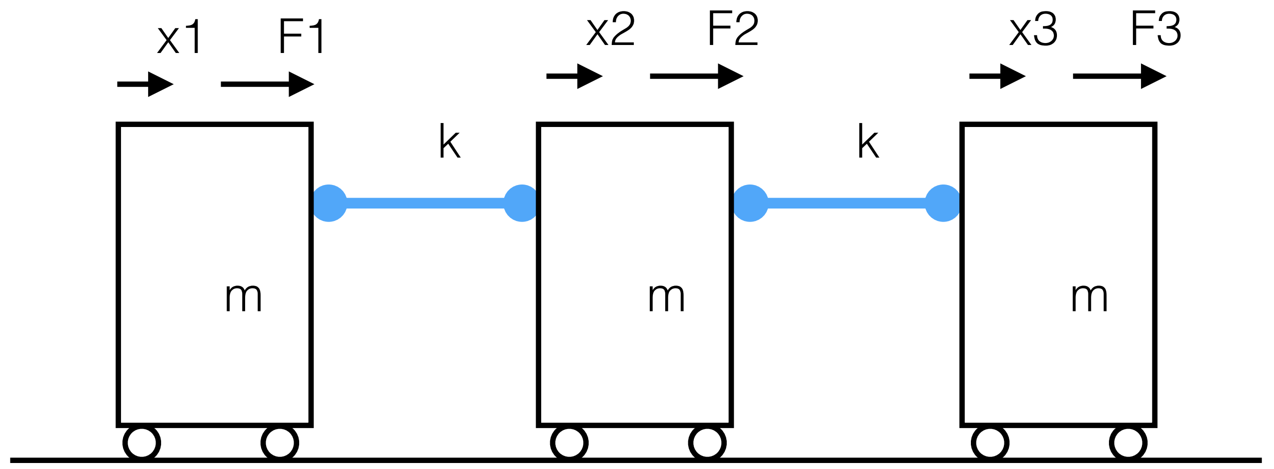
radici del denominatore > **Poli**

```
>> den=[1 0 4 0 3 0 0];
>>roots(den)
ans =
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.7321i
   0.0000 - 1.7321i
   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
>>
```

$[1s^6+0s^5+4s^4+0s^3+3s^2+0s^1+0]$

6 radici, puramente immaginarie (smorzamento null
a due a due complesse coniugate
> **risonanze** (di tutte le funzioni $H_{i,j}$)

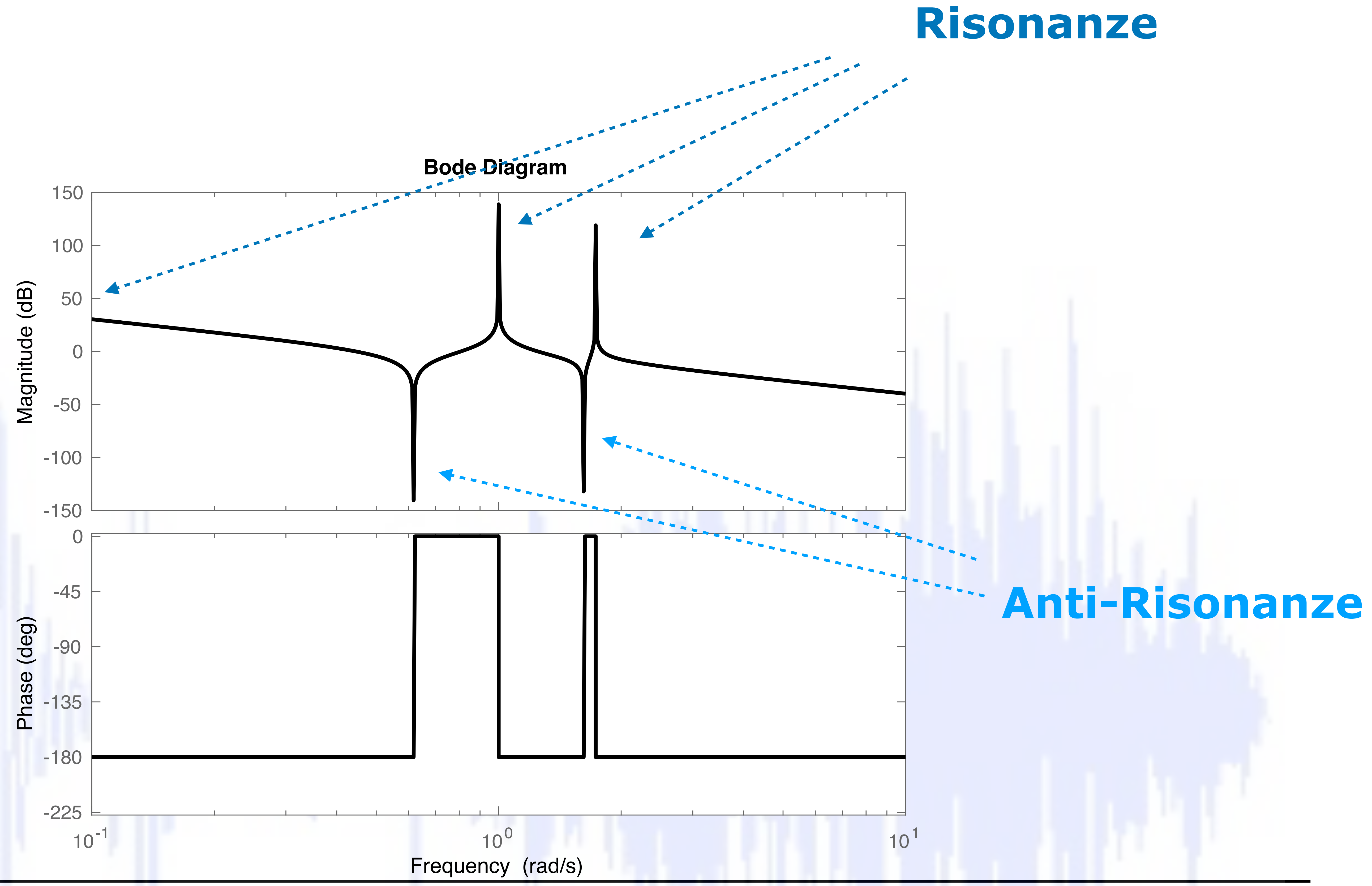
Le due radici a s=0 equivalgono ad un modo rigido in cui tutte le masse si muovono assieme e non si deformano le molle!



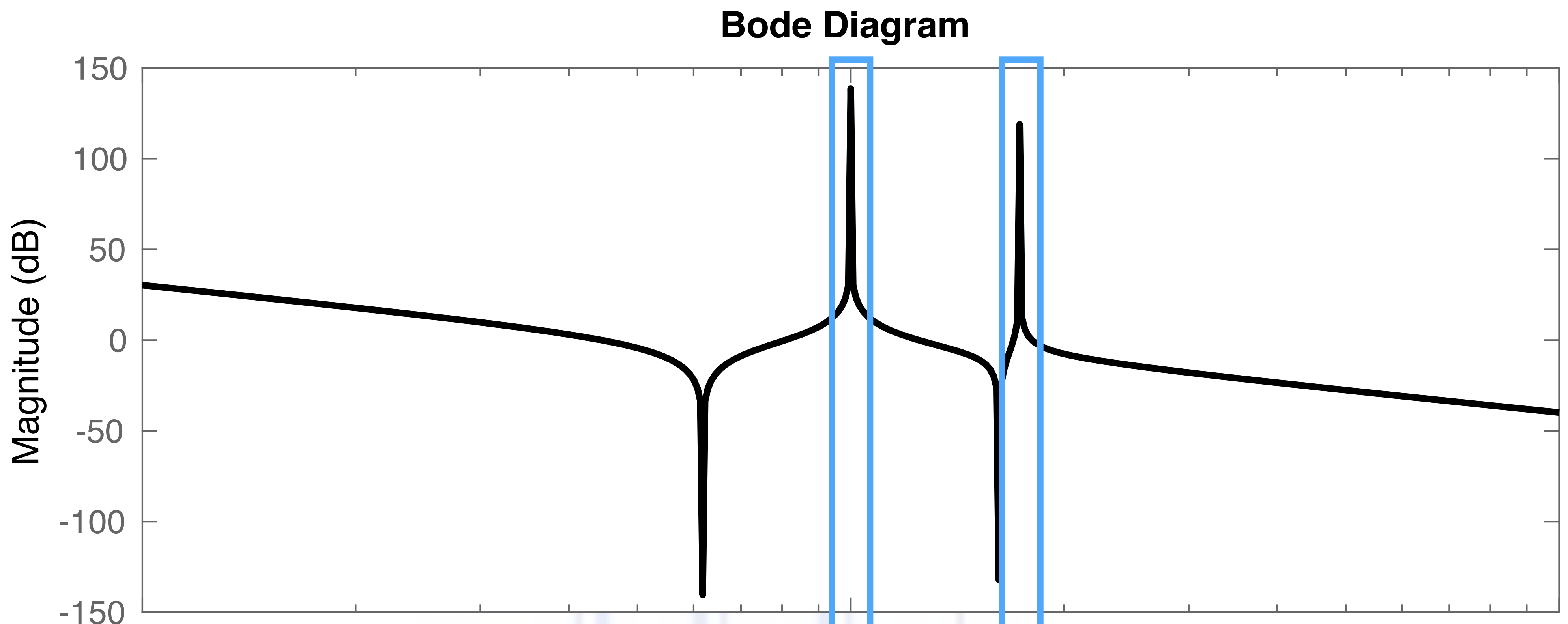
Matrice [k] singolare, no vincoli con esterno!

Per visualizzare la funzione di trasferimento, usiamo i comandi Matlab tf e bode

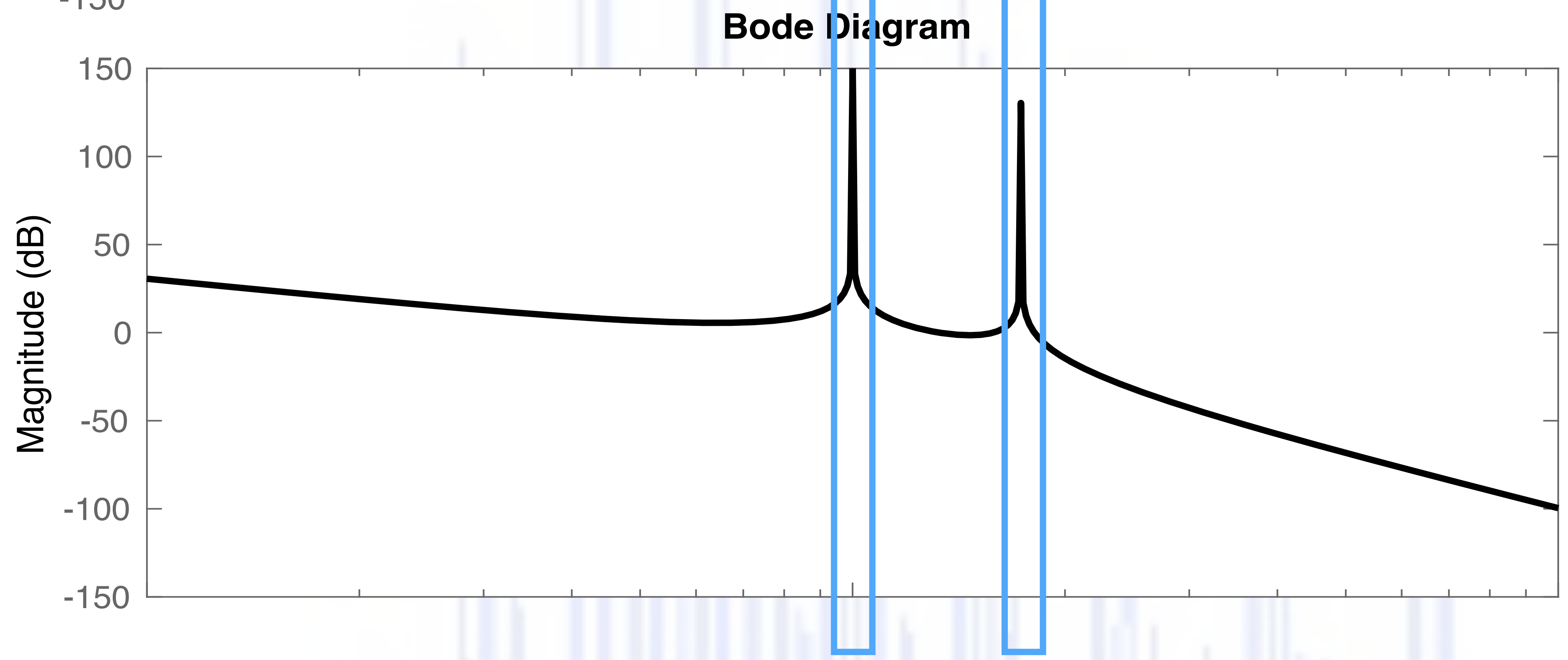
```
>>sys=tf(num,den)
sys =

   s^4 + 3 s^2 + 1
  -------------------
  s^6 + 4 s^4 + 3 s^2

Continuous-time transfer function.
>> bode(sys)
```



NB grafico è in logx logy



$H_{1,1}$ funzione di trasferimento diretta



$H_{1,2}$ funzione di trasferimento

La posizione delle risonanze non cambia!

Provate a visualizzare le altre $H_{i,j}$
>..?

Usate altri formati di rappresentazione
>..?

Provate a calcolare $H_{i,j}$ e risposte di altri sistemi non/vincolati non/smorzati non/forzati

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Abbiamo visto che le funzioni di trasferimento di riducono ad un rapporto tra polinomi. Da questa rappresentazione è possibile passare ad altre, in particolare alla ZPK (zero poli guadagno) o a quella con i Residui

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]} = \frac{A_1 s^p + A_2 s^{p-1} + A_3 s^{p-3} \ldots}{B_1 s^q + B_2 s^{q-1} \ldots}$$

Polinomio

Polinomio

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]} = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots}$$

Guadagno

Zeri

Poli

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]} = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_{i,j,r}}{s-p_r} + \frac{A^*_{i,j,r}}{s-p^*_r}$$

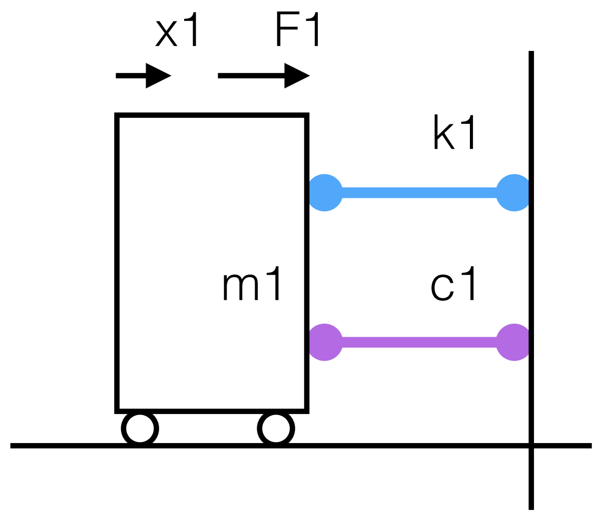
Residui

Poli

..più dettagli nella parte modale

..la scelta dipende dall'analisi richiesta

Vediamo un esempio di un sistema 1gdl, smorzato, forzato



$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(m_1 s^2+c_1 s+k_1\right)}=\frac{1}{\left(s^2+.1s+100\right)}$$

m=1
c=.1
k=1000

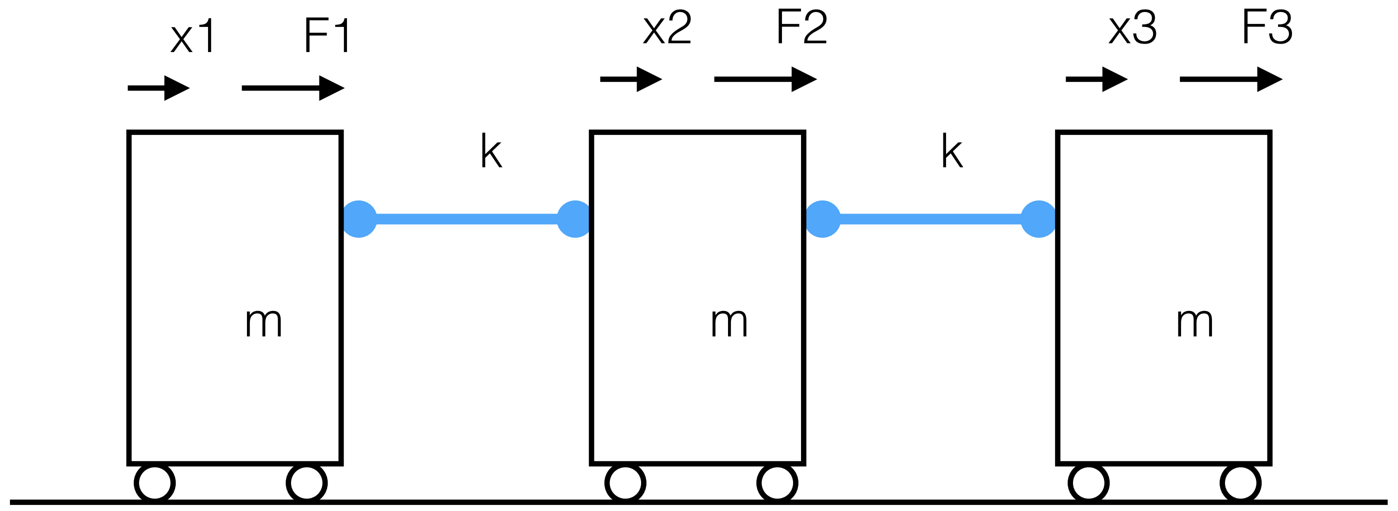
```
>>den=[1 .1 100]
>>roots(den)
```

p_1 -0.0500 + 9.9999i
p_1^* -0.0500 - 9.9999i

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(s+\underbrace{0.05-j*9.999}_{p_1}\right)\left(s+\underbrace{0.05+j*9.999}_{p_1^*}\right)}$$

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{-j*0.05}{(s+\underbrace{0.5-j*9.999}_{p_1})}+\frac{+j*.005}{(s+\underbrace{0.5+j*9.999}_{p_1^*})}$$

Vediamo un esempio di un sistema 3gdl, non smorzato, forzato



m=1
c=0
k=1

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{s^4+3s^2+1}{s^2\left[s^4+4s^2+3\right]}$$

```
>>den=[1 0 4 0 3 0 0 0]
>>roots(den)
  0.000+0.0000i
  0.000-0,0000i
  0.000+1.7321i
  0.000-1.7321i
  0.000+1,0000i
  0.000+1.0000i
```

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{(s+j*1.618)(s-j*1.618)(s+j*0.618)(s-j*0.618)}{s^2(s+j*1.732)(s-j*1.732)(s+j)(s-j)}$$

```
>>num=[1 0 3 0 1]
>>roots(num)
  0.000+1.6180i
  0.000-1.6180i
  0.000+0.6810i
  0.000-0.6810i
```

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{-j*0.0481}{(s+j*1.732)}+\frac{j*0.0481}{(s-j*1.732)}+\frac{-j*0.25}{(s+j)}+\frac{j*0.25}{(s-j)}+\frac{0.33}{s}$$

Le equazioni del moto di sistema MDOF sono solitamente accoppiate
(matrici con termini fuori diagonali diversi da zero),
questo richiede una soluzione che soddisfi contemporaneamente tutte le equazioni del sistema..
potrebbe diventare difficile!

E' possibile disaccoppiare le equazioni con un'opportuna trasformazione di coordinate, rendendo le N equazioni indipendenti ! > più facili da risolvere!!

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

La trasformazione modale $\{x\} = [\phi]\{q\}$

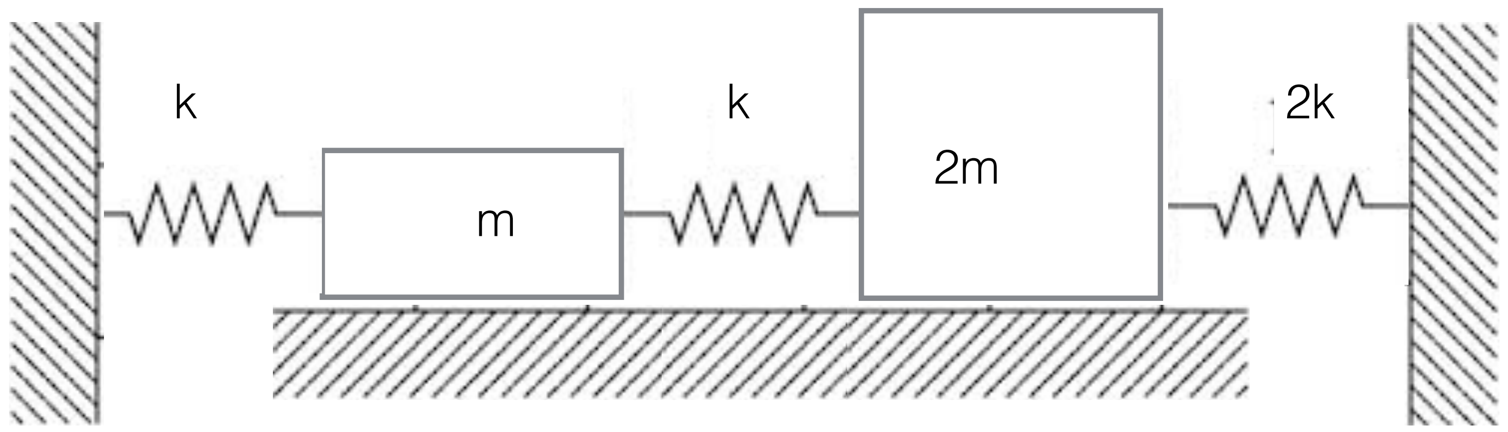
Coordinate Fisiche

Matrice Modale
(colonne sono le deformate modali)

Coordinate Modali
(virtuali)

Quello che ci manca è definire la deformata modale..
La deformata modale è la deformata del sistema associata ad una specifica frequenza naturale
(sistema di ordine N >> 2N frequenze naturali (complesse coniugate)
>> 2N deformate modali (complesse coniugate))

Vediamolo con esempio..



$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

le equazioni del moto

$$\left[k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}-\omega^2 m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\{0\}$$

con la solita trasformazione

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\{X\}=0$$

osserviamo la struttura di questa equazione se moltiplichino tutto per $[k]^{-1}$ o per $[m]^{-1}$ (sempre si possa fare…invisibilità matrice!)

$$\left[[k]^{-1}[k]-\omega^2[k]^{-1}[m]\right]\{X\}=0$$

$$\left[[k]^{-1}[m]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right]\{X\}=0$$

$$\left[[m]^{-1}[k]-\omega^2[m]^{-1}[m]\right]\{X\}=0$$

$$\left[[m]^{-1}[k]-\omega^2[I]\right]\{X\}=0$$

In entrambi i casi atteniamo una struttura del tipo: $\big[[A]-\lambda[I]\big]\{X\}=0 \qquad [A]\{X\}=\lambda\{X\}$

Problema AutoValori - AutoVettori ..Riguardare Geometria per i dettagli!

$$\big[[k]-\omega^2[m]\big]\{X\}=0$$

Di questa equazione non ci interessa la soluzione banale {X}=0
per la quale gli spostamenti sono nulli!
ma quella in cui ω annulla la matrice a sx dell'equazione

$$\big[[k]-\omega^2[m]\big]=0$$

$$\big|[k]-\omega^2[m]\big|=0$$

Ciò equivale a trovare gli 0 del determinante della matrice!

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\omega^2 2m \end{vmatrix}=0$$

come già visto gli zeri delle'equazione caratteristica!

$$(2k-\omega^2 m)(3k-\omega^2 2m)-(-k)(-k)=0$$

se m=1 e k=1..

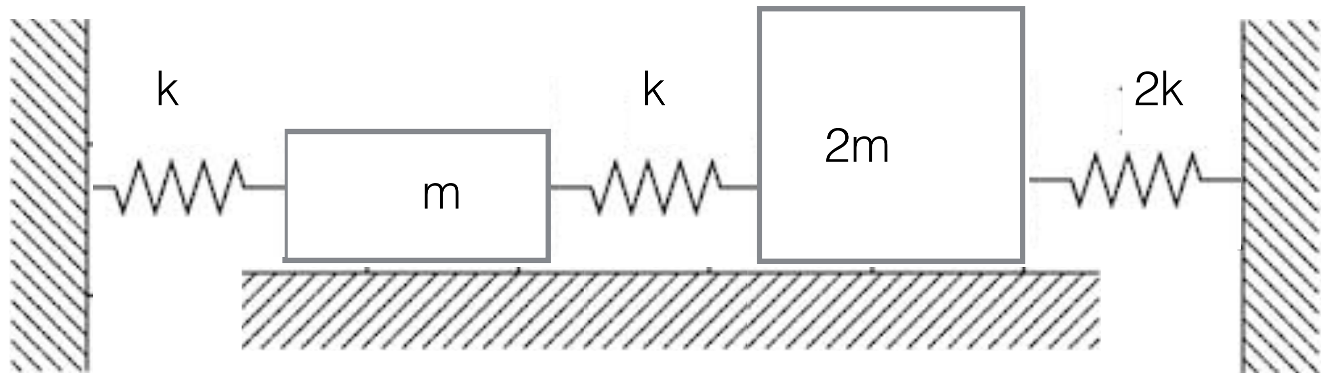
$$2\omega^4-7\omega^2+5=0$$

$$\omega^2_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\frac{7\pm 3}{4}= \begin{cases} =1 \\ =\dfrac{10}{4}=2.5 \end{cases}$$

```
>> k=[2 -1; -1 3];
>> m=[1 0; 0 2];
>> [eig_vettori,eig_valori]=eig(k,m)
eig_vettori =
  -0.5774   -0.8165
  -0.5774    0.4082
eig_valori =
   1.0000        0
        0    2.500
>>
```

scalaggio

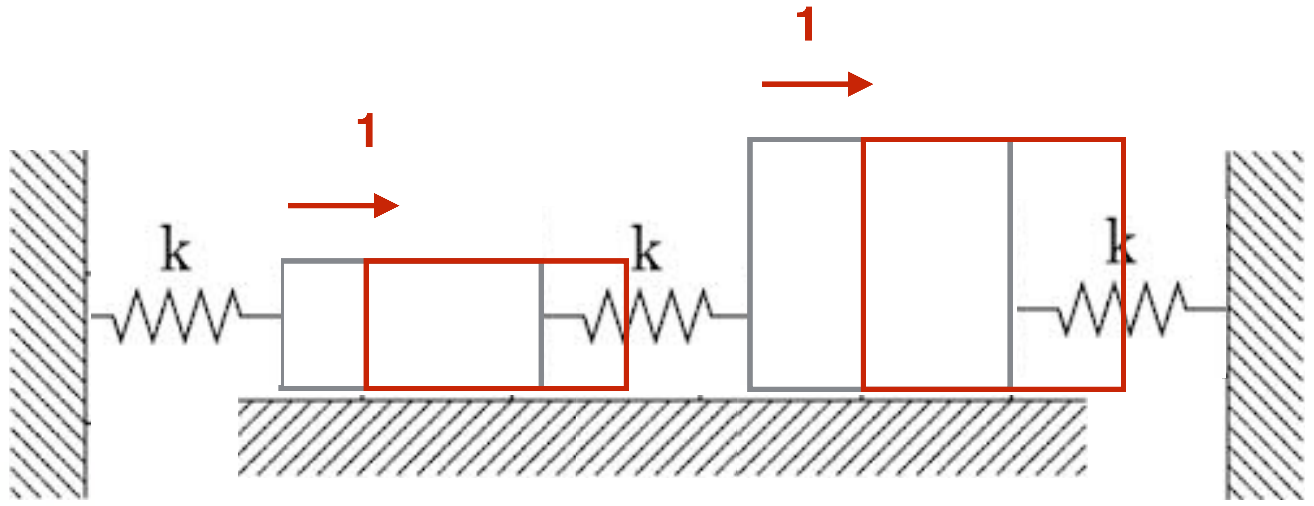
Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono le frequenze naturali e gli autovalori del sistema!!



Gli autovettori associati a detti autovalori sono le deformate del sistema alla frequenza naturale…le deformate modali cercate!

@1rad/s

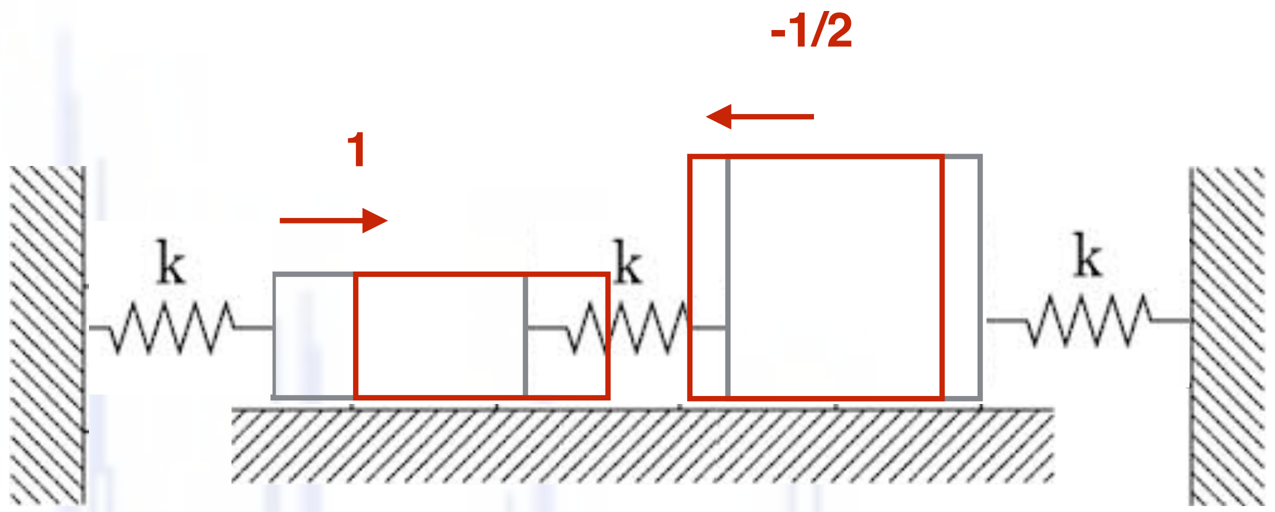
$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Le due masse si muovono in fase

@ 2.5rad/s

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$



Le due masse si muovono in opposizione di fase

(ricordiamo che il sistema ha 2DOF
>due pulsazioni naturali e due modi di vibrare
la pulsazione ha unità di misura, il modo di vibrare, no!)

se mettiamo le due deformate modali in una matrice otteniamo la matrice modale [Φ] alla base della trasformazione cercata!

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vediamo come usare la matrice modale per disaccoppiare le d'equazione del sistema:

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$ equazione del moto in coordinate fisiche (Accoppiate)

$$\{x\}=[\phi]\{q\}$$ trasformazione di coordinate (vale anche per le derivate !)

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[c][\phi]\{\dot{q}\}+[k][\phi]\{q\}=\{f\}$$

$$[\phi]^t[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[\phi]^t[c][\phi]\{\dot{q}\}+[\phi]^t[k][\phi]\{q\}=[\phi]^t\{f\}$$ moltiplico tutto per la matrice modale trasposta

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{F\}$$ equazione del moto in coordinate modali (Disaccoppate)

$$[\phi]^t[m][\phi]=[M] \qquad [\phi]^t[c][\phi]=[C] \qquad [\phi]^t[k][\phi]=[K] \qquad [\phi]^t\{f\}=\{F\}$$

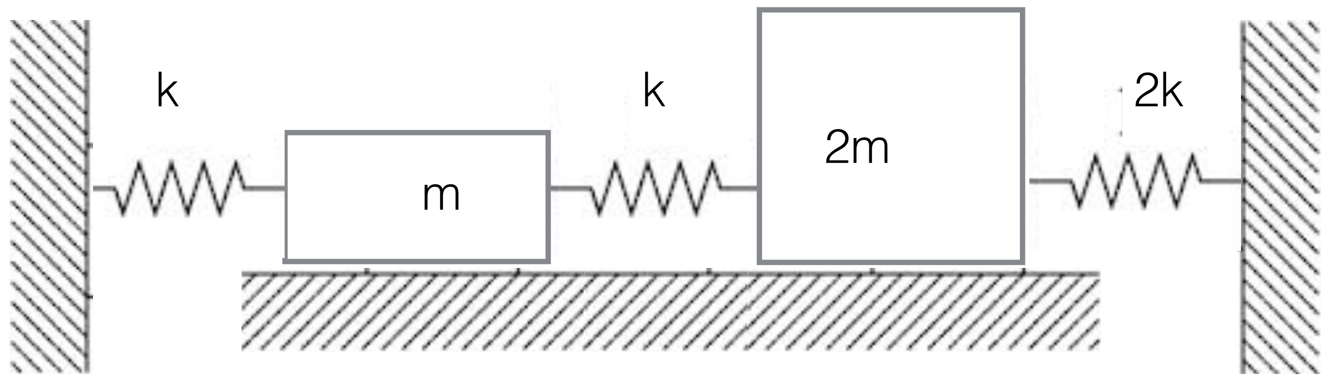
massa modale

smorzamento modale

rigidezza modale

forzante modale

Vediamo come funziona nell'esempio fatto:
(sempre con se m=1 e k=1..)



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

equazione del moto in coordinate fisiche (Accoppiate)

$$\{x\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \{q\}$$

trasformazione di coordinate

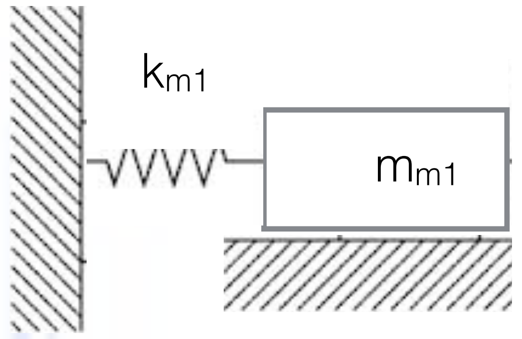
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

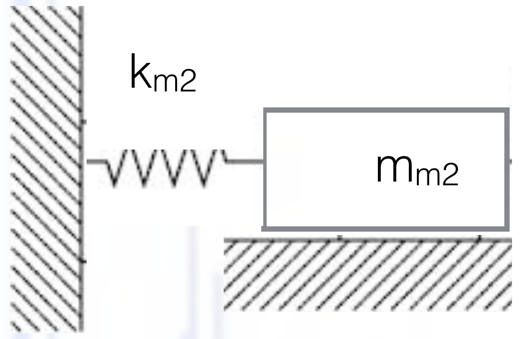
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

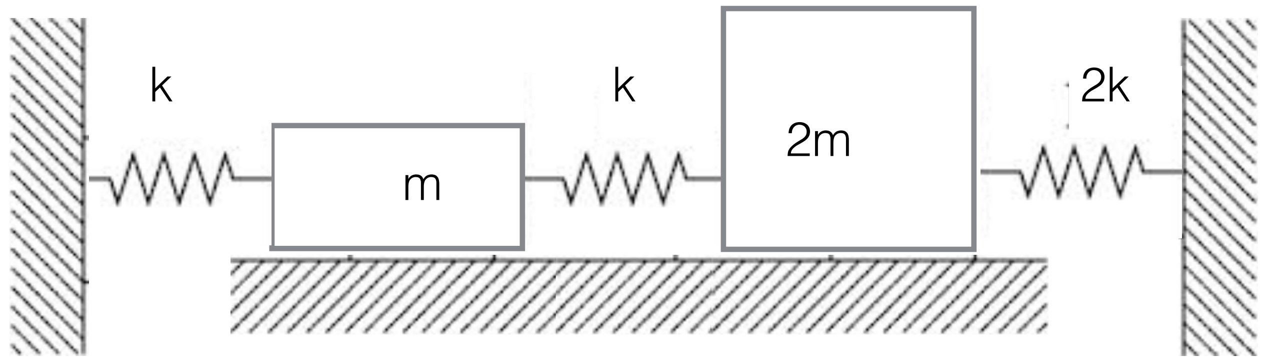
equazione del moto in coordinate modali (Disaccoppiate)

Abbiamo cosi due equazioni indipendenti, che descrivono due sistemi a 1 gdl!
(facili facili da risolvere)

$$3\ddot{q}_1 + 3q_1 = 0$$
$$\frac{3}{2}\ddot{q}_2 + \frac{15}{4}q_2 = 0$$

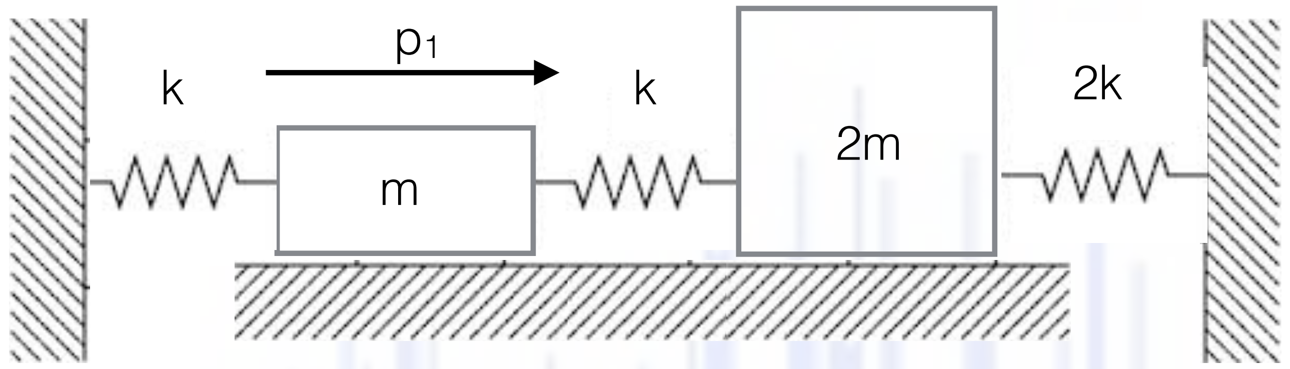






$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La trasformazione modale appena vista vale anche per le forzanti!



$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

$$m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

..e vedremo anche vale anche per le condizioni iniziali

La risposta del sistema in coordinate fisiche si ottiene combinando le risposte dei sistemi 1gdl in coordinate modali!

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - \frac{1}{2} q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3m\ddot{q}_1 + 3kq_1 = p_0 \cos \Omega t \\ 3/2\, m\ddot{q}_2 + 15/4\, kq_2 = p_0 \cos \Omega t \end{cases}$$

usiamo la solita soluzione armonica di primo tentativo: $q_i = Y_i \cos \Omega t$

$$\begin{cases} \left(3k - 3m\Omega^2\right) Y_1 = p_0 \\ \left(15/4\, k - 3/2\, m\Omega^2\right) Y_2 = p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{p_0}{\left(3k - 3m\Omega^2\right)} = \dfrac{1/3\, kp_0}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \\ Y_2 = \dfrac{p_0}{\left(15/4\, k - 3/2\, m\Omega^2\right)} = \dfrac{4/15\, kp_0}{1 - \left(\dfrac{2}{5} \dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

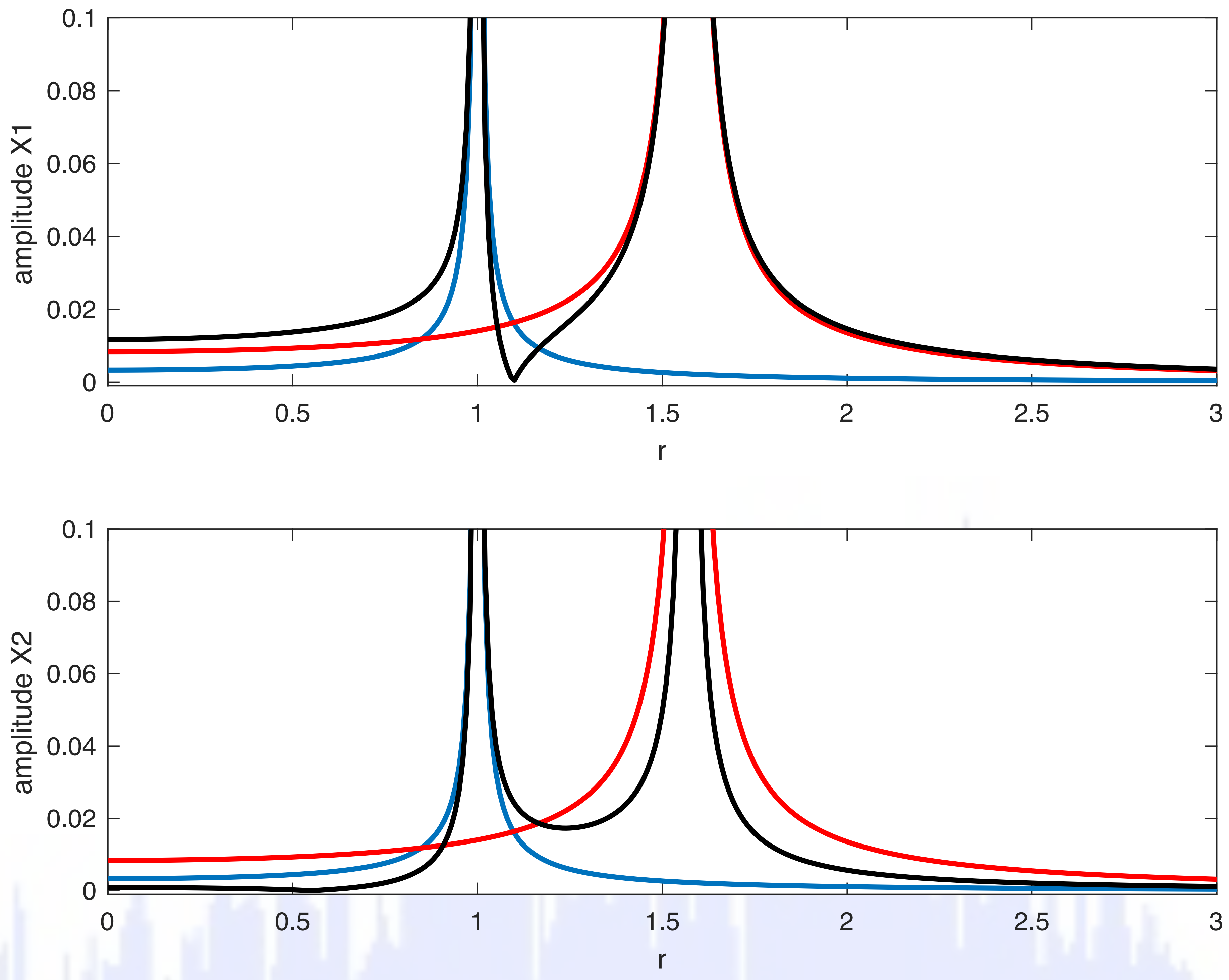
NB ci sono due risposte che dipendono dalle due frequenze naturali precedentemente identificate ω_1 e ω_2

La risposta del sistema in coordinate fisiche si ottiene combinando le risposte dei sistemi 1gdl in coordinate modali anche nel dominopo della frequenza!

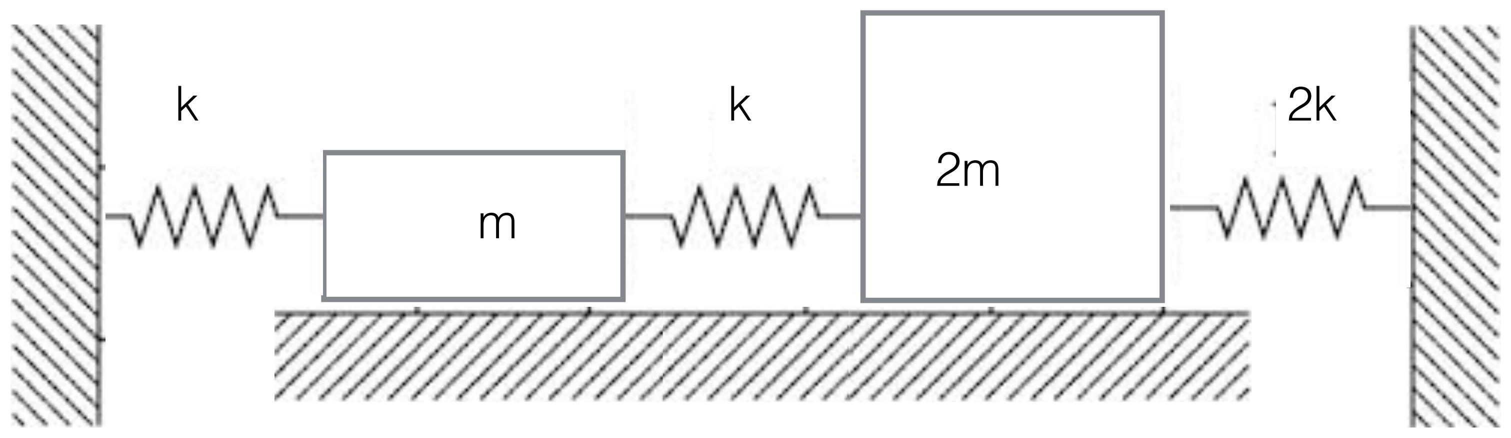
Vedi grafico sezione
Funzioni di Trasferimento

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 + Y_2 \\ Y1 - \frac{1}{Y_2} 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\frac{1}{3} kp_0}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} + \dfrac{\frac{4}{15} kp_0}{1 - \left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \\ X_2 = \dfrac{\frac{1}{3} kp_0}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{4}{15} kp_0}{1 - \left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$



In un sistema a 2dgl ci sono due frequenze naturali (4, a due a due complesse coniugate) due forme modali (4, a due a due complesse coniugate)



Vediamo come trovare gli autovettori.. a mano
(ricordiamo gli autovalori sono gli zeri dell'equazione caratteristica..)
(sempre con se m=1 e k=1..)

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\omega_i^2 & -1 \\ -1 & 3-\omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

sostituiamo i valori di ω trovati ($\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=2.5$)
es nella prima equazione

$$(2-\omega_i^2)X_1 - X_2 = 0$$

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = (2-\omega_i^2)$$

$$\beta_1 = \frac{X_2}{X_1} = (2-1) = 1$$

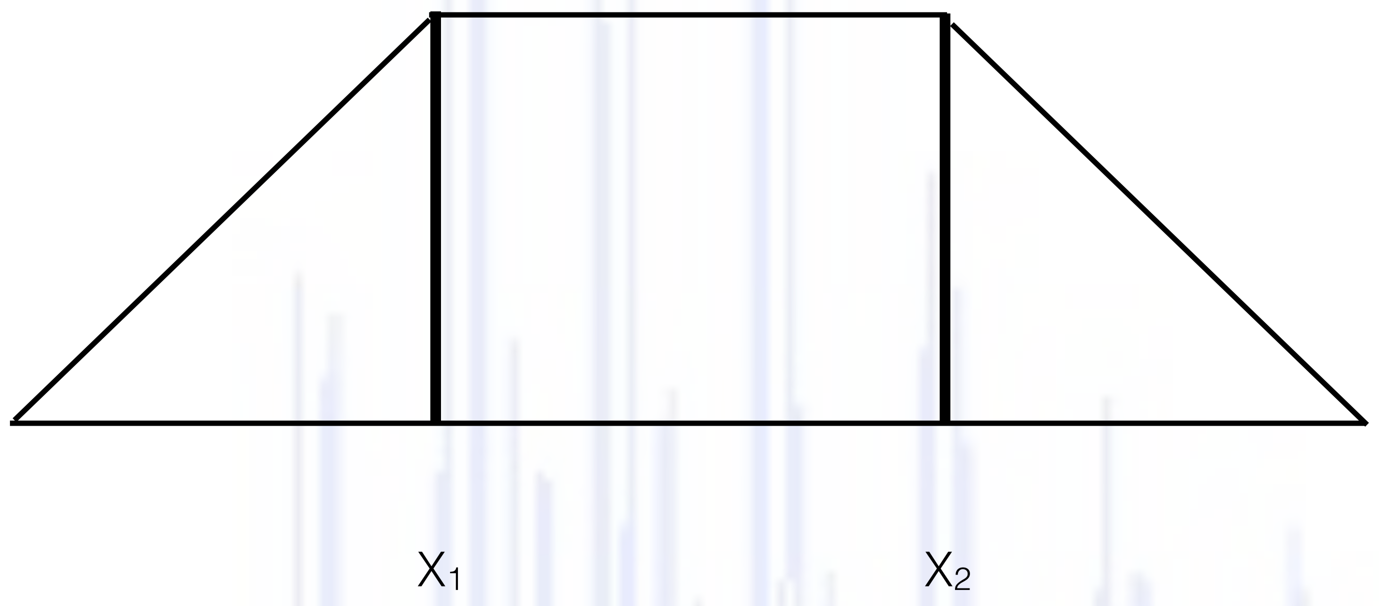
$$\beta_2 = \frac{X_2}{X_1} = (2-2.5) = -0.5$$

NB troviamo dei rapporti tra spostamenti, non valori assoluti!

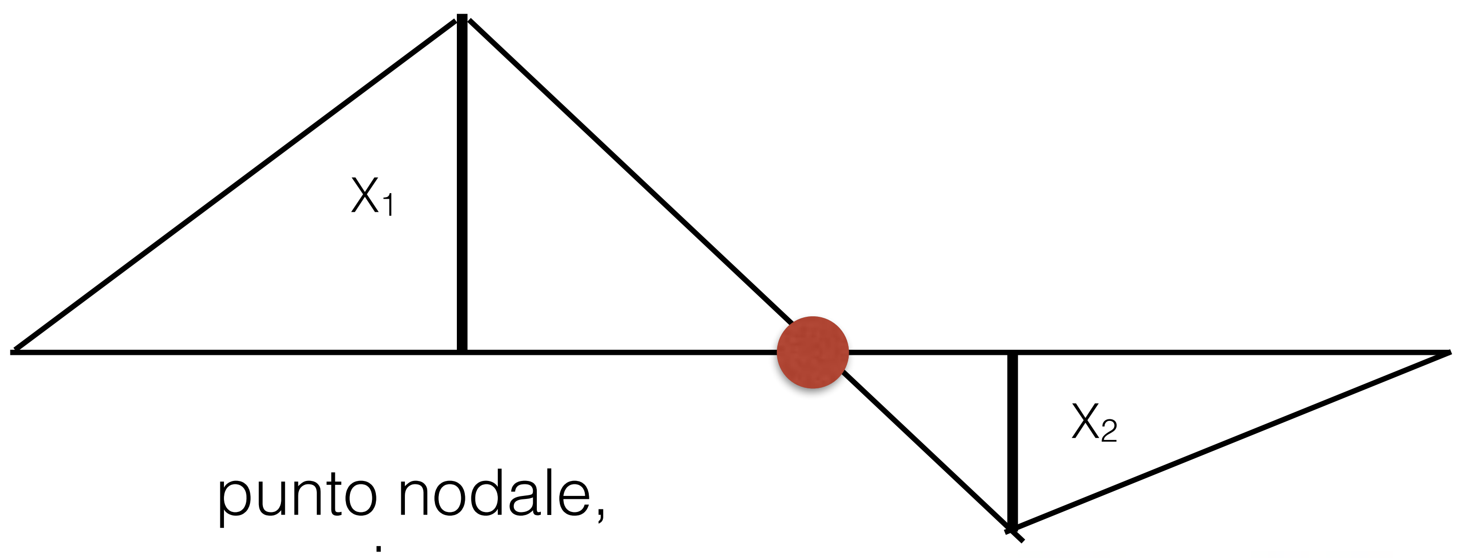
Perche?
>..?

Per valutare la deformata, si assegna un valore arbitrario a
X_1 e con il rapporto βi, si trova l'altro elemento dell'autovettore X_2

$$X_1 = 1 \quad X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_2 X_1 = -0.5 * 1 = -0.5$$



punto nodale,
non si muove…

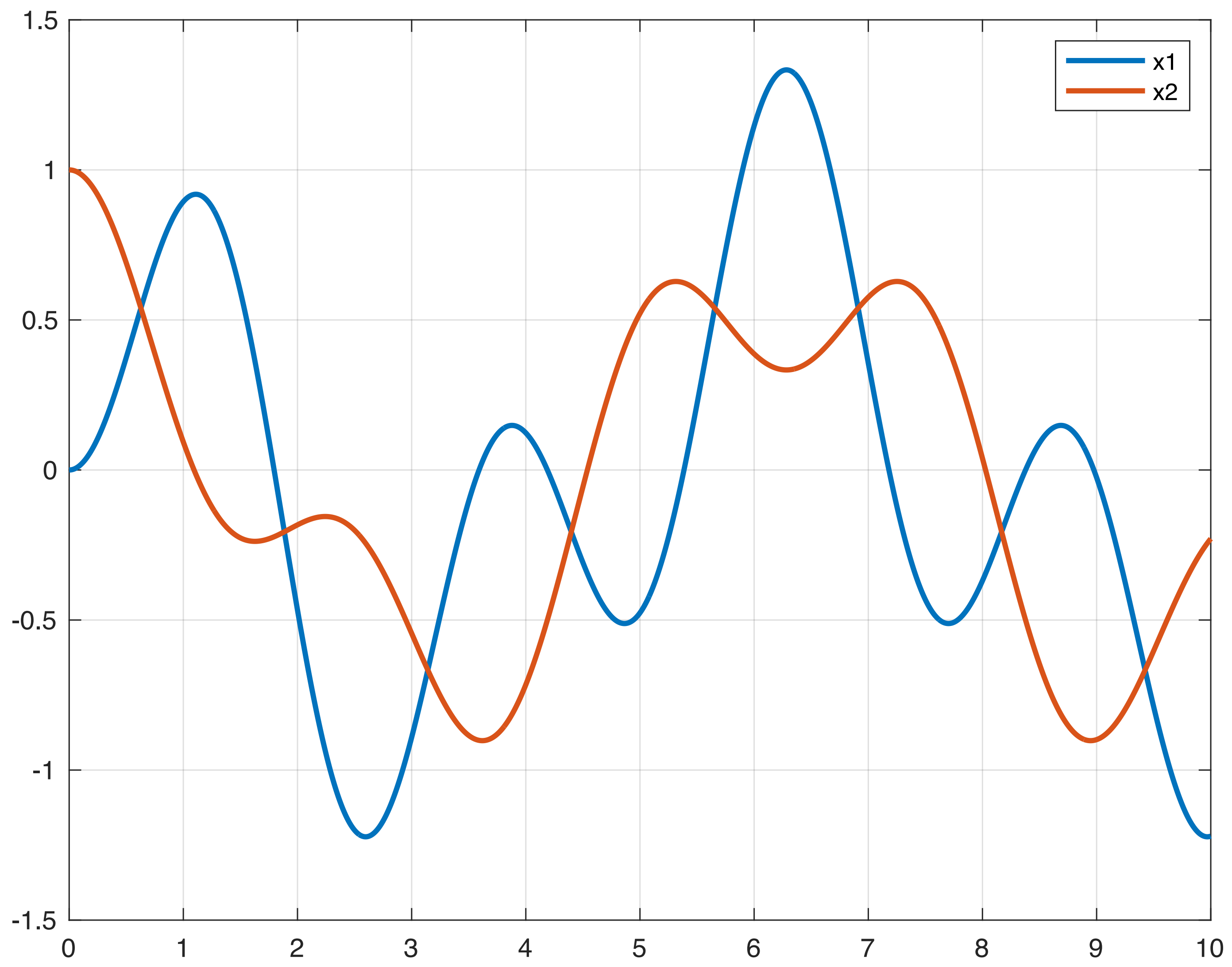
Gli autovettori sono definito a meno di una costante moltiplicativa
(ricordiamo che gli autovalori annullano il deteminante del sistema! > matrice sistema rango (n-1))

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} -1000 \\ -1000 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.34589 \\ 0.34589 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{271} \\ -\frac{3}{271} \end{Bmatrix}$$

Questi vettori rappresentano tutti la stessa deformata!!

..vedremo come scalarli

Come si calcola la risposta del sistema in coordinate fisiche?



Si possono sfruttare i coefficienti di scalaggio βᵢ appena trovati assieme alle condizioni iniziali del sistema descritto in coordinate fisiche

$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_2(0) = X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 cos(\omega_1 t) + B_1 sen(\omega_1 t) + A_2 cos(\omega_2 t) + B_2 sin(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 sen(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

soluzione generica

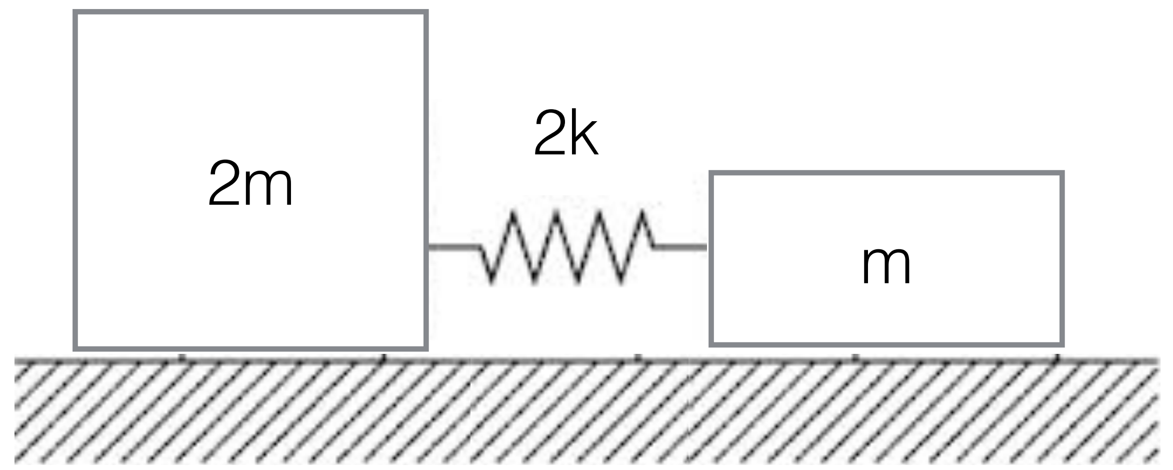
$$\begin{cases} x_1 = A_1 + A_2 = 0 \\ x_2 = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 = X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = B_1\omega_1 + B_2\omega_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \beta_1 B_1 \omega_1 + \beta_2 B_2 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{2}{3} \quad A_2 = -\frac{2}{3} \quad B_1 = 0 \quad B_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} cos(\omega_1 t) - \frac{2}{3} cos(\omega_2 t) \\ x_2 = \frac{2}{3} cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

..cambiando m,k cambieranno le ω_i,
cambiando le C.I. cambieranno i coefficienti A_i e B_i

Vediamo un altro esempio,
il sistema non è vincolato..
cosa ci si aspetta?
>..?



$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 2m & -2k \\ -2k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_i^2 m \left(2m\omega_i^2 - 6k\right) = 0$$

equazione caratteristica

$$\omega_i^2 = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

Una frequenza nulla..
cosa significa?
>..?

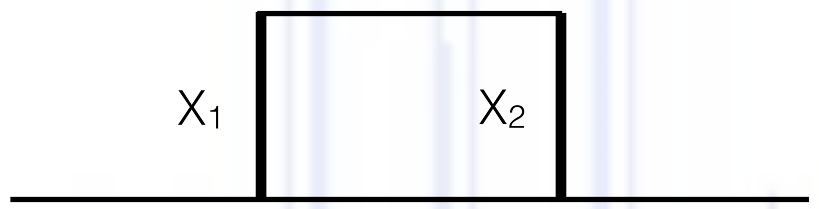
$$\left(2k - \omega_i^2 2m\right) X_1 - 2kX_2 = 0$$

dalla prima equazione, calcolo i rapporti βi

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - 2\omega_i^2 m}{2k} = 1 - \frac{\omega_i^2 m}{k} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

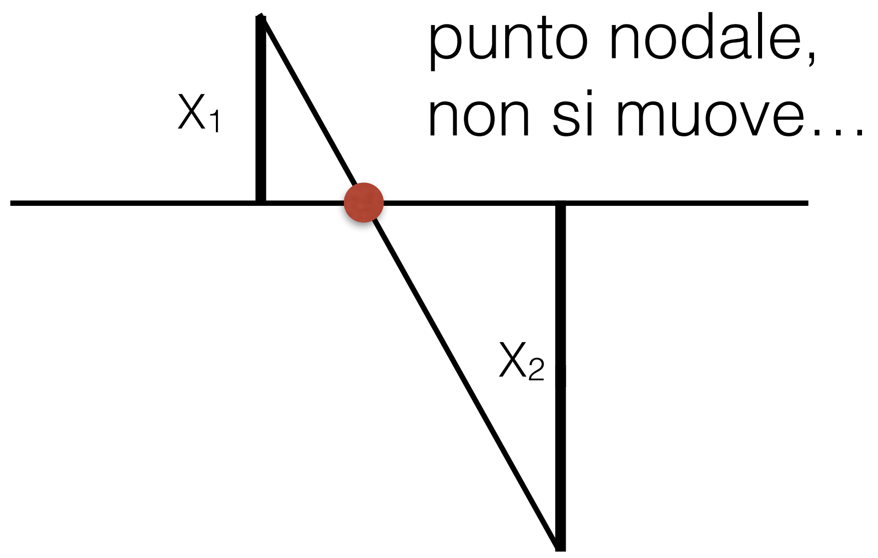
Con i rapporti βi trovo le forme modali..

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



Moto Rigido!

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_2 X_1 = -2 * 1 = -2$$



Con le forme modali trovo la matrice modale [Φ],
da utilizzare per disaccoppiare le equazioni:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

…il resto come già visto..

Cosa succede con la matrice di smorzamento [C]?

Se è proporzionale alle matrici di massa e rigidezza,

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

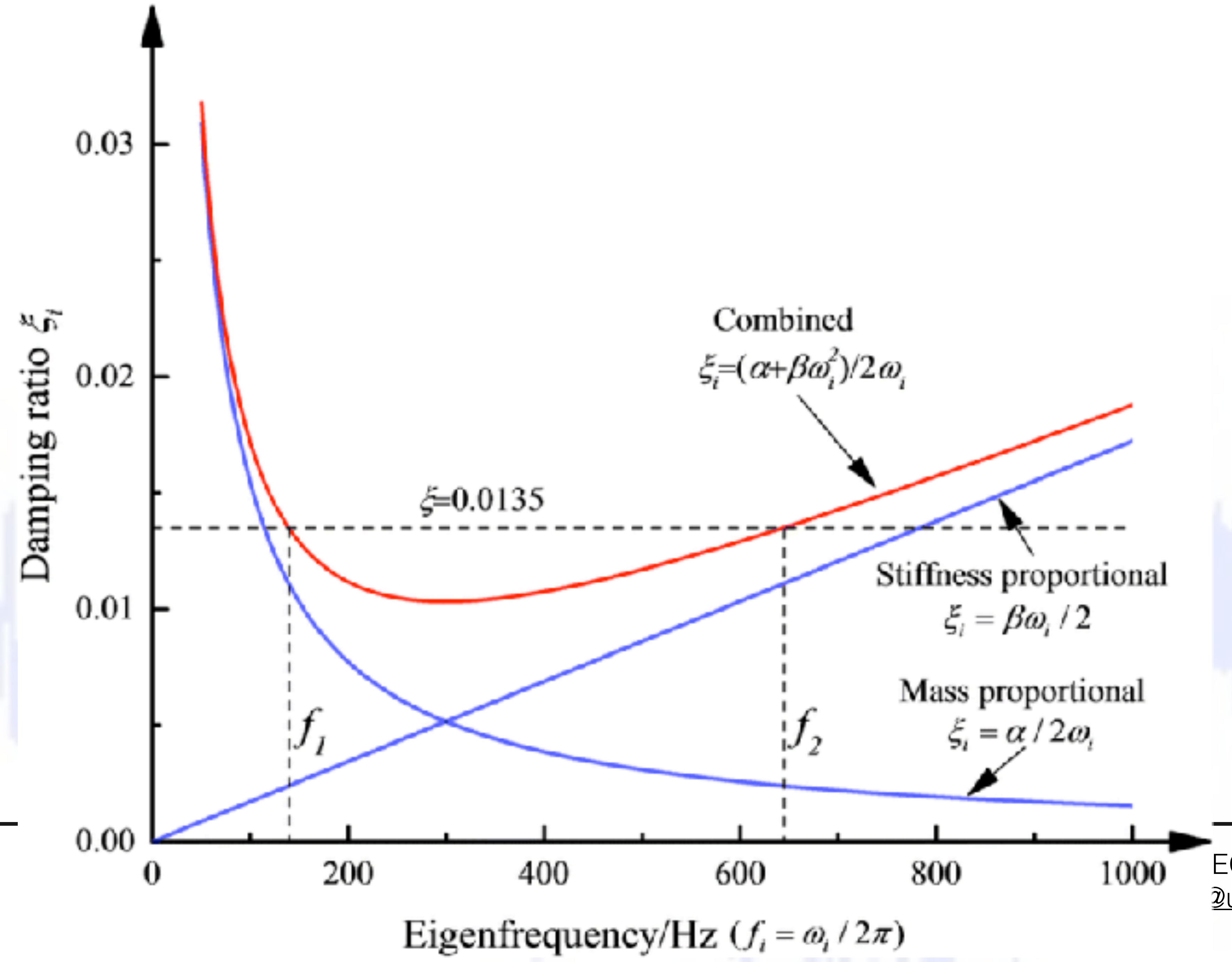
$$\left[[m]^{-1}[c]\right]^{s}\left[[m]^{-1}[k]\right]^{r} = \left[[m]^{-1}[k]\right]^{r}\left[[m]^{-1}[c]\right]^{s}$$ per ogni valore di r ed s

la trasformazione modale disaccoppia anche la matrice di smorzamento !

$$[\phi]^{T}[c][\phi] = \alpha[\phi]^{T}[m][\phi] + \beta[\phi]^{T}[k][\phi]$$

$$[\phi]^{T}[c][\phi] = \alpha[M] + \beta[K] = [C]$$

α e β sono comunemente usati nei codici FEM
per definire lo smorzamento del modello.
Agiscono differentemente in funzione della
frequenza! serve fare un po di prove
per trovare i valori coretti!



Se NON è proporzionale alle matrici di massa e rigidezza,
(es smorzamento concentrato) al trasformazione modale NON disaccoppia le equazioni!

Si usa la trasformazione di Duncan Collar (simile a quella Stato Spazio)

Alle equazioni del sistema si aggiunge un'identità dello stesso ordine :

$$\left[[m]p^2+[c]p+[k]\right]\{X(p)\}=\{P(p)\}$$

Si passa da un sistema di ordine N in p^2

$$\left[[m]p-[m]p\right]\{X(p)\}=0$$

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

a un sistema di ordine 2N in p

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad [B]=\begin{bmatrix} [m] & 0 \\ 0 & -[k] \end{bmatrix} \quad \{Y\}=\begin{Bmatrix} p\{X\} \\ X \end{Bmatrix} \quad \{F\}=\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix}$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Anche in questo caso cerchiamo la soluzione non banale (quella banale è Y=0..tutto fermo)

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

quindi cerchiamo i valori di p che annullano il determinante p[A]-[B] che ricordiamo essere di ordine 2N
> 2N autovalori e 2N autovettori

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & \lambda_1^* & 0 & .. \\ .. & .. & .. & 0 & \lambda_2^* & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & ... \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} \lambda_1\{\phi_1\} & \lambda_2\{\phi_2\} & .. & \lambda_1^*\{\phi_1^*\} & \lambda_2^*\{\phi_2^*\} & .. \\ \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & .. & \{\phi_1^*\} & \{\phi_2^*\} & .. \end{bmatrix}$$

la matrice [Φ] è disaccoppia le equazioni del sistema ! $\{Y\}=[\Phi]\{Q\}$

$$\left[p[A][\Phi]-[B][\Phi]\right]\{Q\}=\{F\}$$

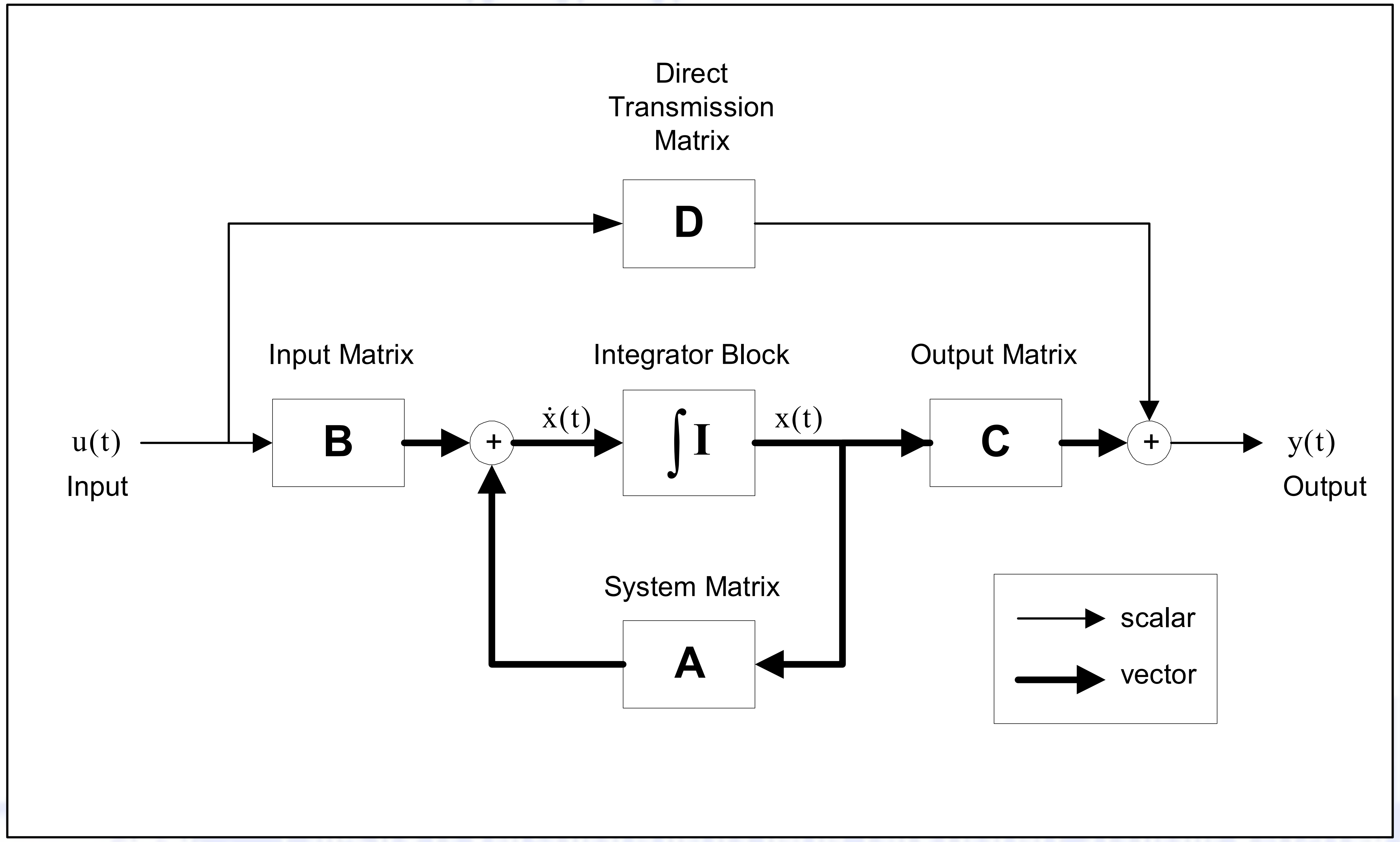
$$\left[p[\Phi]^T[A][\Phi]-[\Phi]^T[B][\Phi]\right]\{Q\}=[\Phi]^T\{F\}$$

$[a]=[\Phi]^T[A][\Phi]$ modal a, diagonale

$[b]=[\Phi]^T[B][\Phi]$ modal b, diagonale

Vediamo infine la rappresentazione stato-spazio.
Numericamente ci conviene lavorare con equazioni di ordine 1

Trasformiamo il sistema di N equazioni di grado 2
in un sistema di 2N equazioni di grado 1

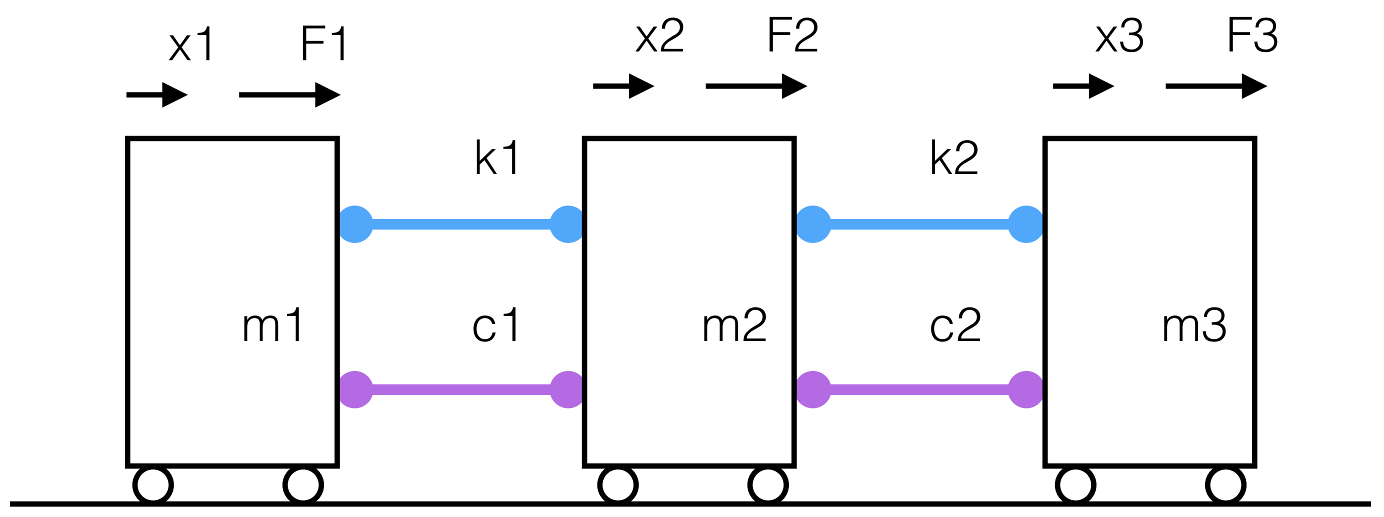


In questa rappresentazioni le matrici di sistema diventano 4 A, B, C, D ma ci permettono di descrivere più completamente il legame tra ingressi ed uscite del sistema

es. vogliamo la variabile di uscita y_1 che descrive la differenza di velocità tra x_2 e x_4 che non sono tra loro fisicamente collegati

NB rifacciamo qualcosa di simile a quanto fatto
per l'espansione di Ducan Collar
e per l'integrazione numerica delle equazioni del moto

Facciamo direttamente un esempio,
sistema 3dgl, smorzato, forzato :



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

equazioni del moto

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \left(f_1 - c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 - k_1x_1 + k_1x_2\right)/m_1 \\ \ddot{x}_2 = \left(f_2 + c_1\dot{x}_1 - (c_1+c_2)\dot{x}_2 + k_1x_1 - (k_1+k_2)x_2 + k_2x_3\right)/m_2 \\ \ddot{x}_3 = \left(f_3 + c_2\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_3 + k_2x_2 - k_2x_3\right)/m_3 \end{cases}$$

estrazione della derivata di ordine massimo

definizione
nuove variabili:
(vettore degli stati)

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = x_1 \\ \mathrm{x}_2 = \dot{x}_1 \\ \mathrm{x}_3 = x_2 \\ \mathrm{x}_4 = \dot{x}_2 \\ \mathrm{x}_5 = x_3 \\ \mathrm{x}_6 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

riscrittura
equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_2 \\ \dot{\mathrm{x}}_2 = \left(f_1 - c_1\mathrm{x}_2 + c_1\mathrm{x}_4 - k_1\mathrm{x}_1 + k_1\mathrm{x}_3\right)/m_1 \\ \dot{\mathrm{x}}_3 = \mathrm{x}_4 \\ \dot{\mathrm{x}}_4 = \left(f_2 + c_1\mathrm{x}_2 - (c_1+c_2)\mathrm{x}_4 + k_1\mathrm{x}_1 - (k_1+k_2)\mathrm{x}_3 + k_2\mathrm{x}_5\right)/m_2 \\ \dot{\mathrm{x}}_5 = \mathrm{x}_6 \\ \dot{\mathrm{x}}_6 = \left(f_3 + c_2\mathrm{x}_4 - c_2\mathrm{x}_6 + k_2\mathrm{x}_3 - k_2\mathrm{x}_5\right)/m_3 \end{cases}$$

riordinando:

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -k_1/m_1 & -c_1/m_1 & k_1/m_1 & c_1/m_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ k_1/m_2 & c_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & -(c_1+c_2)/m_2 & k_2/m_2 & c_2/m_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & k_2/m_3 & c_2/m_3 & -k_2/m_3 & -c_2/m_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f_1/m_1\\ 0\\ f_2/m_2\\ 0\\ f_3/m_3\end{bmatrix}\{1\}$$

la struttura generale è: $\{\dot{x}\}=[A]\{x\}+[B]\{u\}$

La matrice di sistema è la [A], di dimensione 2Nx2N,
gli autovolori di questa matrice sono le frequenze naturali del sistema,
gli autovettori, le deformate modali

$$\left(\lambda_i[I]-[A]\right)x_{m,i}=0$$

Da una rappresentazione si può passare ad un altra!..
Ad esempio dalla rappresentazione stato-spazio si può passare a quella delle risposte in frequenza:

$$\{\dot{x}\}=[A]\{x\}+[B]\{u\}$$
$$\{y\}=[C]\{x\}+[D]\{u\}$$

trascurando le C.I., con la trasformata di Laplace della prima equazioni:

$$s[I]\{X\}=[A]\{X\}+[B]\{U\}$$

$$\left(s[I]-[A]\right)\{X\}=[B]\{U\}$$

$$\{X\}=\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]\{U\}$$

$$\{Y\}=[C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]\{U\}+[D]\{U\}$$

$$\frac{\{Y\}}{\{U\}}=[C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]$$

Quali sono le dimensioni di queste matrici e vettori?
>..?