

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 3.0
casi particolari ed estensioni

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Alcune particolarità con sistemi ad 1gdl e 2gdl

Decremento logaritmico

Smorzamento coloumbiano ed equivalente

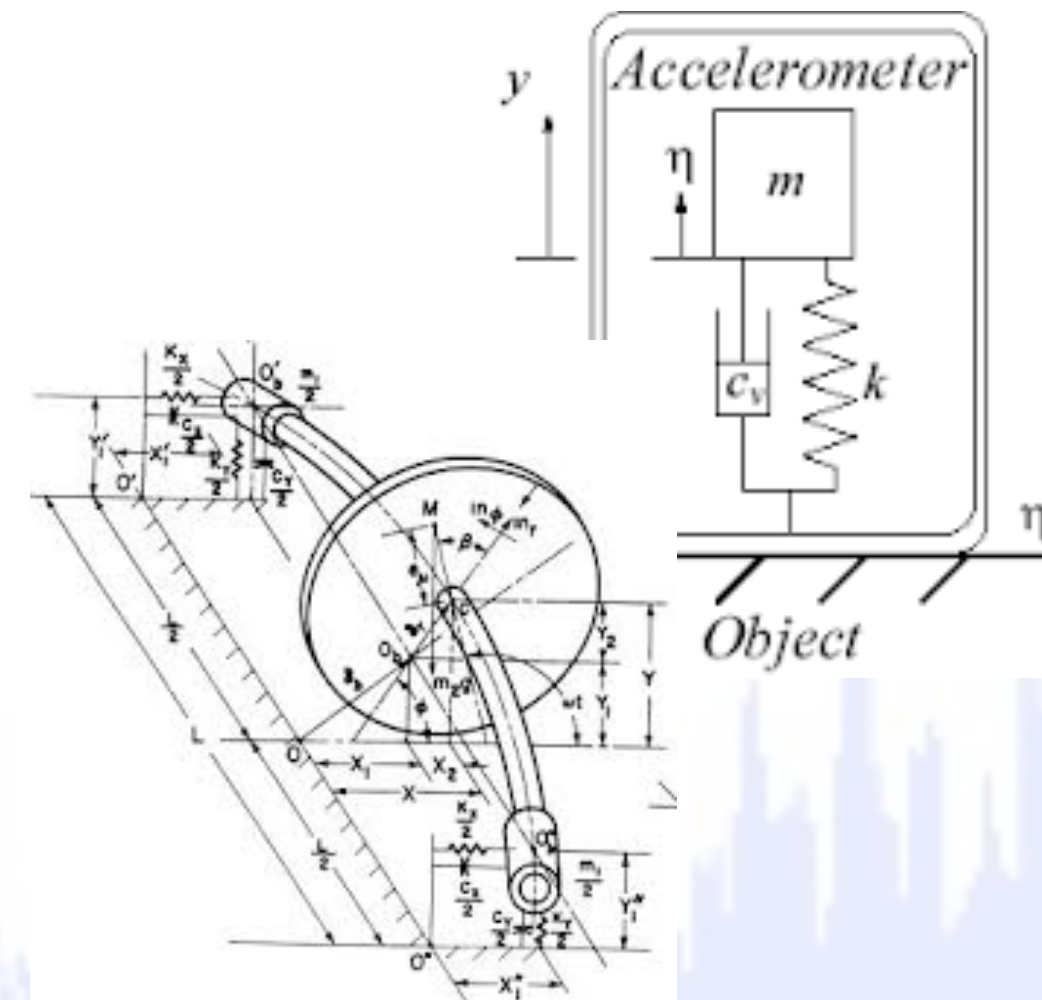
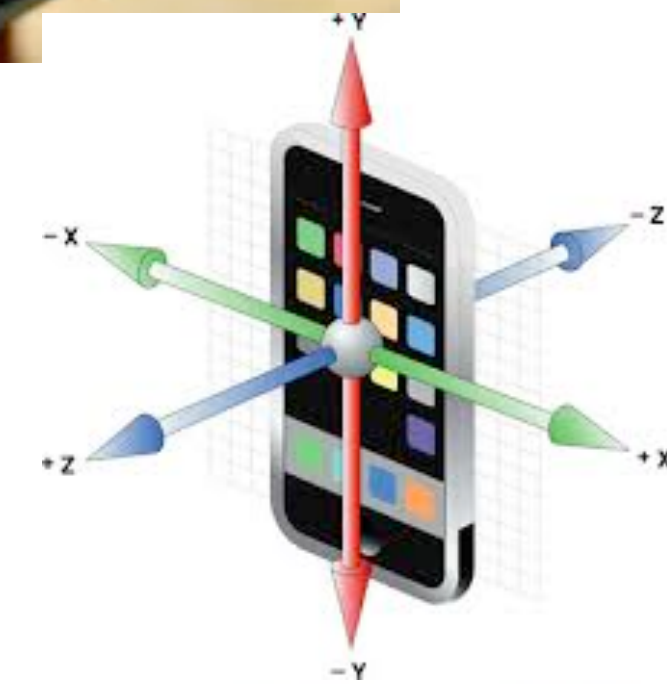
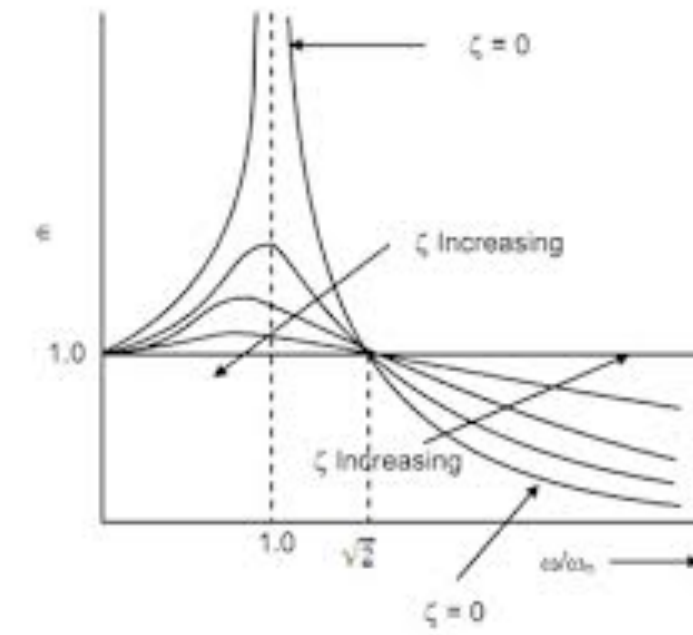
Eccitazione dalla base

Misuratori di vibrazioni

Eccitazione generica

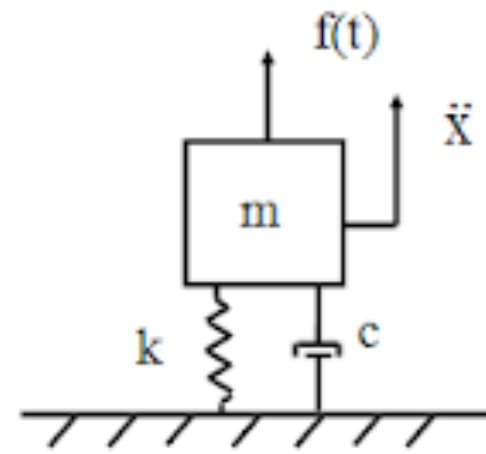
Rotore di Jeffcot / autocentratura

Tranquillizzatori dinamici 2gdl



Decremento logaritmico

Per valutare sperimentalmente lo smorzamento di un sistema è utile/facile utilizzare il decremento logaritmico. Misura di quanto si riduce l'ampiezza di vibrazione di un sistema in un certo numero di periodi.

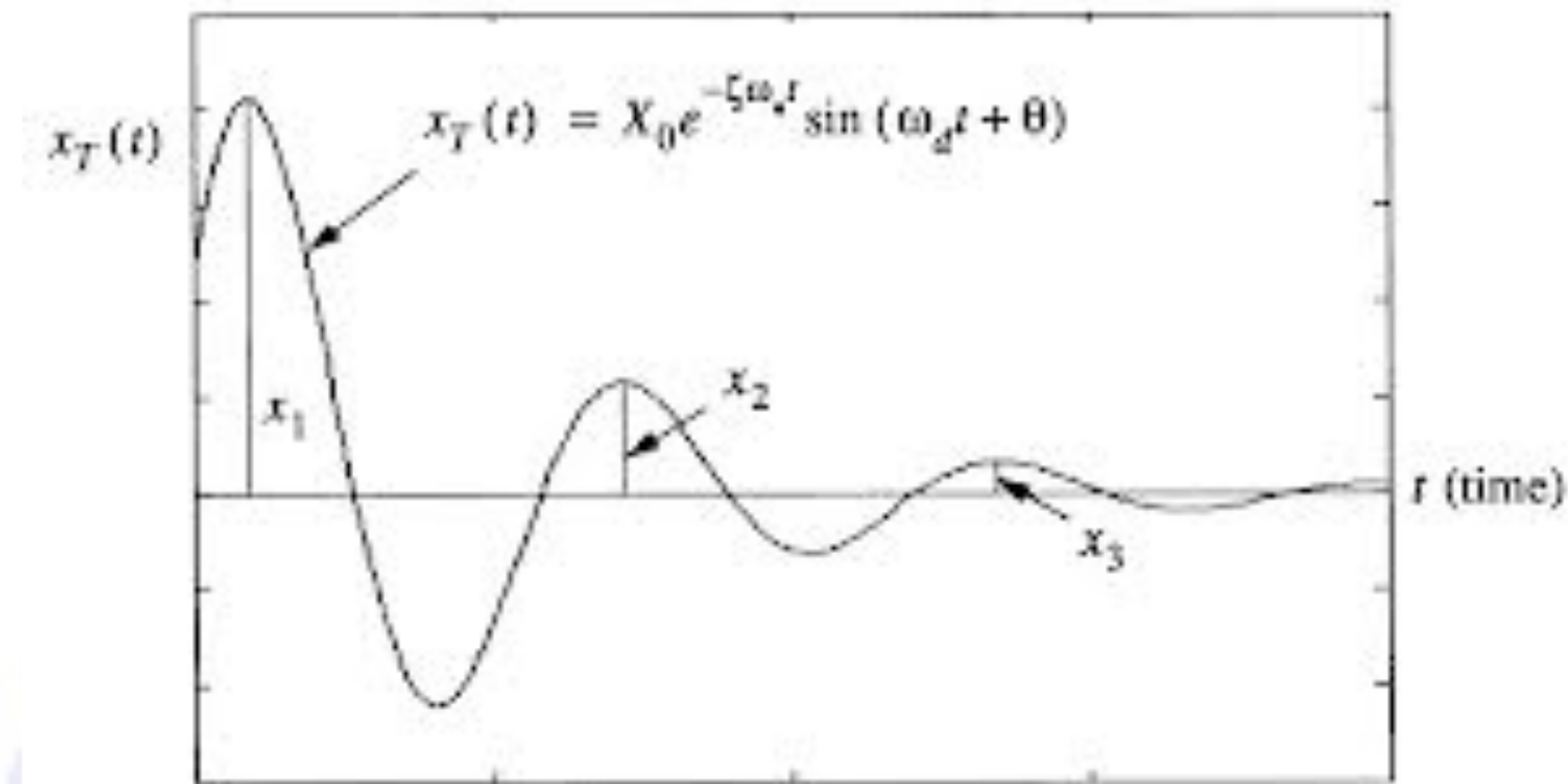


Supponiamo di avere un sistema 1gdl massa, smorzamento, elasticità e forzante
Ne conosciamo l'equazione del moto e l'andamento nel tempo dello spostamento della massa m

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

Dalla traccia temporale misuriamo l'ampiezza di due istanti x_1 e x_2 separati da un periodo T_d



$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 + \theta)}{X_0 e^{-\zeta\omega_n (t_1 + T_d)} \cos(\omega_d (t_1 + T_d) + \theta)}$$

eliminando la parte armonica

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1}}{X_0 e^{-\zeta\omega_n (t_1 + T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

Definiamo il decremento logaritmico il logaritmo del rapporto cosi trovato:

$$\delta = \ln \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \zeta \omega_n T_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{curva blu}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

se ζ è molto piccolo ($\ll 1$) si utilizza una formula semplificata:

$$\delta \simeq 2\pi\zeta \quad \text{curva rossa}$$

se invece di 1 periodo ne prendo m la formula diventa:

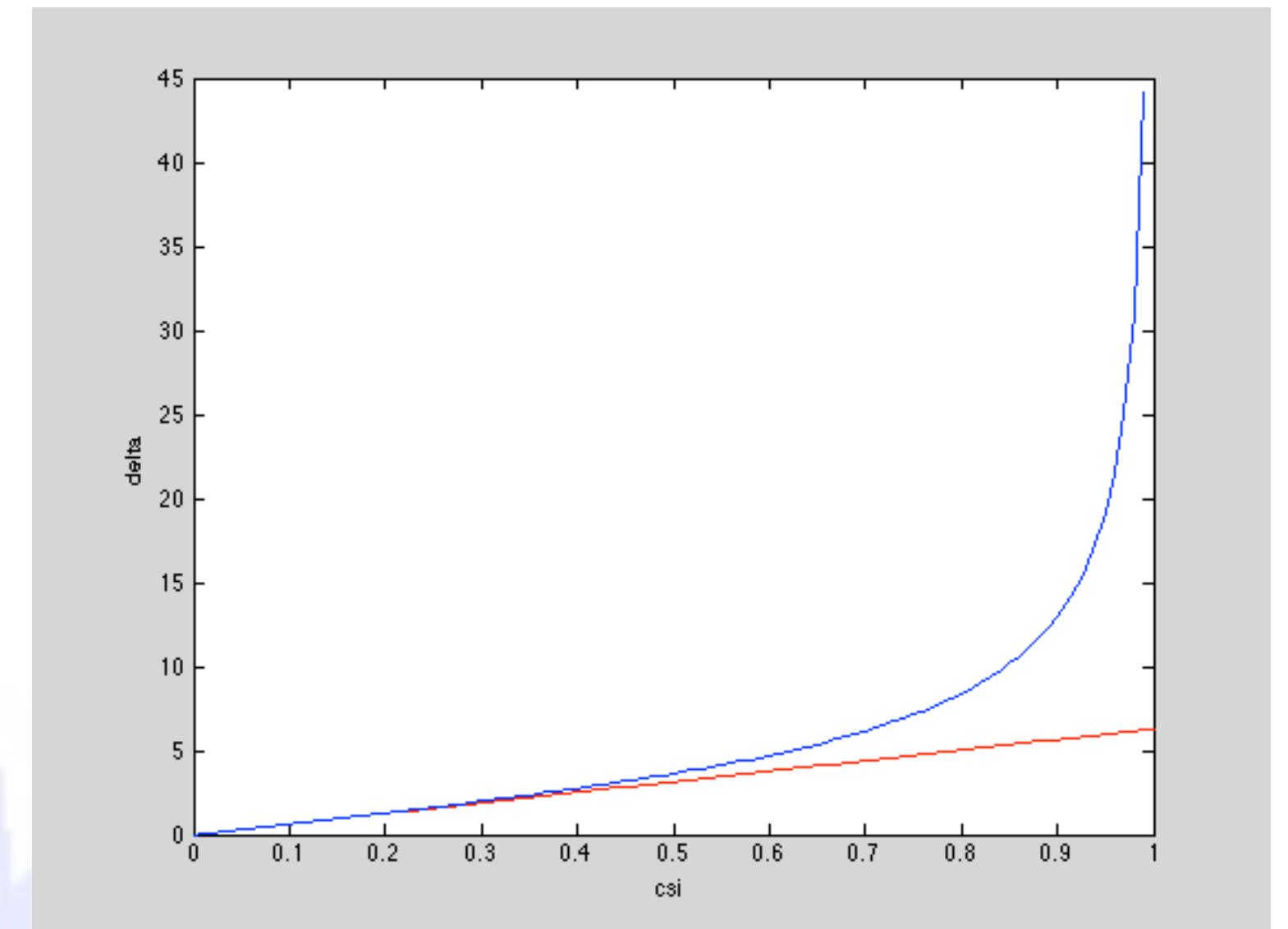
$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{x_1(t)}{x_{m+1}(t)}$$

cosa succede se ci sono più modi?

> ..?

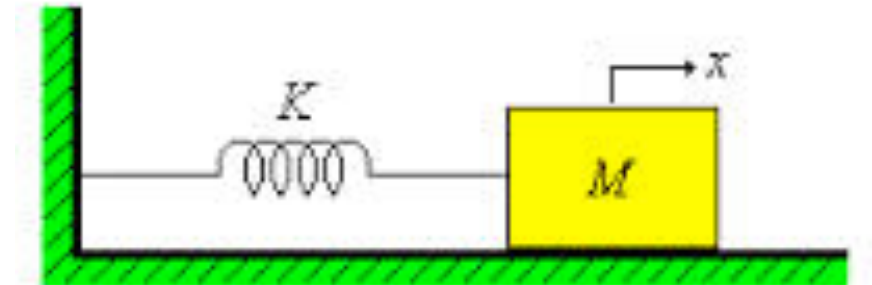
ζ resta costante ?

> ..?



Smorzamento Coulombiano

Quanto ci sono meccanismi dissipativi dovuti all'attrito si parla di smorzamento coulombiano
La forza d'attrito si oppone al movimento,
sarà in direzione opposta alla velocità... cambia direzione ogni semiperiodo!



$$m\ddot{x} + kx - \mu Mg = 0 \quad \text{massa avanza}$$

$$m\ddot{x} + kx + \mu Mg = 0 \quad \text{massa ritorna}$$

Alla fine di ogni semiperiodo, bisogna cambiare l'equazione..
e le condizioni iniziali per il semiperiodo successivo!

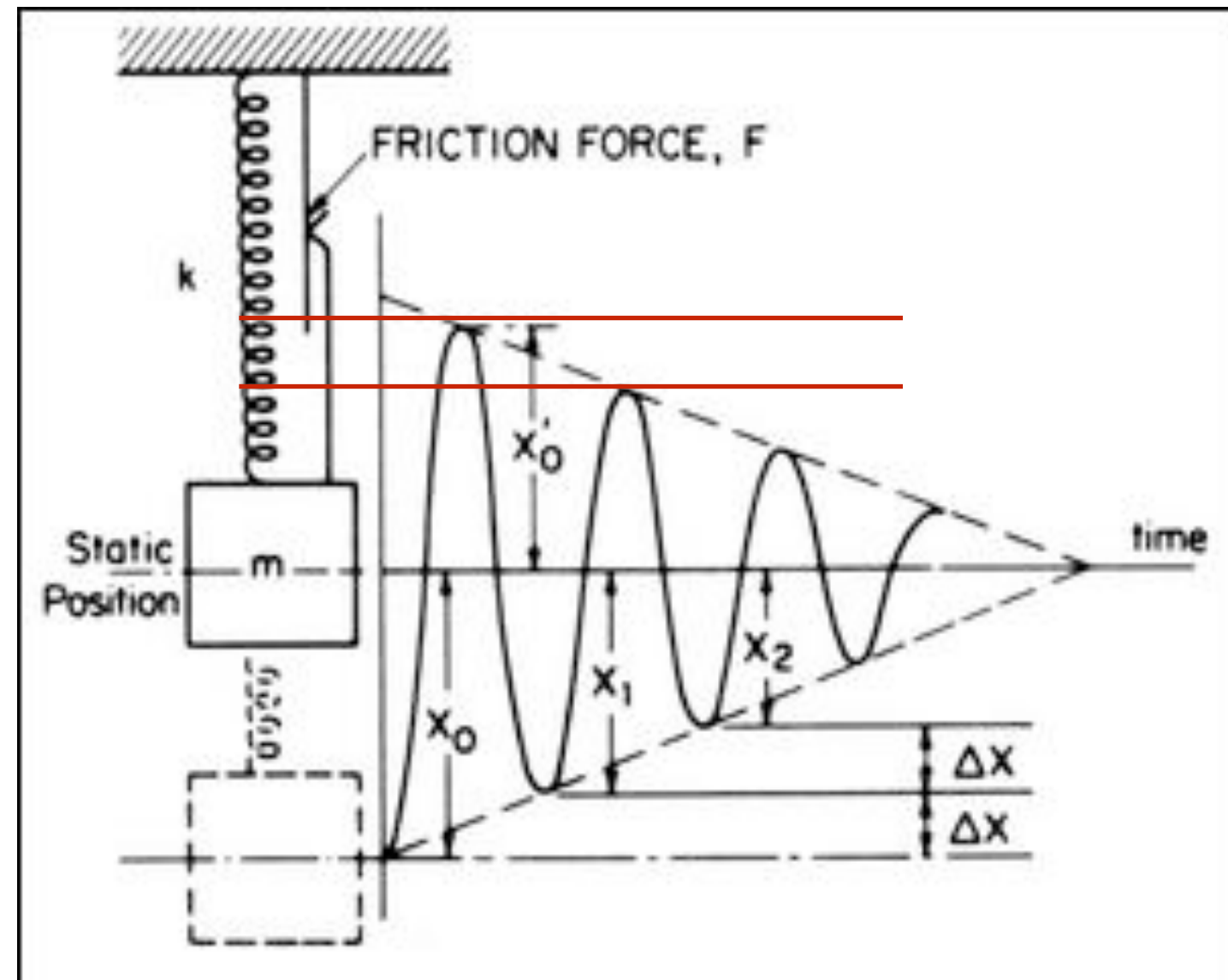
$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) - \frac{\mu Mg}{k}$$

$$x(t) = A_3 \cos(\omega_n t) + A_4 \sin(\omega_n t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

Si definisce il ciclo limite quello in cui la
forza di richiamo elastico eguaglia la forza d'attrito

$$x_l = \frac{\mu Mg}{k} = \frac{\mu g}{\omega_n^2}$$

..se alla fine del semiperiodo, lo spostamento della massa è all'interno del ciclo limite, la massa non si sposterà più.. (forza attrito > forza elastica)



Partendo da $x(0)=X_0$, e $\dot{x}(0)=0$, con la seconda equazione si ottiene per il primo semiperiodo

$$A_3 = X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \quad A_4 = 0$$

$$x(t) = \left(X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

$$X\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = - \left(X_0 - \frac{2\mu Mg}{k} \right)$$

con le nuove condizioni e con la prima equazione si ottiene per il secondo semiperiodo

$$A_1 = X_0 - \frac{3\mu Mg}{k} \quad A_2 = 0$$

$$x(t) = \left(X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

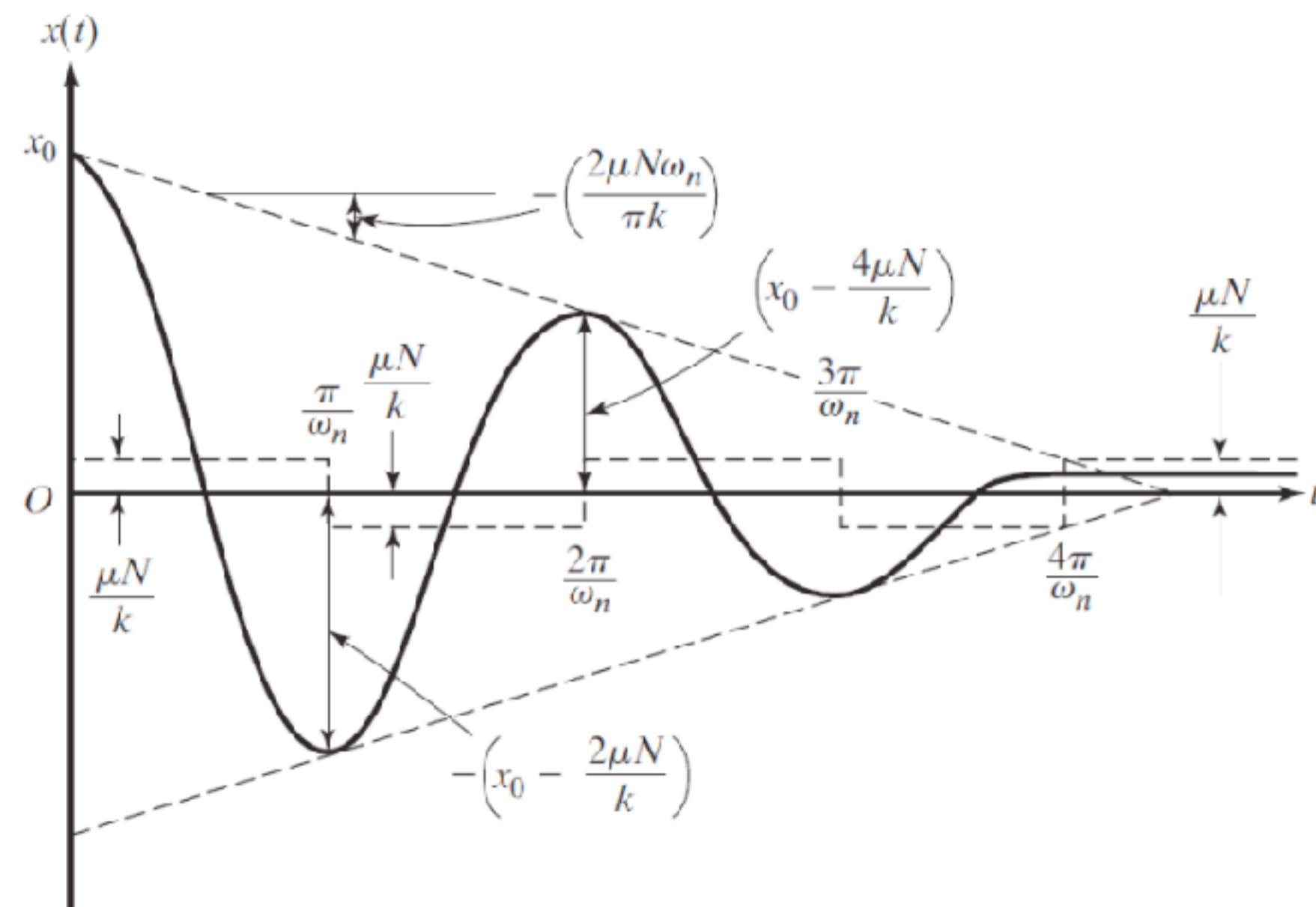
$$X\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = \left(X_0 - \frac{4\mu Mg}{k} \right)$$

In un ciclo completo quindi si perde sempre la stessa quantità di "spostamento"

$$X_{m+1} = X_m - \frac{4\mu Mg}{k}$$

La frequenza del sistema smorzato, non cambia in presenza di attrito!
(non come nel caso dello smorzamento viscoso)

Non è detto che dopo un tempo infinito la posizione della massa
si fermi in posizione di equilibrio elastico ($x(\infty)$ può esser diverso da 0)
(non come nel caso dello smorzamento viscoso)



```

t = i * (pi/omega_n)
for i = 1, 3, 5, 7,...
x_a(t)
for i = 2, 4, 6, 8,...
x_b(t)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#constants
k = 2      #(N/m), spring coef
m = 0.04  #(kg), mass
x0 = -0.1  #(m), preload
mi = 0.3  #(), dry dynamic friction coef. ABS-ABS
N = 0.3   #(N), normal contact force

f_tr = mi * N / k #friction force/pring coef - equivalent distance
omega_0 = np.sqrt(k/m)

#time
t = np.linspace(0,5,100)

#undamped model
x_undamp = x0*np.cos(omega_0*t)
dx_undamp = -omega_0*x0*np.sin(omega_0*t)

#damped model
x_damp = (x0+f_tr)*np.cos(omega_0*t)-f_tr
dx_damp = -omega_0*(x0+f_tr)*np.sin(omega_0*t)

#time to x=0
t0 = np.arccos(f_tr/(x0+f_tr))/omega_0
print t0

#plotting
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
fig.suptitle('position on left, velocity on right')
ax1.plot(t, x_undamp, 'r', label='x_undamp')
ax1.plot(t, x_damp, 'b', label='x_damp')
ax2.plot(t, dx_undamp, 'r', label='dx_undamp')
ax2.plot(t, dx_damp, 'b', label='dx_damp')

#grids, titles, legends, axis labels
ax1.grid()
ax2.grid()
ax1.set_title('Position vs time')
ax2.set_title('Velocity vs time')
ax1.legend()
ax2.legend()
ax1.set_xlabel('t(s)')
ax1.set_ylabel('x(m)')
ax2.set_xlabel('t(s)')
ax2.set_ylabel('dx(m/s)')

plt.show()

```

Provate a costruire
un modello in Matlab
Simulink, Octave
Python..

Smorzamento equivalente

Solitamente ci sono più meccanismi dissipativi che agiscono contemporaneamente
Lo smorzamento equivalente permette di trovare uno smorzatore viscoso (equazione del moto più semplice) che dissipa in un ciclo, la stessa quantità di energia degli altri!



$$\frac{dW}{dt} = Force * Speed = -c\dot{x}\dot{x} = -c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

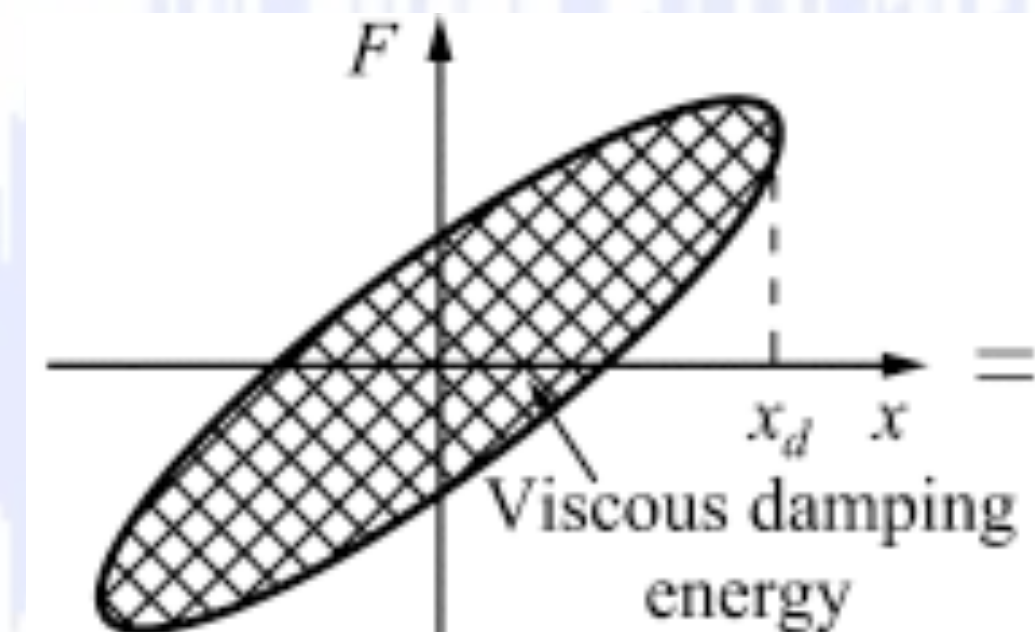
supponiamo lo spostamento sia armonico

$$x = X \cos(\omega t)$$

$$\Delta W = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_d}} c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = - \int_0^{2\pi} cX^2\omega_d^2 \sin^2(\omega_d t) d(\omega_d t) = - \pi cX^2\omega_d$$

da questa relazione
si può derivare il valore di c_{eq} :

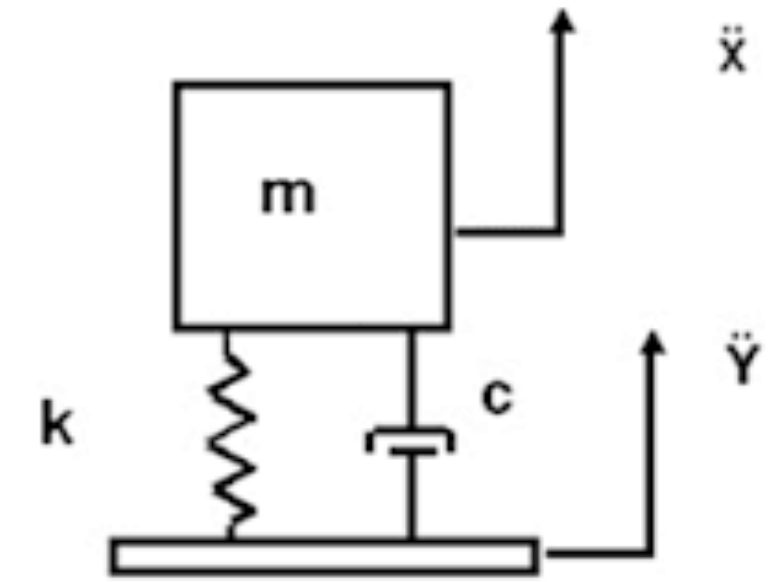
$$c_{eq} = - \frac{\Delta W}{\pi X^2 \omega_d}$$



Eccitazione dalla base

Consideriamo un sistema 1gdl in cui sia la base a fornire l'eccitazione con un movimento armonico $y=Y\sin\Omega t$

Vediamo come cambia la risposta dalla massa in funzione dell'eccitazione e delle caratteristiche del sistema. L'equazione del moto sarà:



$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

La risposta del sistema sarà alla stessa frequenza della forzante (qui sostituita con la sua derivata)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\Omega Y \cos\Omega t + kY \sin\Omega t$$

La soluzione particolare sarà:
(ovviamnte complessa)

$$x_p = \frac{kY \sin(\Omega t - \theta)}{[(k - m\Omega^2)^2 - (c\Omega)^2]^{1/2}} + \frac{c\Omega Y \cos(\Omega t - \theta)}{[(k - m\Omega^2)^2 - (c\Omega)^2]^{1/2}}$$

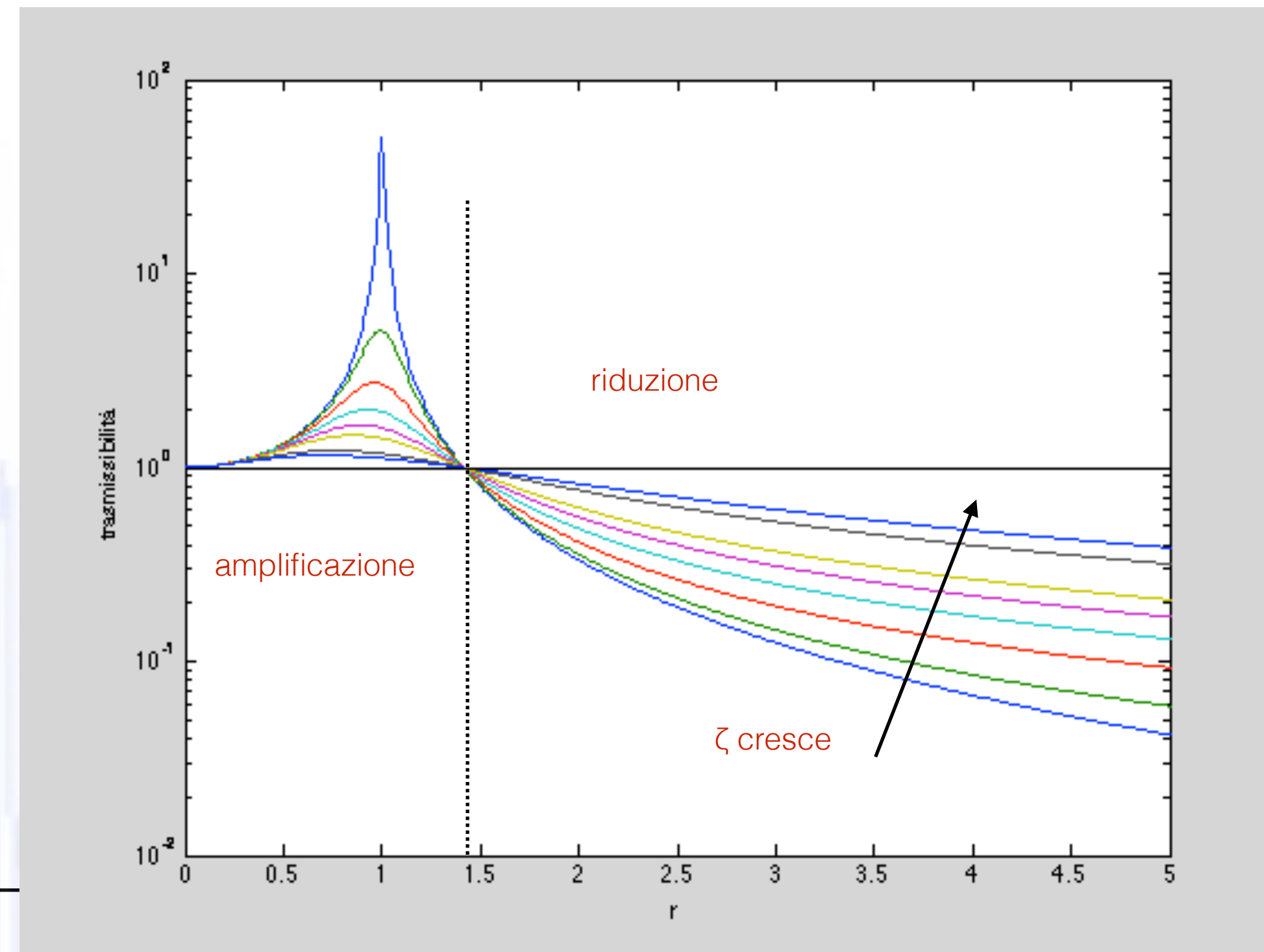
Siamo interessati nel modulo della funzione di trasferimento (X/Y) (quanto si sposta la massa al variare dell'eccitazione)

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{k^2 + (c\Omega)^2}{(k - m\Omega^2)^2 - (c\Omega)^2} \right]^{1/2}$$

Con le solite sostituzioni otteniamo la formula della Trasmissibilità (quanto si amplifica lo spostamento)

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 - (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad r = \frac{\Omega}{\omega}$$

```
r=0:0.01:5;
csi=[0.01 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.8 1];
for i=1:size(csi,2)
tr(i,:)=sqrt((1+(2*csi(i)*r).^2)./((1-r.^2).^2+(2*csi(i)*r).^2));
end
semilogy(r,tr)
hold
un=ones(size(r,2));
semilogy(r,un,'k')
xlabel('r')
ylabel('trasmissibilità')
```



Attenzione all'effetto dello smorzamento!!

Siamo interessati anche a quanta forza scarica
la massa sulla fondazione (attraverso la molla e lo smorzatore)

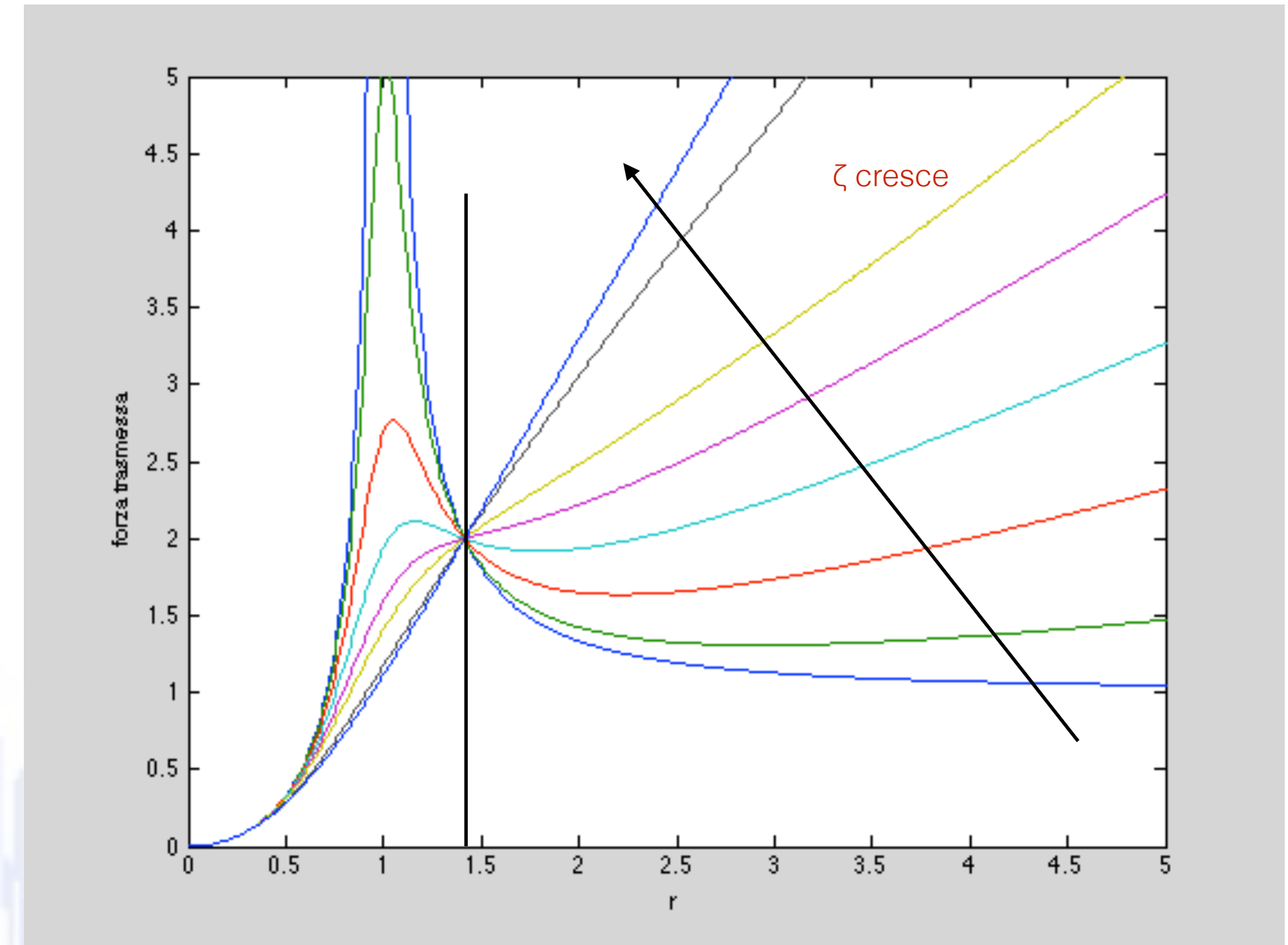
$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$F = -m\ddot{x} = c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y)$$

Certiamo il coefficiente di amplificazione tra la forza dinamica
ed il cedimento statico kY

$$\frac{F}{kY} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$$

Attenzione
all'effetto dello
smorzamento!!



Siamo interessati allo spostamento relativo tra la massa e la fondazione ($z=x-y$ da cui $x=z+y$)

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

Supponendo lo spostamento $y=Y\sin\Omega t$

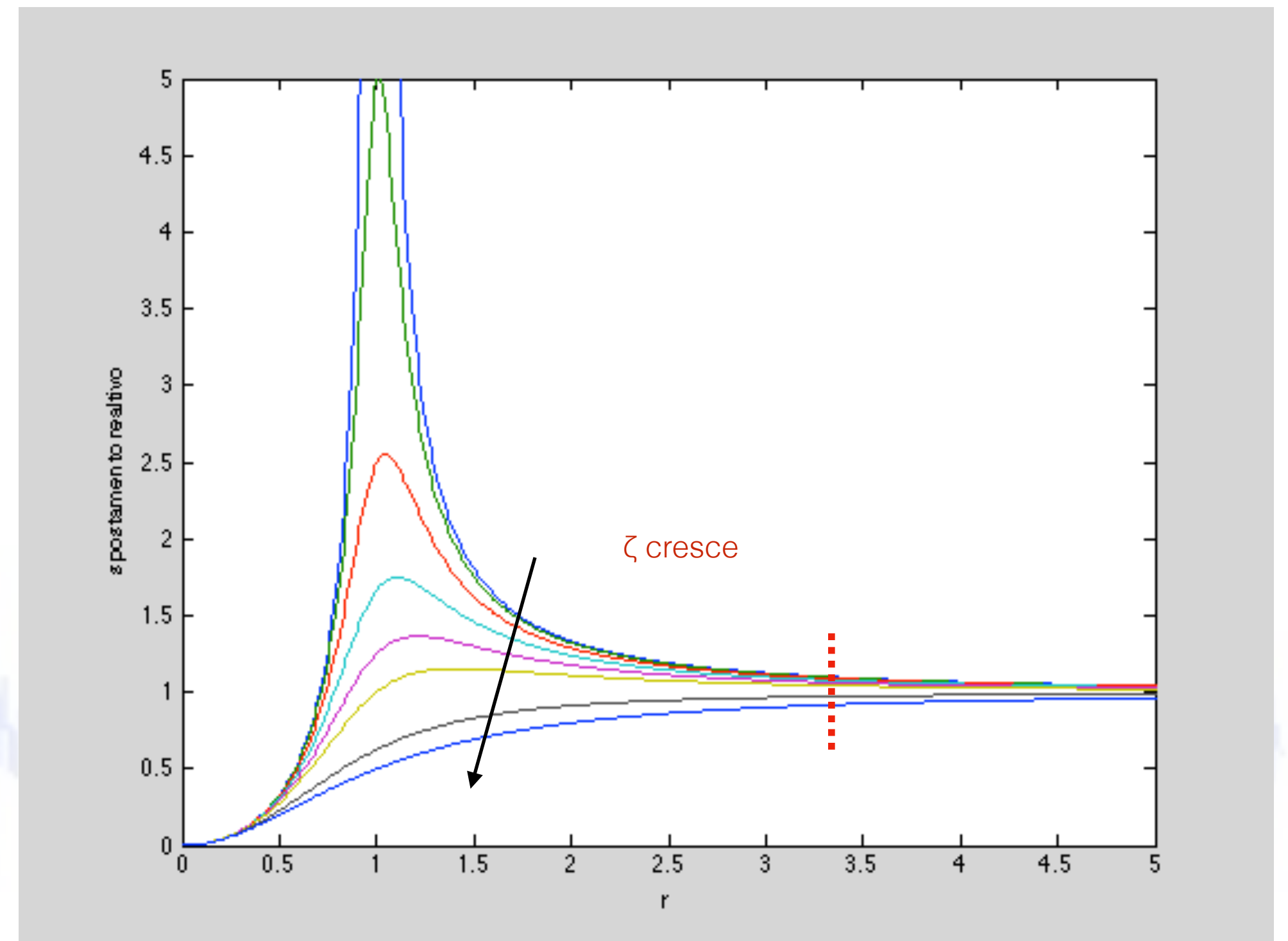
$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\Omega^2 Y \sin\Omega t$$

da cui deriviamo la funzione di trasferimento tra lo spostamento relativo Z e lo spostamento della base Y

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

per valori di $r > 3$ il rapporto è prossimo a 1
 $Z=Y$... un segnale proporzionale a Z è circa uguale allo spostamento della base... sensore di spostamento!

ω dovrà esser piccolo !! come?



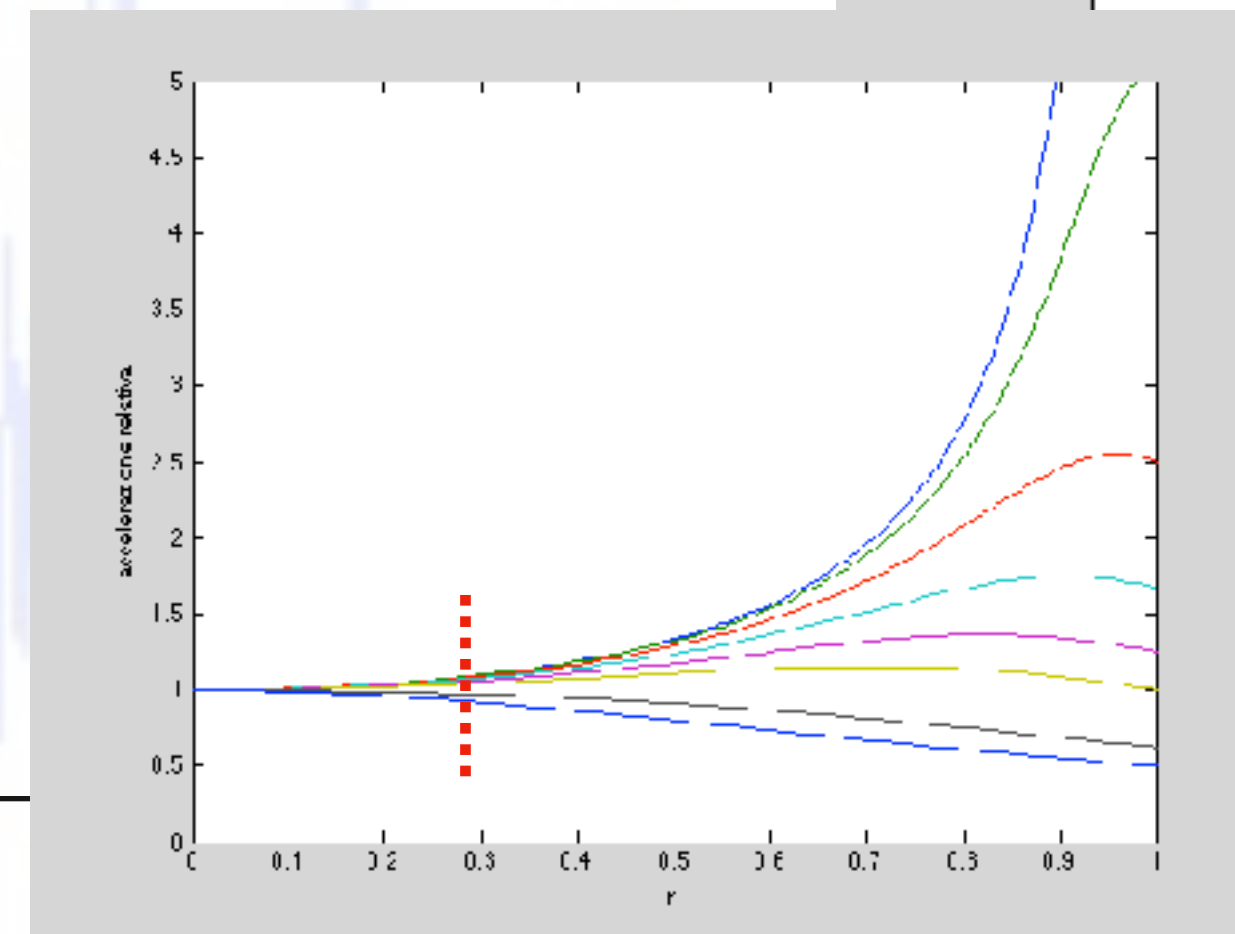
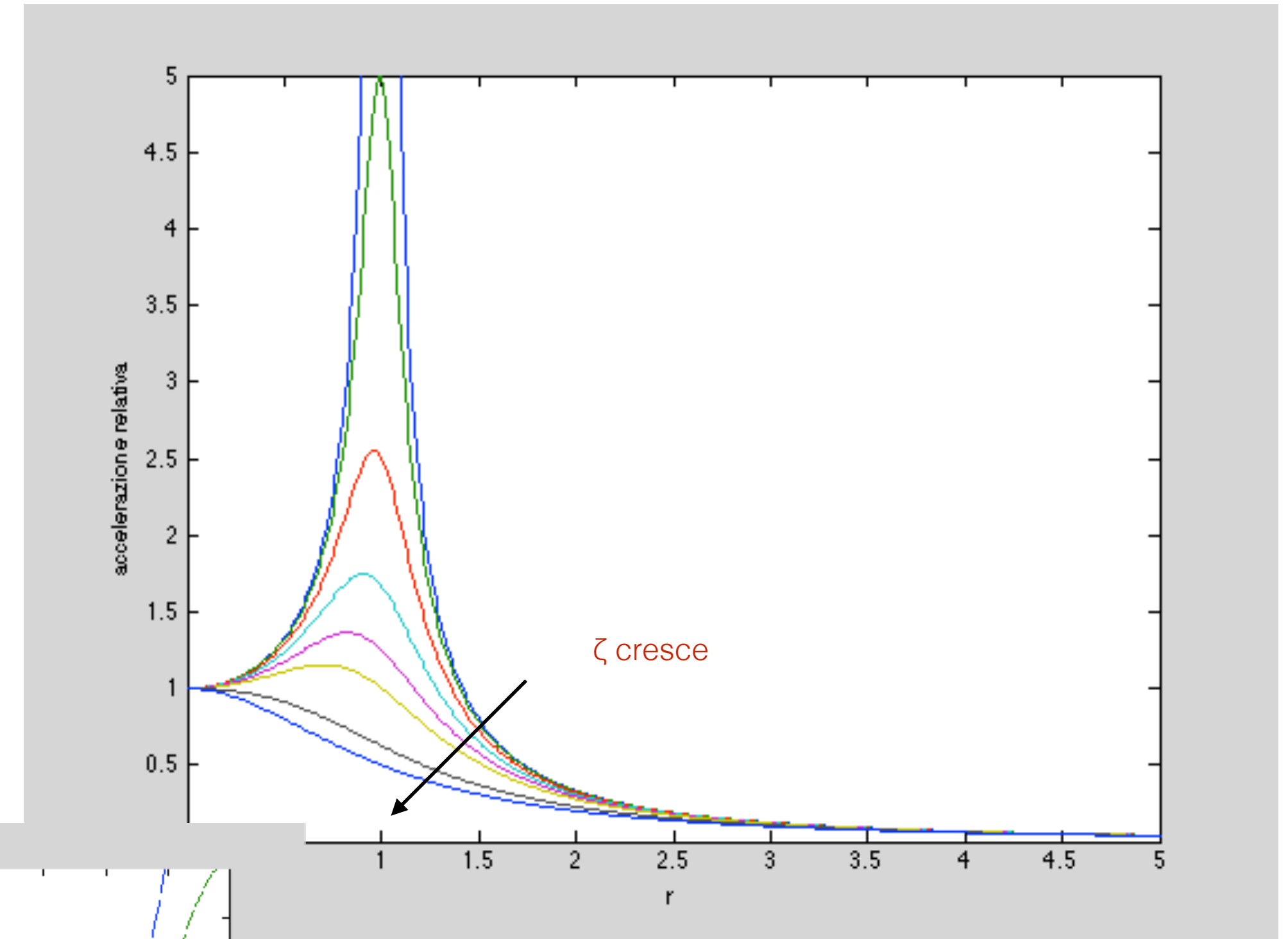
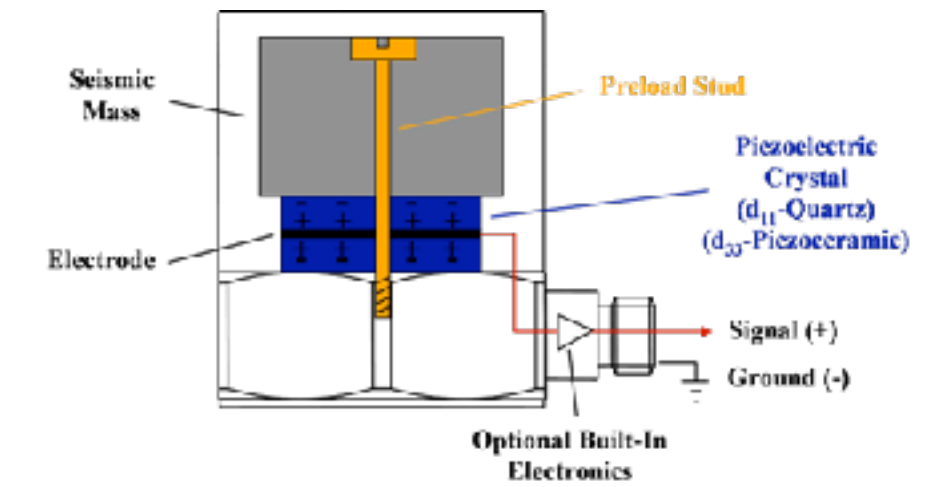
Volessimo misurare l'accelerazione.. sostituiamo quanto al numeratore..

$$\frac{Z}{Y} = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 - (2\zeta r)^2}}$$

$$\frac{\omega^2 Z}{\Omega^2 Y} = \frac{\ddot{z}}{\ddot{y}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 - (2\zeta r)^2}}$$

Il rapporto Z/Y è unitario per valori molto piccoli di r (r < .3)

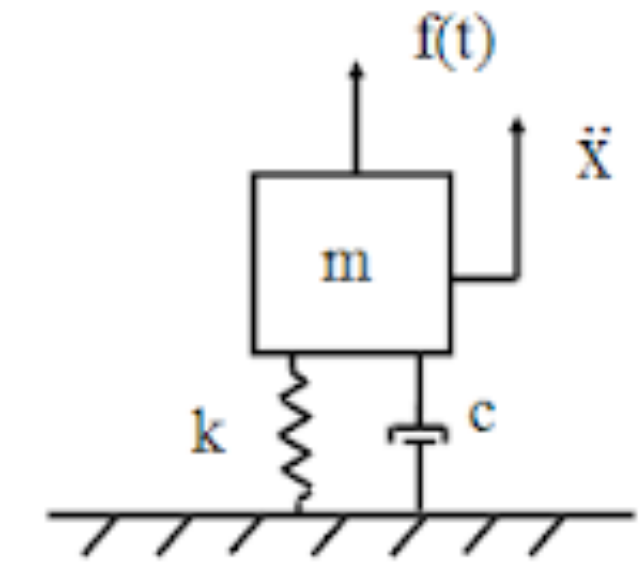
ω dovrà esser grande !! come?



Da ricordare, tornerà utile nella Parte 4
Strumenti e metodi sperimentali

Eccitazione Generica

Non sempre le forzanti del sistema sono armoniche!
Possono essere impulsive, transitorie, randomiche,..



L'equazione del moto cambia, ed in particolare la soluzione particolare !

es. eccitazione a gradino
(forcella di moto che impatta sul cordolo della pista)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0$$

$$p = 0 \quad t \leq 0$$

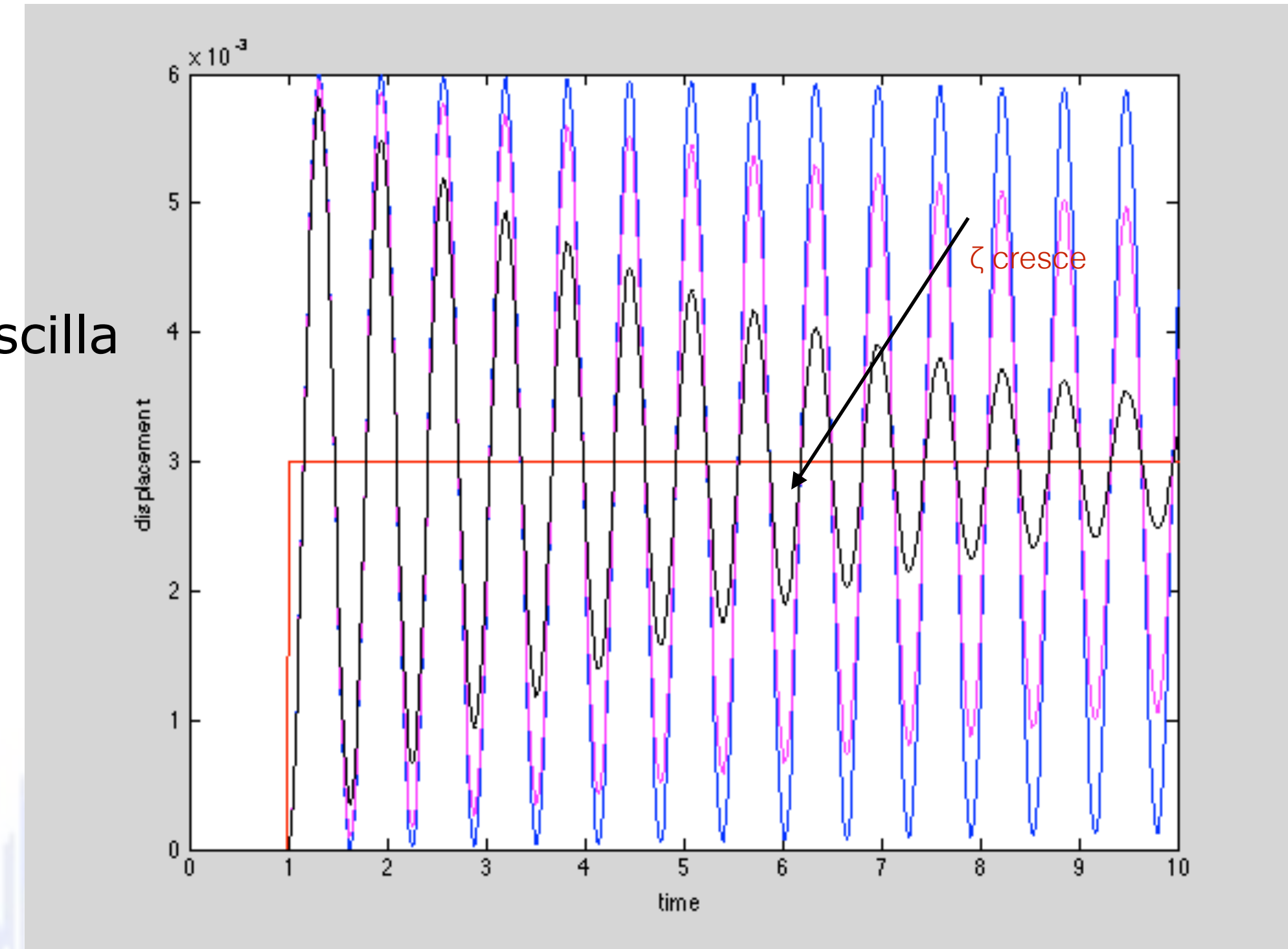
$$p = P_0 \quad t > 0$$

$$x = \frac{P_0}{k} + e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

soluzione graticolare

A_1 e A_2 dipendono dalle CI

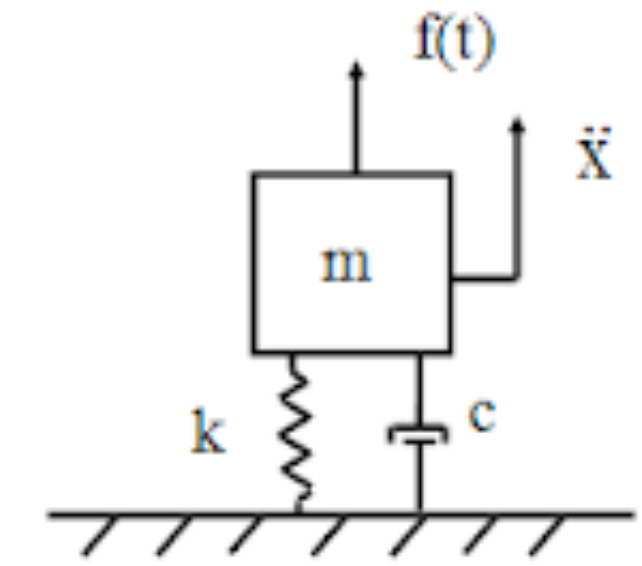
Il sistema non oscilla
attorno allo zero



Qualora ci siano forzanti più complesse conviene separarle e considerarle a pezzi,
stando attenti alle CI ad ogni cambio di forzante

Eccitazione impulsiva

L'eccitazione impulsiva si ha quando la durata dell'eccitazione è molto breve (in funzione della risposta del sistema)



Si ipotizza di applicare un impulso unitario definito come: $I = \int_0^{t_d} p(t)dt = 1 \quad t_p \ll T_n$

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} p & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases} \quad \text{con le C.I.} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

integriamo nel tempo per la durata dell'impulso t_d

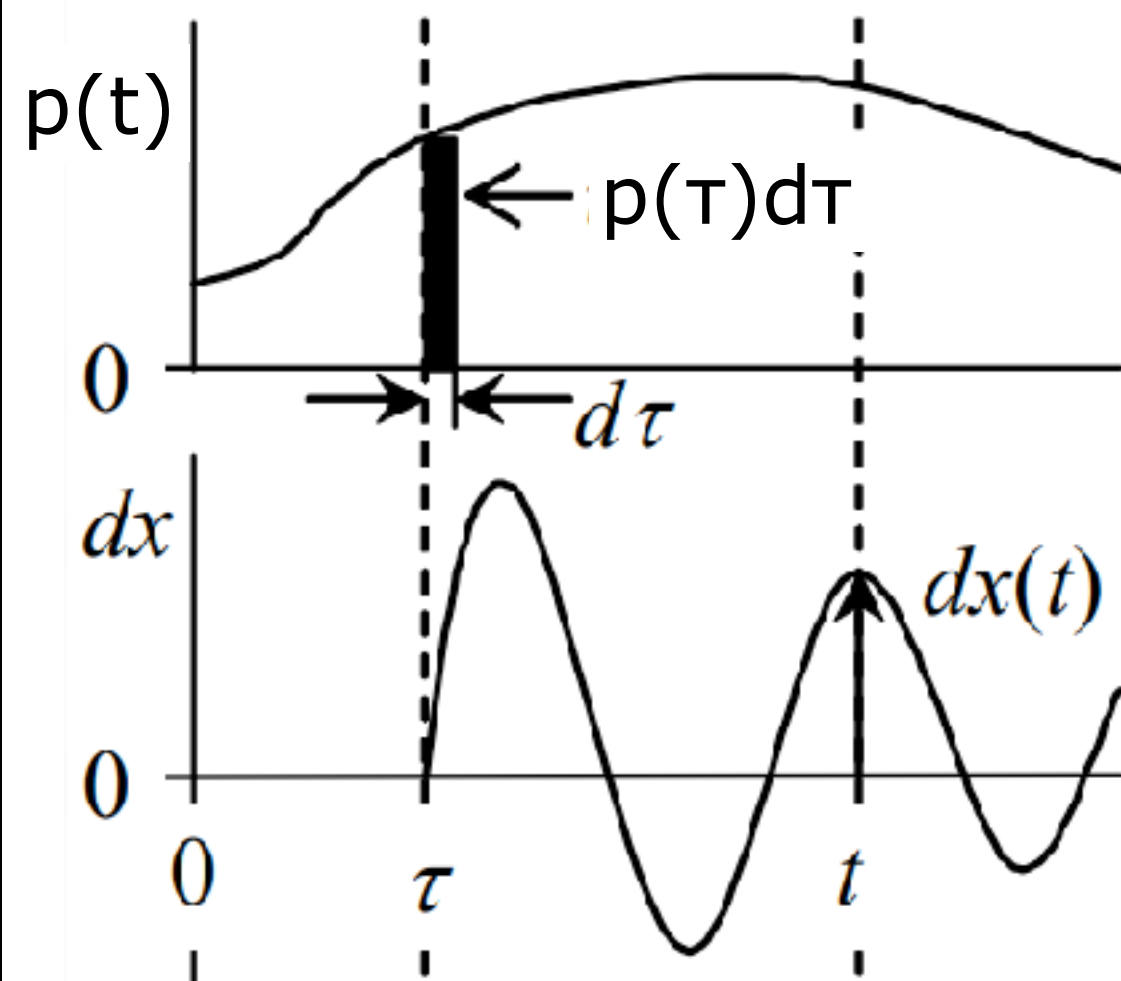
$$m\dot{x} + kx_{av}t_d = I \quad \text{quando } t_d \text{ tende a zero} \quad m\dot{x}(0^+) = I \quad \text{cambia la C.I. sulla velocità} \quad \dot{x}(0^+) = \frac{I}{m}$$

$$\text{quindi la risposta diventa: } x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \sin\omega_n t \quad \text{con smorzamento: } x(t) = \frac{I}{m\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_n t$$

Eccitazione generica

Quando l'eccitazione è generica, la risposta all'impulso torna in aiuto!

La forzante viene scomposta in una serie di impulsi unitari scalati dall'ampiezza dell'eccitazione all'istante considerato



Questo integrale è detto Integrale di Duhamel, è la convoluzione tra la forzante del sistema e la risposta all'impulso

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \sin\omega_n t$$

risposta all'impulso unitario

$$dx(t) = \frac{dI}{m\omega_n} \sin\omega_n(t - \tau)$$

risposta all'impulso infinitesimo all'istante τ

Va da se che la risposta all'eccitazione generica, sarà l'integrale di tutte le risposte, create dagli impulsi infinitesimi al variare di t

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin\omega_n(t - \tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

..non è una relazione così pratica da maneggiare ..
meglio passare al dominio delle frequenze

Se il sistema ha dello smorzamento le equazioni ovviamente si complicano per tener conto del decadimento della risposta ...

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau$$

e con l'aggiunta delle C.I. ...

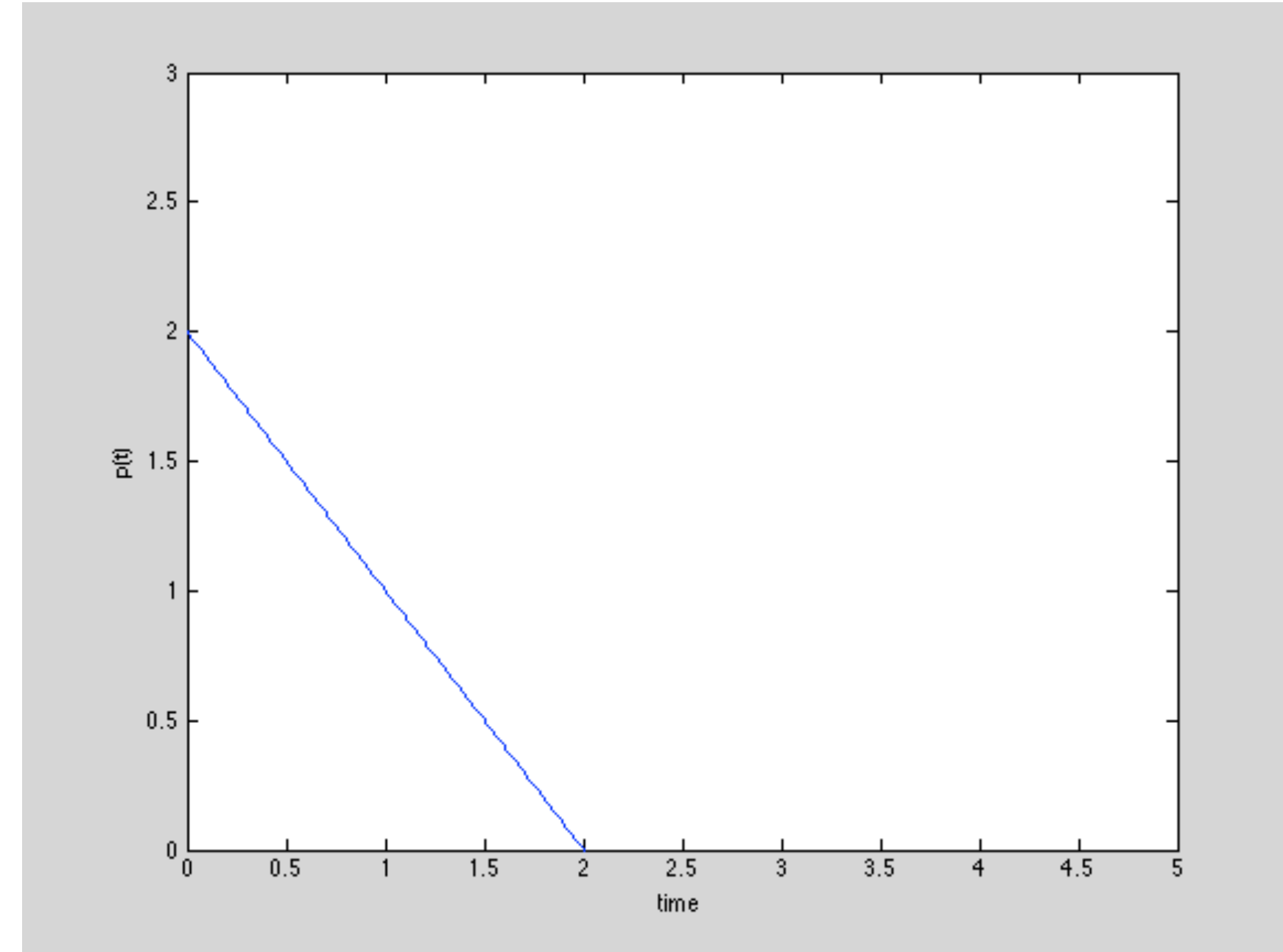
$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau + x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

nel caso smorzato ..

$$x(t) = \underbrace{\frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau}_{\text{forzante}} + e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \underbrace{\left(x_0 \cos(\omega_n t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right)}_{\text{C.I.}}$$

Un esempio..
sistema 1gdl non smorzato, forzato da un forzante cosi definita

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$



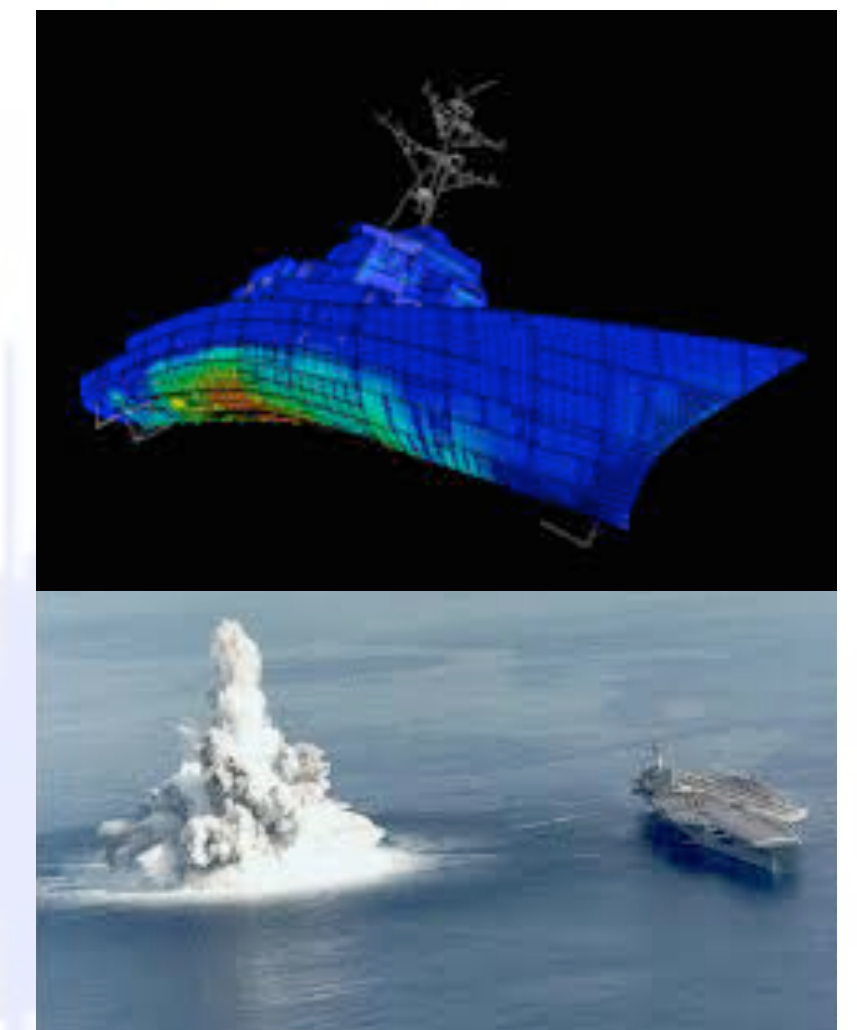
$0 \leq t \leq t_d$

$$x(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right) \left\{ \sin \omega_n t \left[\sin \omega_n t - \left(\frac{t}{t_d}\right) \sin \omega_n t - \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \right] + \right. \\ \left. - \cos \omega_n t \left[-\cos \omega_n t + \left(\frac{t}{t_d}\right) \cos \omega_n t - \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \sin \omega_n t + 1 \right] \right\}$$

$t > t_d$

$$x(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right) \left\{ \sin \omega_n t \left[-\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \right] + \right. \\ \left. - \cos \omega_n t \left[1 - \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \sin \omega_n t \right] \right\}$$

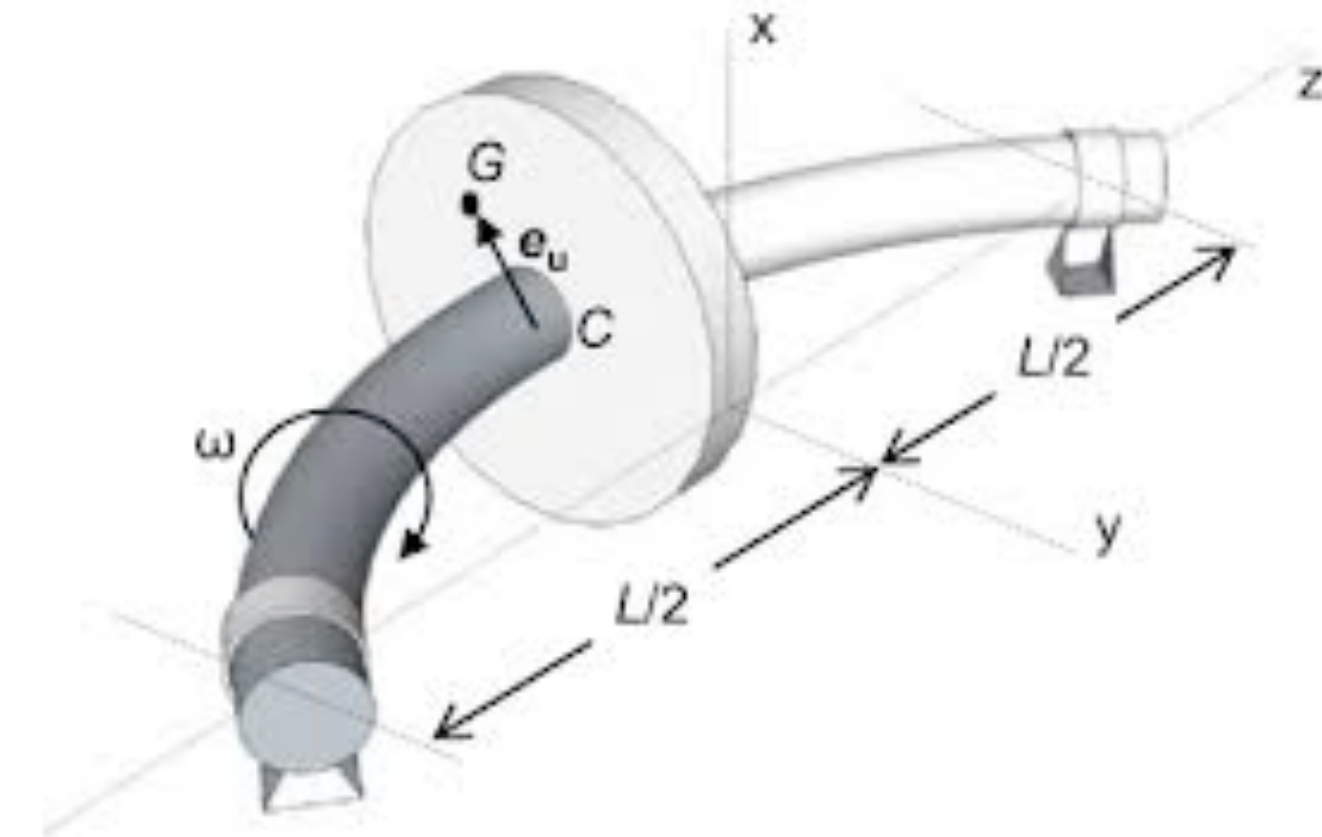
in generale.. non agevole!



Rotore di Jeffcot

Il rotore di Jeffcot è costituito da un albero vincolato rigidamente alle estremità ed un volano posto a metà dell'albero.

Si considera solo lo squilibrio di volano che sposta il centro di massa G dall'asse geometrico di rotazione del sistema di una quantità e



Si considerano nei piani xz e yz l'equilibrio delle forze agenti: la forza centrifuga, e la forza di richiamo elastica (flessione albero)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = me\Omega^2 \cos\Omega t \\ m\ddot{y} + ky = me\Omega^2 \sin\Omega t \end{cases}$$

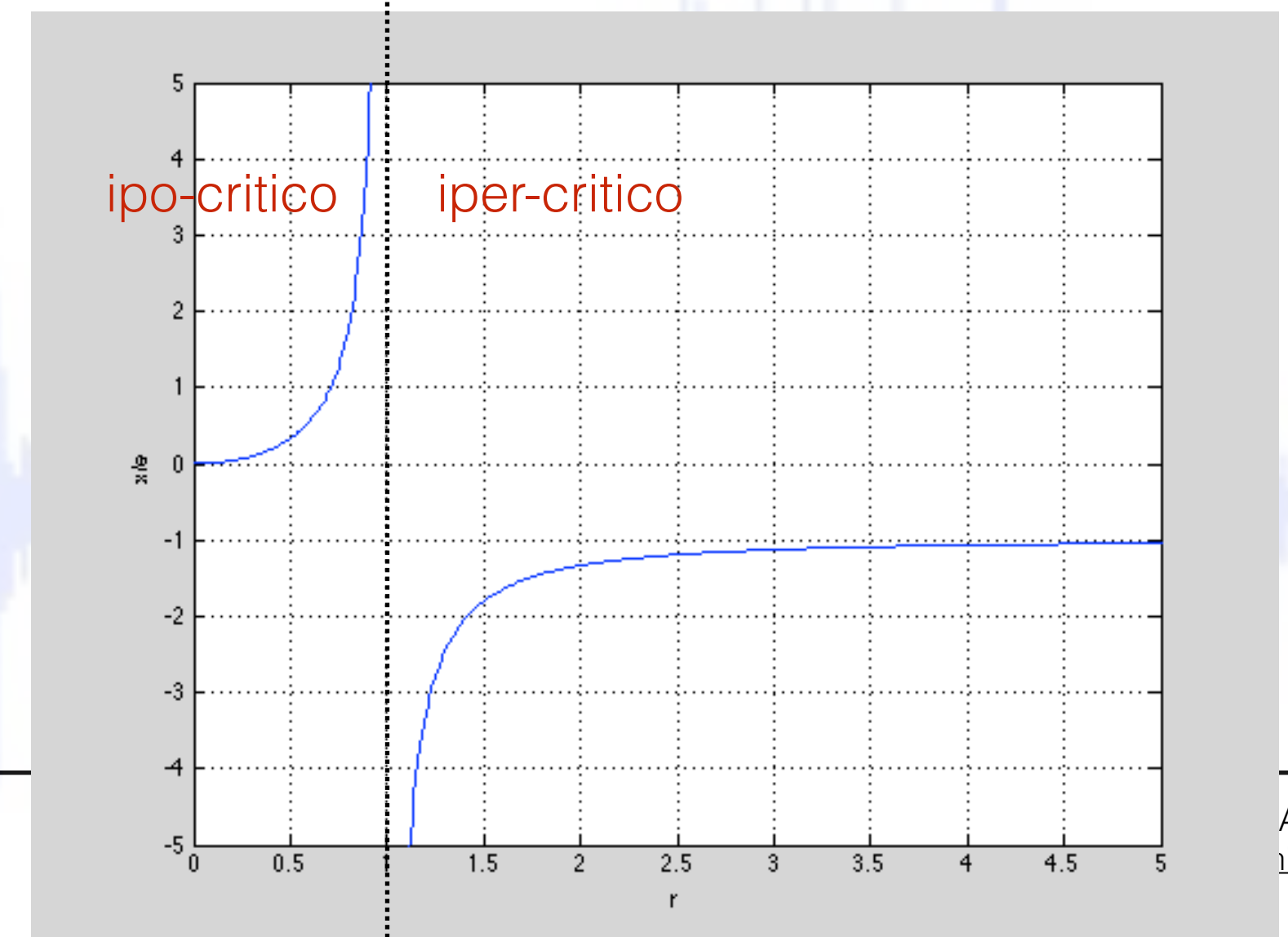
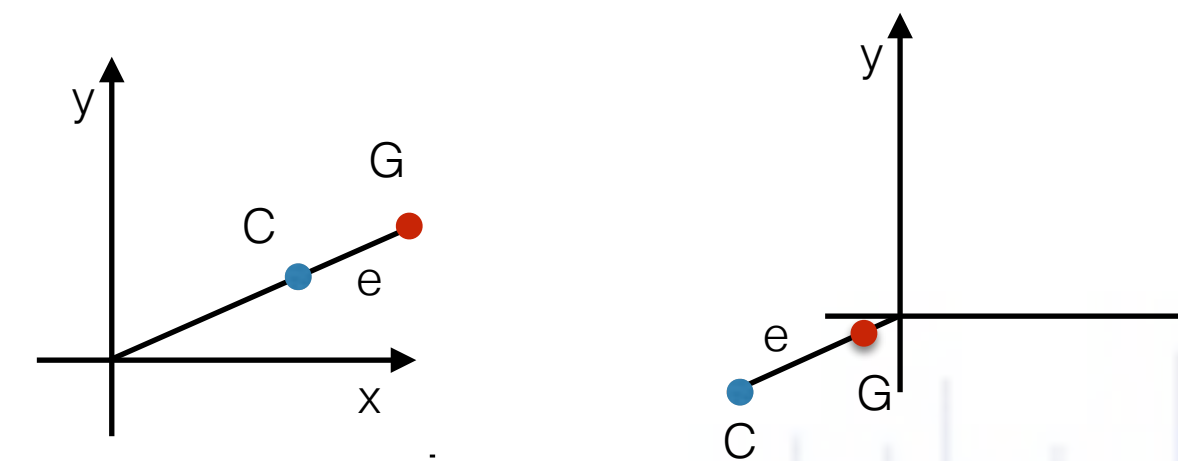
concentriamo l'attenzione sulla prima equazione, e con le solite procedure otteniamo:

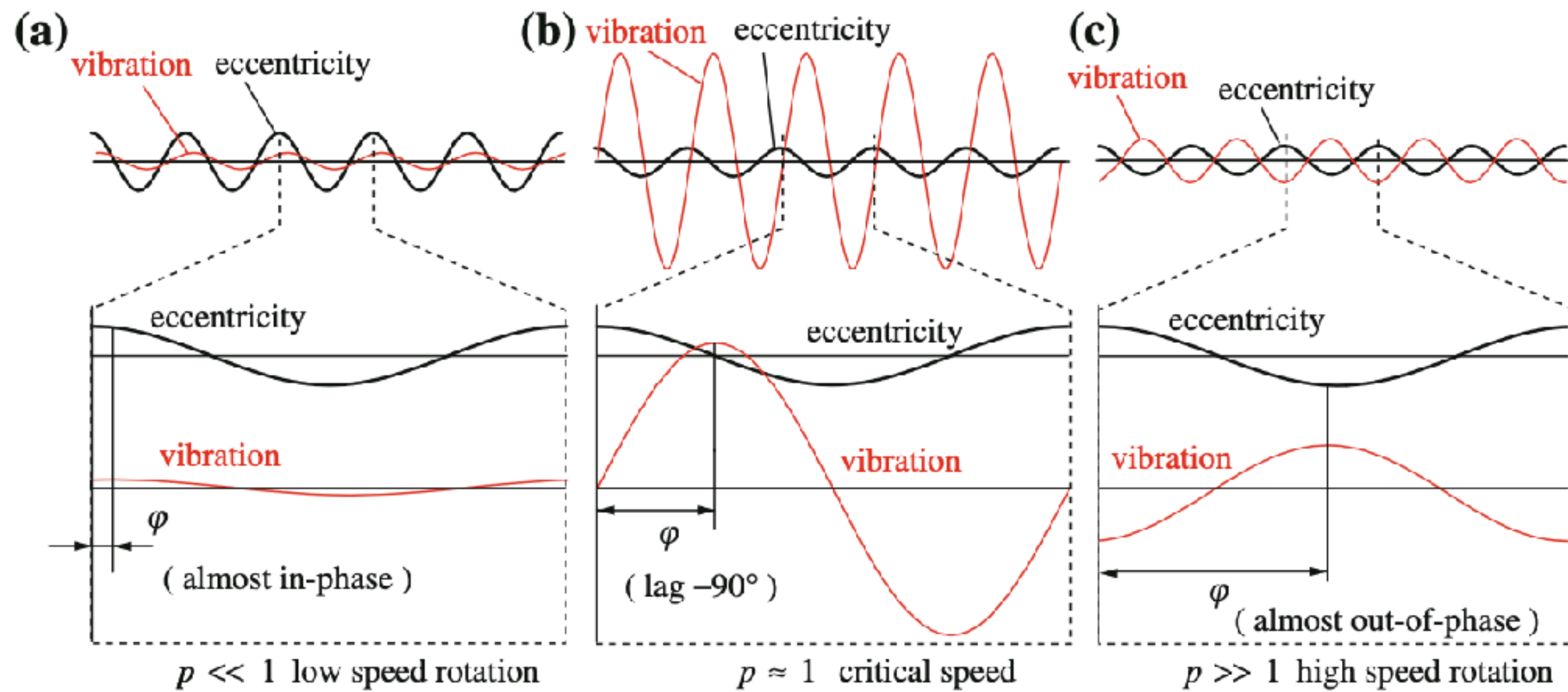
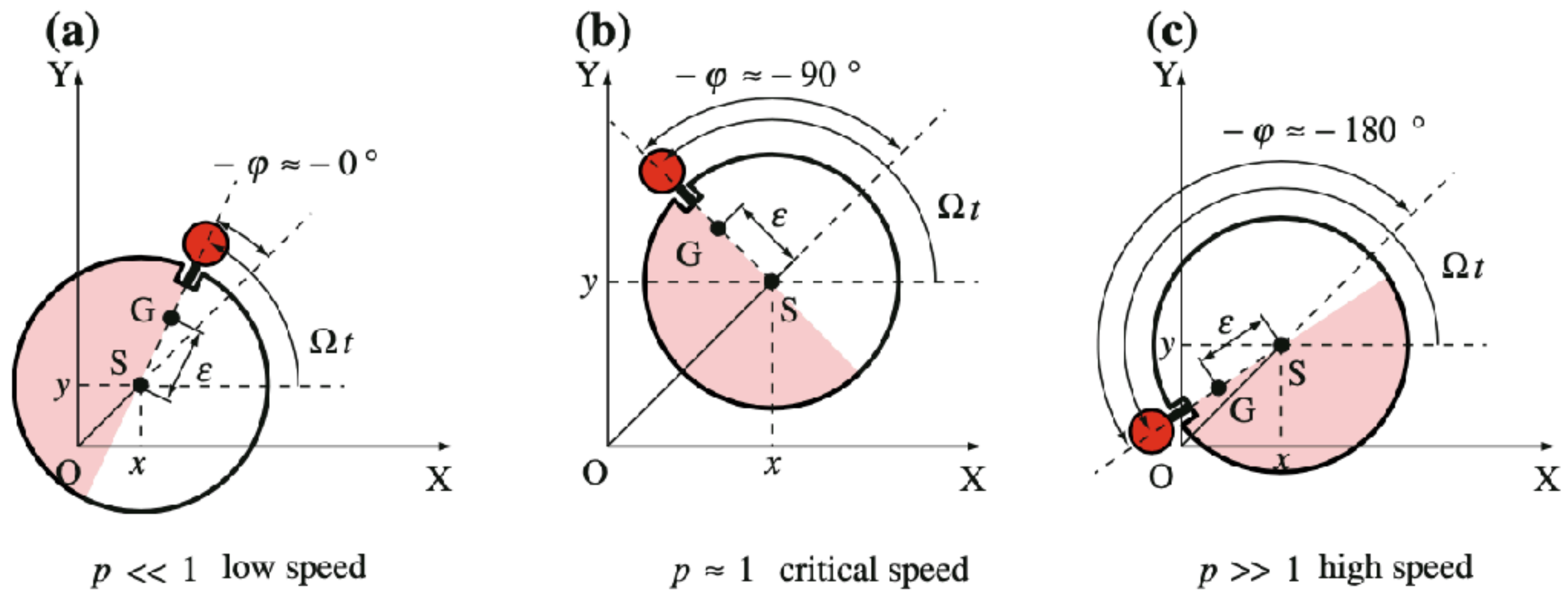
$$x = \frac{me\Omega^2}{k - m\Omega^2} = \frac{e\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{x}{e} = \frac{r^2}{1 - r^2}$$

per $r=0$.. il rotore ruota attorno a C (centro geometrico)

per $r>\infty$.. il rotore ruota attorno a G (centro di massa) > AUTOCENTRATURA



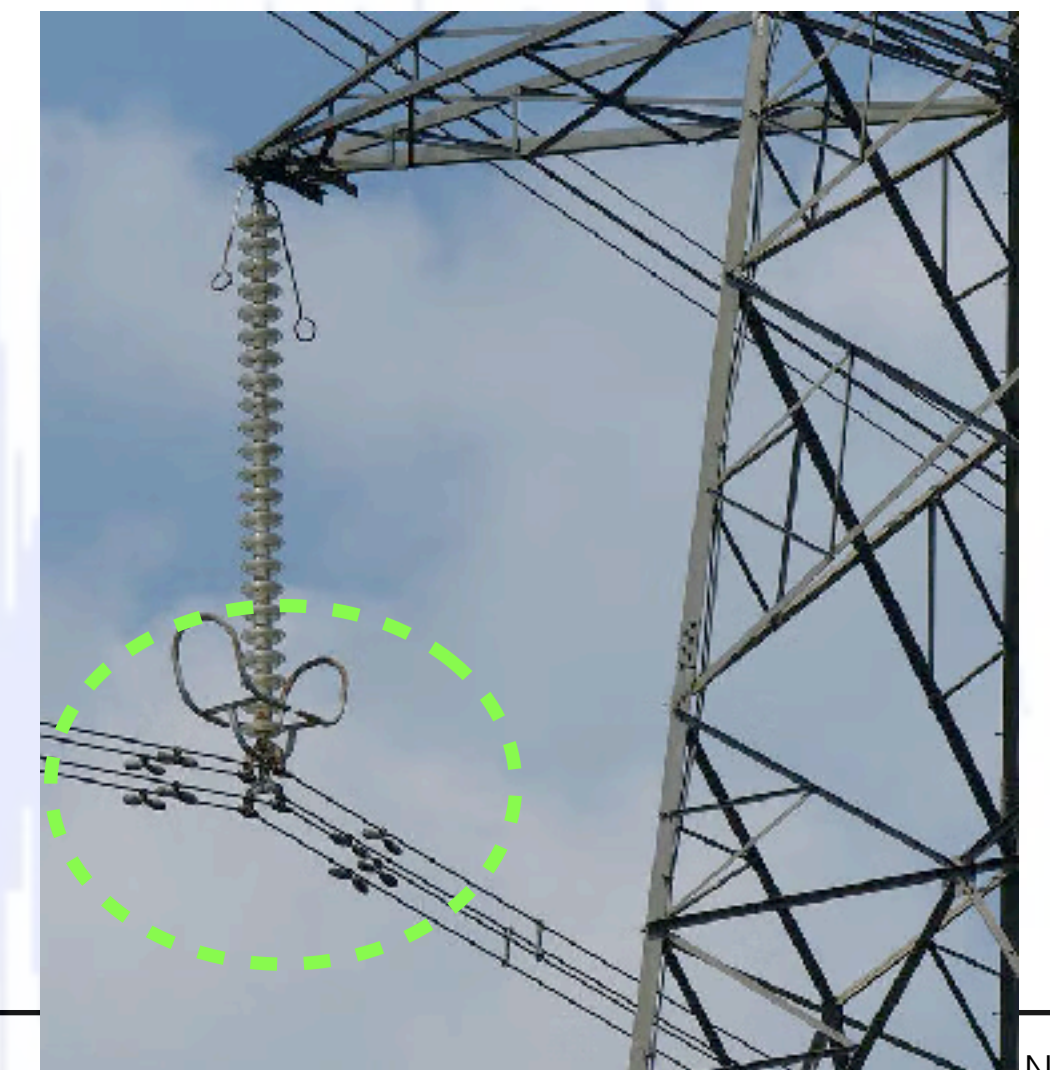
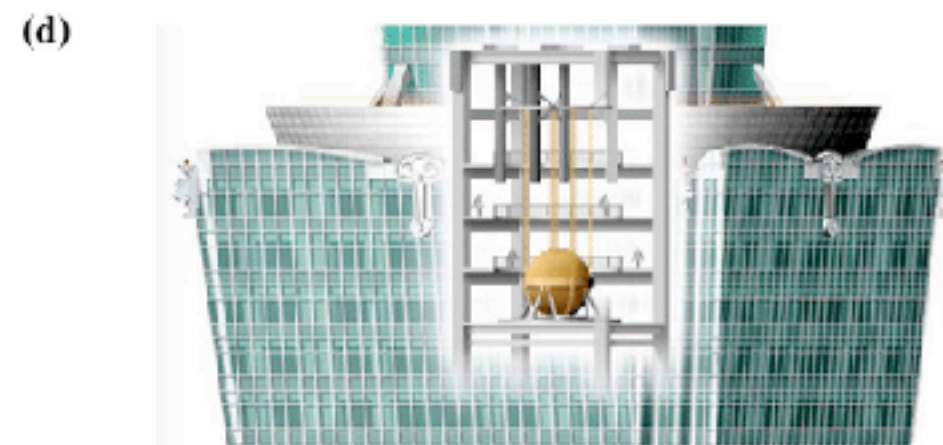
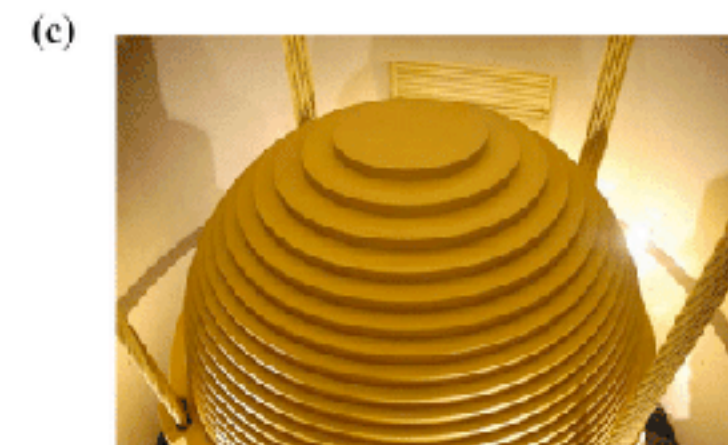
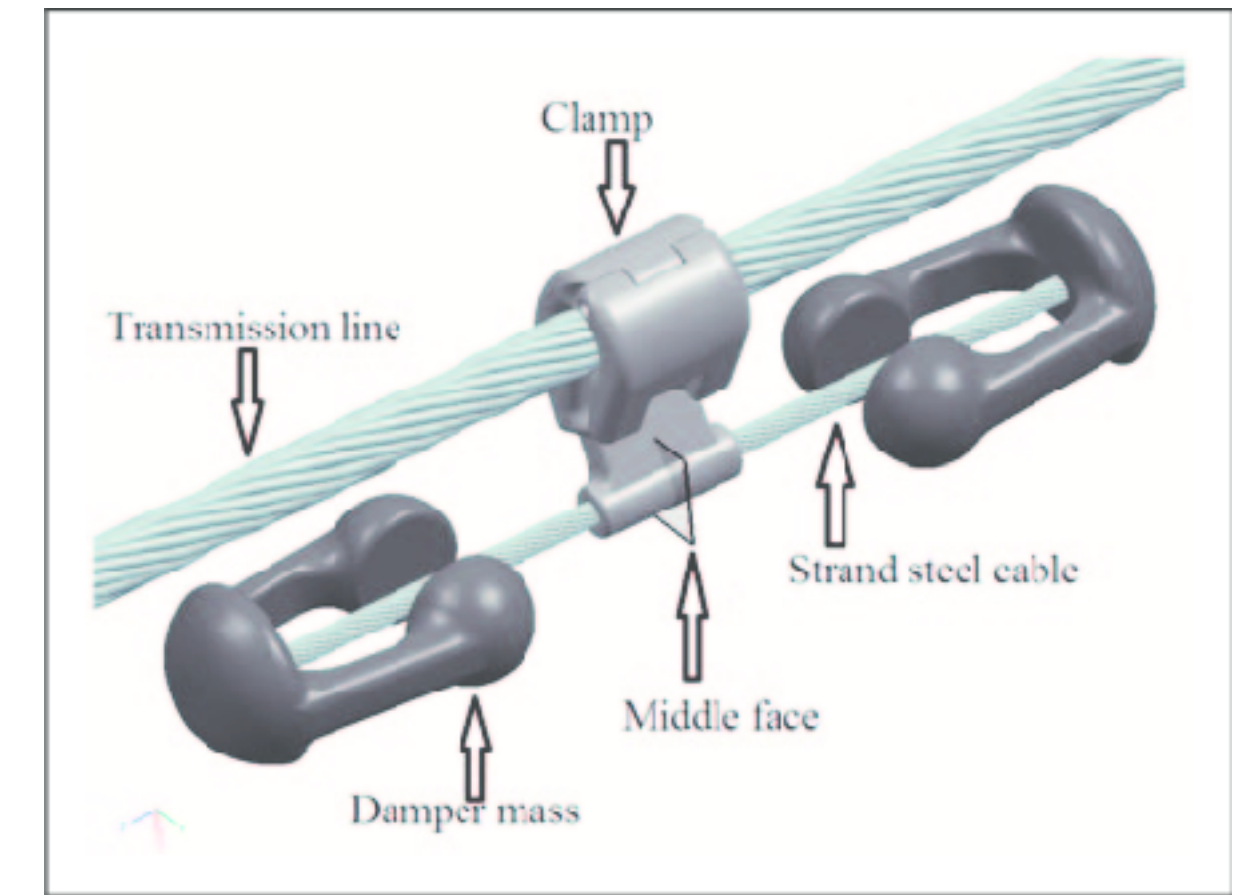
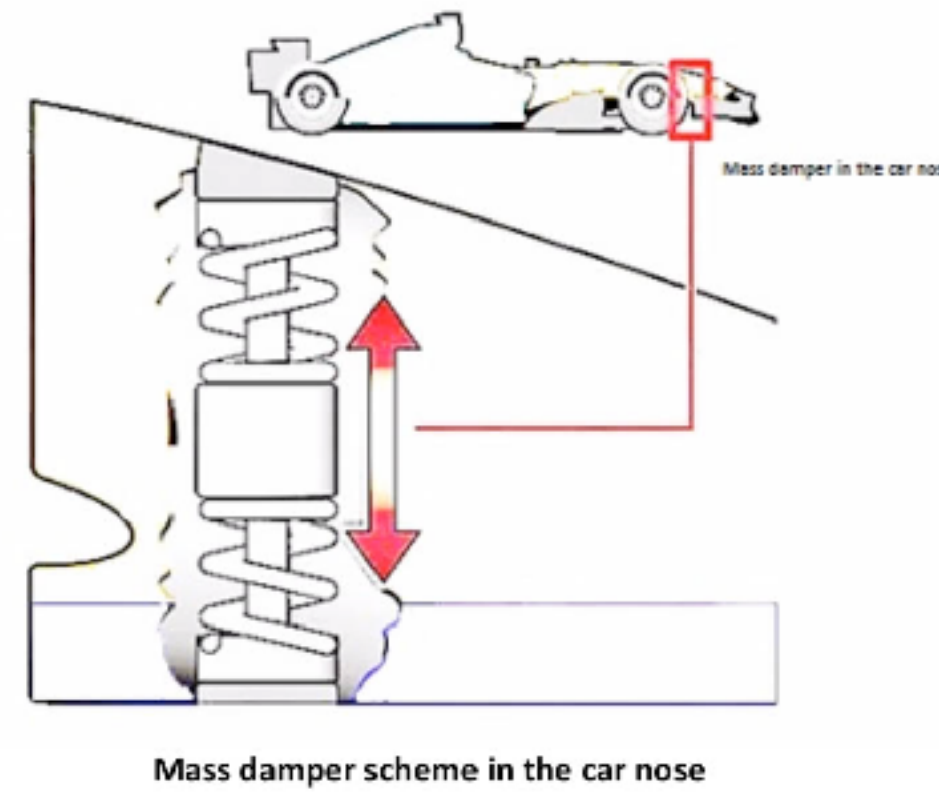
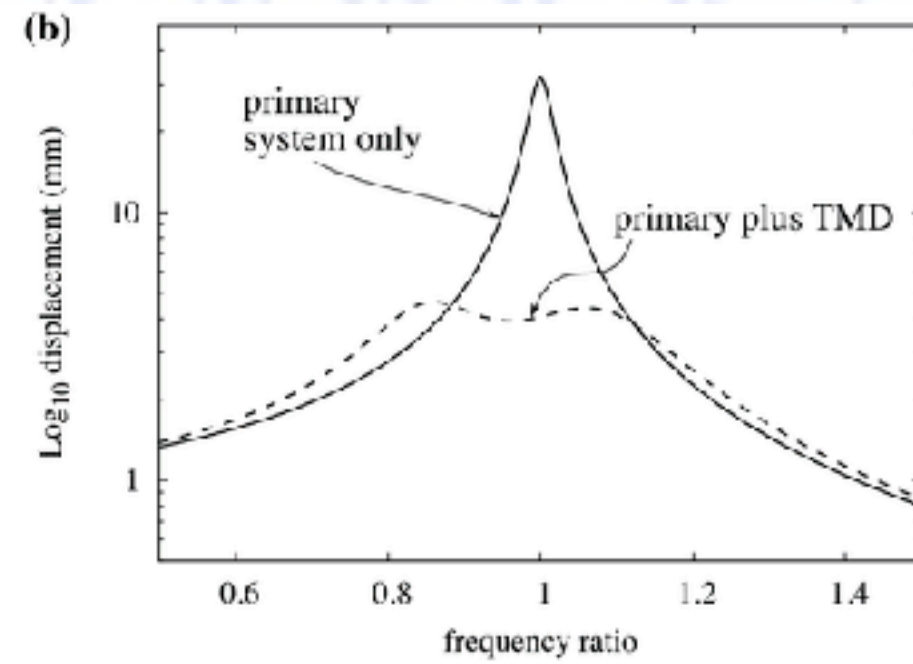
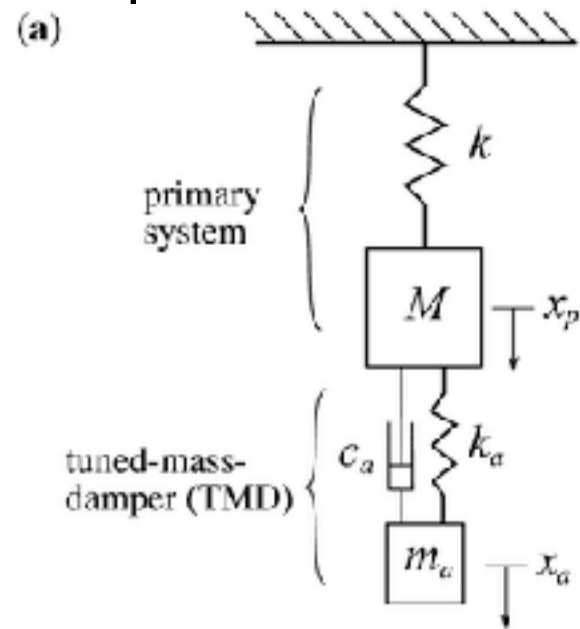


Tranquillizzatori dinamici

I tranquillizzatori sono dei sistemi dinamici secondari aggiunti ad un sistema vibrante primario in modo che questo vibri meno quando sottoposto ad una specifica eccitazione. I tranquillizzatori sono dimensionati per una specifica frequenza di vibrazione!

tuned mass dampers
Taipei 101

di Meccanica delle Vibrazioni @Units



E viet
E esp

Immaginiamo di avere un sistema primario (M,K) eccitato da una forzante F, al quale aggiungiamo un sistema secondario (m,k).

$$M\ddot{x}_1 + Kx_1 = F$$

sistema 1gdl



$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + Kx_1 + k(x_1 - x_2) = F \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

sistema 2gdl

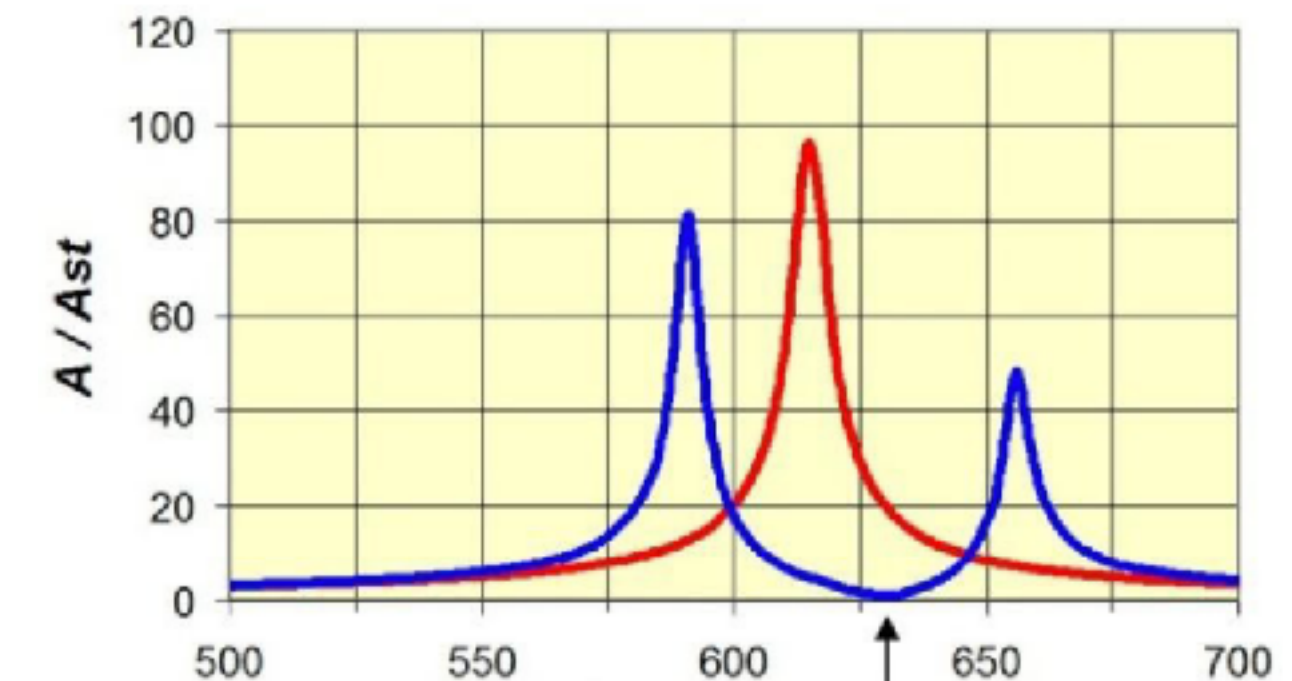
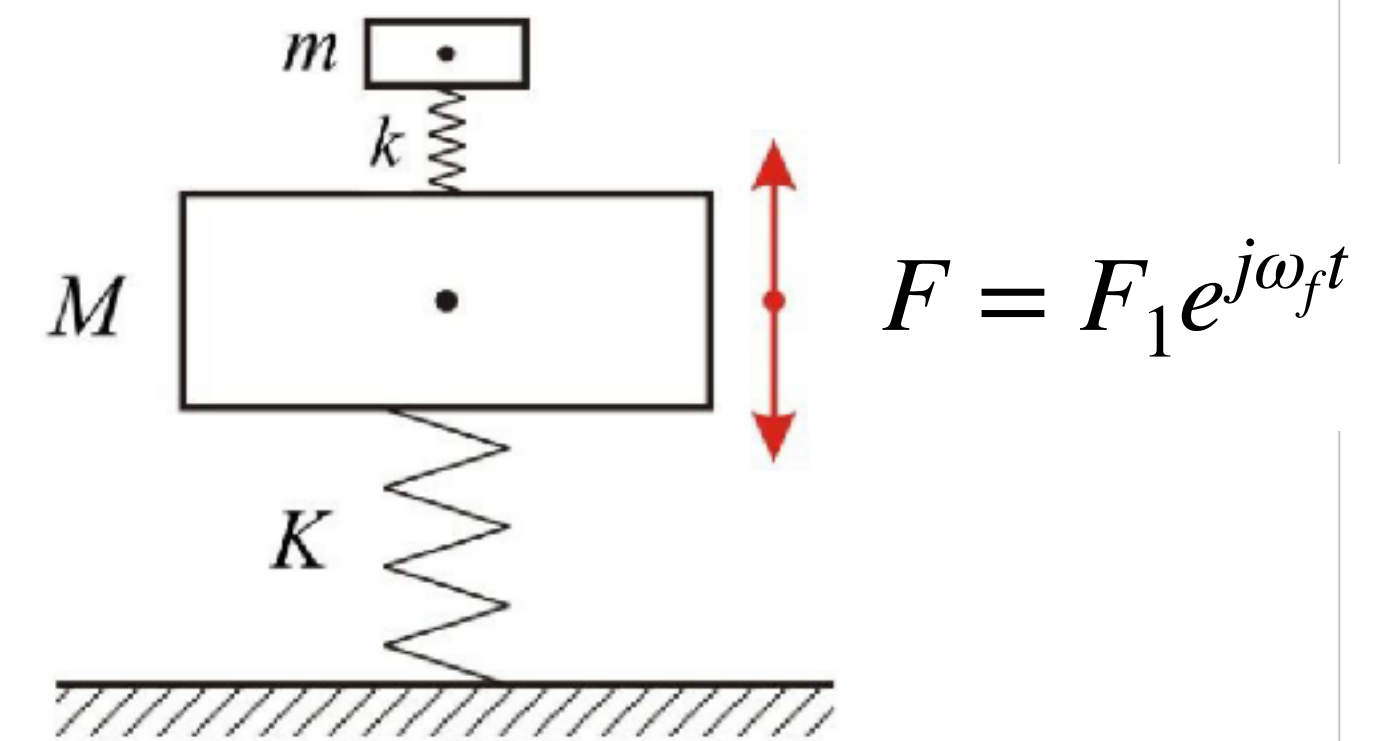


Con le note trasformazioni possiamo trovare la funzione di risposta X1/F e cercare i valori di ω che ne annullano il numeratore

$$\frac{X_1}{F} = H_{1,1} = \frac{k - \omega^2 m}{(K + k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2}$$

$$\frac{X_1}{F} = 0 \quad @ \omega_f \quad k - \omega_f^2 m = 0 \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

quando la frequenza del sistema secondario coincide con quella dell'eccitazione, il sistema primario non vibra!



Come si muove la massa secondaria m?

$$\frac{X_2}{F} = H_{2,1} = \frac{k}{(K + k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2}$$

$$\frac{X_2}{F} = H_{2,1}(\omega_f) = \frac{k}{\underbrace{(K + k - \omega_f^2 M)(k - \omega_f^2 m) - k^2}_{=0}} = -\frac{1}{k}$$

$$X_2 = -\frac{F}{k}$$

se X_2 deve essere piccolo...k deve essere grande
ma se k è grande, anche m deve esser grande per avere $\omega_2 = \omega_f$

attenzione ai desiderata!

Esistono anche versioni torsionali

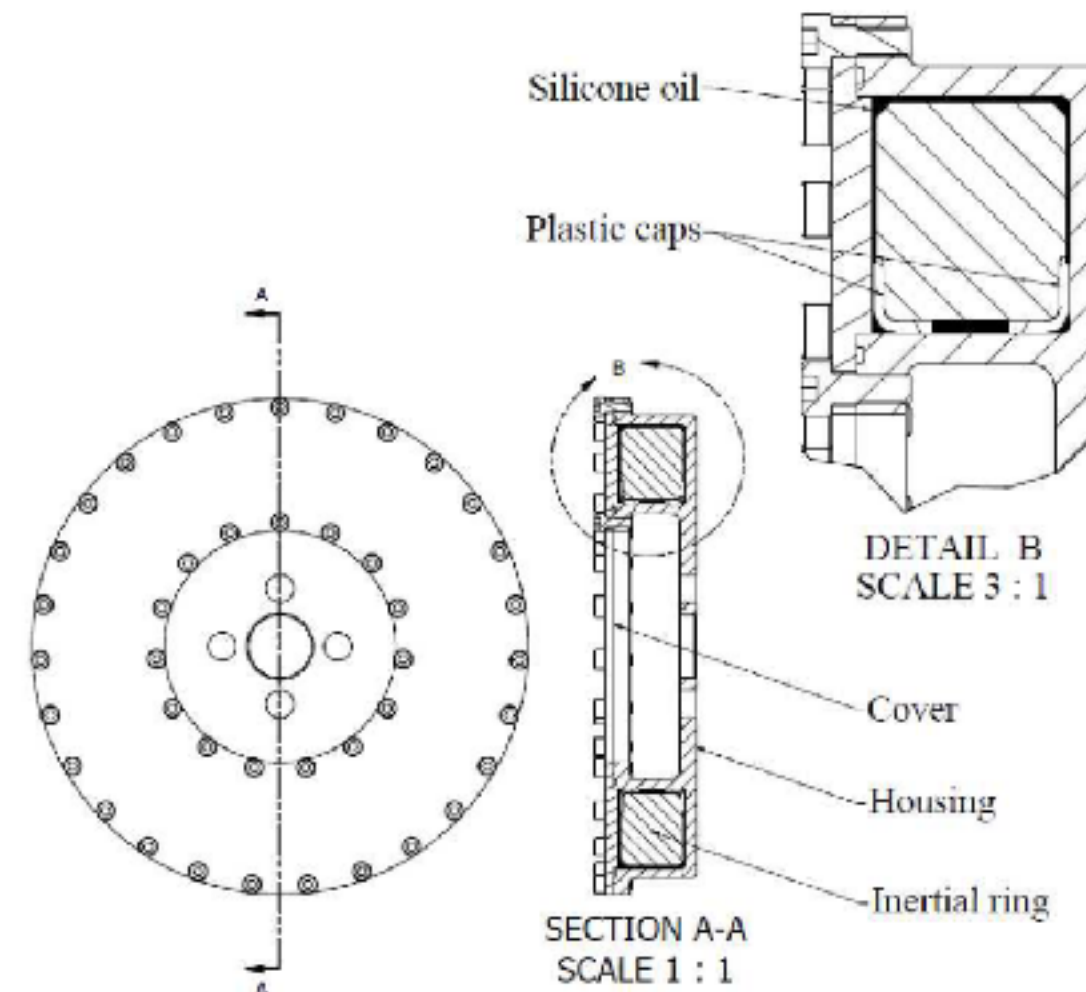


Figure 1. Details of TTMD

Tranquillizzatori torsionali



E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

Alcune estensioni sulla trasformazione modale

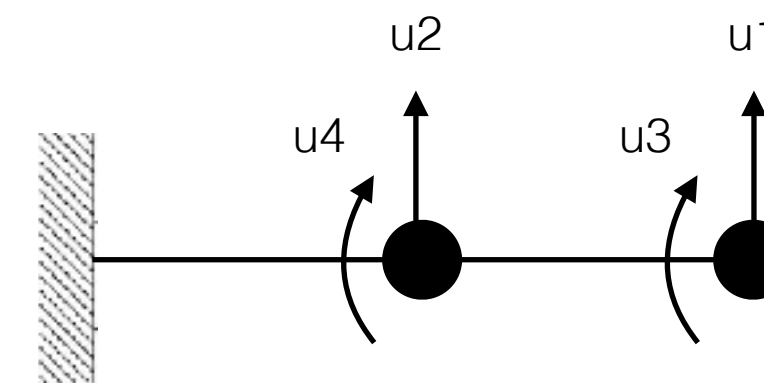
Le matrici di massa e rigidezza sono sempre simmetriche! (Teorema di Maxwell)

Le matrici sono definite positive (T e V sono positivi per ogni spostamento diverso da 0)

La matrice di rigidezza può essere semidefinita positiva!

Se il $\det[k]=0$, il rango < ordine ci saranno anche modi di corpo rigido (V uguale a 0)
altrimenti solo modi flessibili (V diverso 0)

La matrice di massa può essere semidefinita positiva!
nel caso in cui i gdl non hanno informazioni inerziali
(es i punti materiali hanno massa ma non inerzia angolare)



$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono tra loro ortogonali e costituiscono una base ortonormale con cui descrivere tutte le deformate del sistema

Gli autovalori si ordinano in ordine crescente, possono essere anche nulli e ripetuti $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \dots \leq \omega_N^2$

Gli autovalori nulli sono quelli relativi ai modi di corpo rigido, max 6

Gli autovalori ripetuti si presentano nel caso in cui la struttura abbia piani di simmetria



Autovettori ortogonali

Consideriamo due autovalori diversi ω_r, ω_s e i loro associati autovettori $\Phi_r,$

$$\omega_r \neq \omega_s$$

Partiamo dalla solita equazione, e scriviamola in corrispondenza del singolo autovalore/autovettore

$$([k] - \omega^2[m])\{X\} = 0 \quad ([k] - \omega_i^2[m])\{\phi_i\} = 0$$

$$[k]\{\phi_r\} = \omega_r^2[m]\{\phi_r\}$$

$$[k]\{\phi_s\} = \omega_s^2[m]\{\phi_s\}$$

$$\{\phi_s\}^T [k] \{\phi_r\} = \omega_r^2 \{\phi_s\}^T [m] \{\phi_r\}$$

$$\{\phi_r\}^T [k] \{\phi_s\} = \omega_s^2 \{\phi_r\}^T [m] \{\phi_s\}$$

$$\{\phi_r\}^T [k] \{\phi_s\} = \omega_r^2 \{\phi_r\}^T [m] \{\phi_s\}$$

$$\{\phi_r\}^T [k] \{\phi_s\} = \omega_s^2 \{\phi_r\}^T [m] \{\phi_s\}$$

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2) \{\phi_r\}^T [m] \phi_s$$

$$\{\phi_r\}^T [m] \phi_s = 0$$

$$\{\phi_r\}^T [k] \phi_s = 0$$

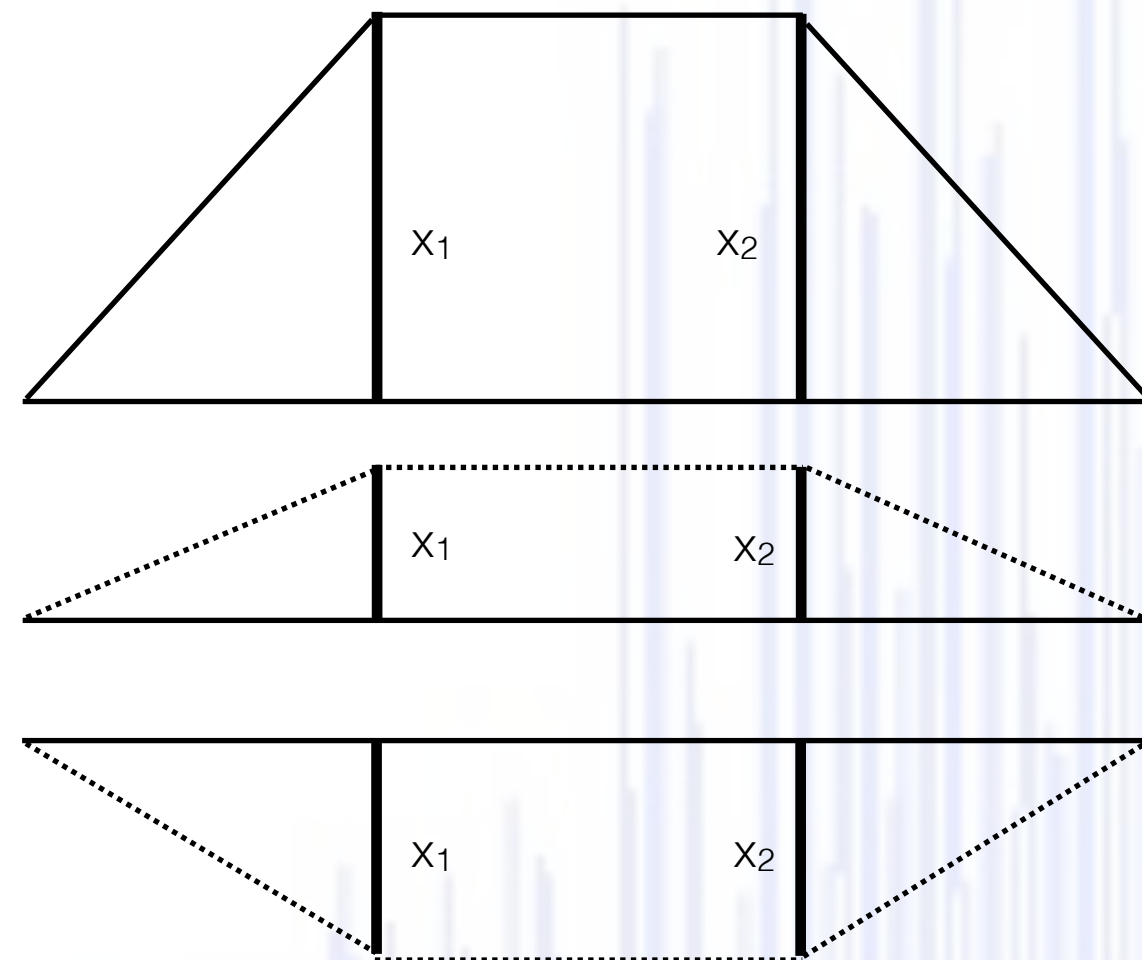
gli autovettori sono
ortogonali !

Pesatura autovettori

Dal momento che l'autovalore annulla il determinante della matrice di rigidità dinamica, (rango è minore ordine N), una riga (colonna) del sistema di equazioni è linearmente dipendente dalle altre!

Gli autovettori possono essere definiti con N-1 elementi .. coefficienti scalaggio β_i

Gli autovettori possono essere definiti a meno di una costante moltiplicativa!



Strategie di scalaggio:

Assegno ad una coordinata un valore definito

$$\{\phi_i\}_r = 1$$

Assegno coordinata con spostamento max un valore definito

$$\{\phi_{max}\}_r = 1$$

Assegno alla massa modale un valore definito

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_r = 1$$

Assegno alla norma del vettore un valore definito (euclidea, infinito..)

$$\|\{\phi_i\}_r\|_n = 1$$

Calcolo autovettori distinti e ripetuti

Partiamo dalla solita equazione,.. in condizioni di risonanza ω_r .

$$([k] - \omega^2[m])\{X\} = 0$$

$$([k] - \omega_r^2[m])\{\phi_r\} = 0$$

Partizionando la matrice di rigidezza opportunamente:

$$\begin{matrix} 1 \times 1 & 1 \times N-1 & 1 \times 1 \\ \left[\begin{array}{cc} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ab}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{array} \right] & \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \phi_b \end{array} \right\}_r & = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ N-1 \times 1 & N-1 \times N-1 & N-1 \times 1 \end{matrix}$$

ω_r è un autovalore distinto,
il rango di $[D(\omega_r)]$ sarà N-1
 $[D_{bb}(\omega_r)]$ è sicuramente invertibile

$$\{\phi_b\} = - [D_{nn}(\omega_r)]^{-1} \{D_{ba}(\omega_r)\}$$

$$\{\phi\}_r = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -[D_{nn}(\omega_r)]^{-1} \{D_{ba}(\omega_r)\} \end{array} \right\}$$

..se gli autovalori son ripetuti ($\Delta\omega < 1\%$) si modifica la procedura tenendo conto dalla molteplicità p dell'autovalore.

In queste condizioni il rango della matrice di rigidezza dinamica $[D(\omega_r)]$ sarà $N-p$, si partiziona la matrice differentemente

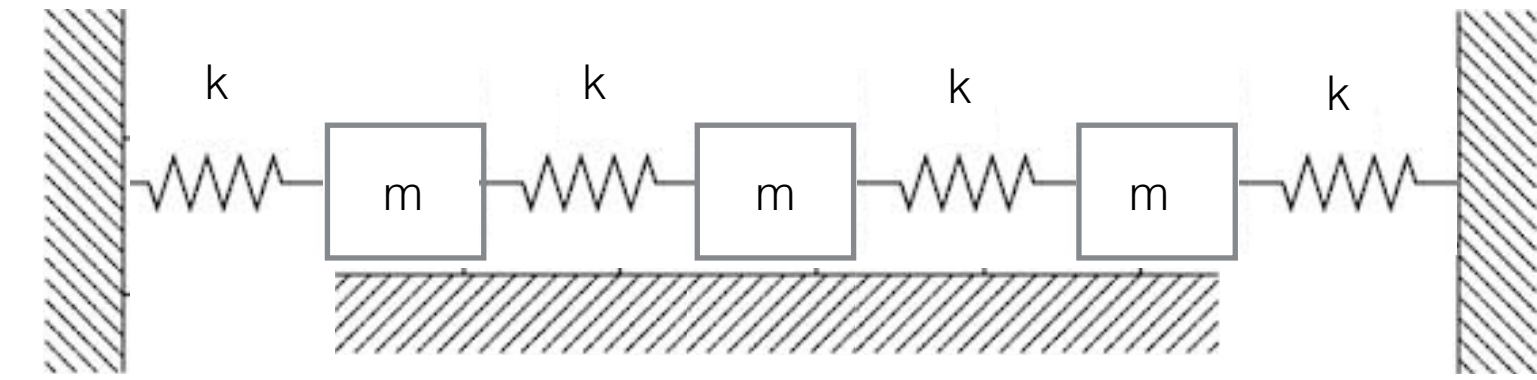
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{matrix} p \times p \\ \color{red} \end{matrix} & \begin{matrix} p \times N-p \\ \color{red} \end{matrix} & \begin{matrix} p \times 1 \\ \color{red} \end{matrix} \\
 \begin{bmatrix} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ab}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r & = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \begin{matrix} N \times p \\ \color{red} \end{matrix} & \begin{matrix} N-p \times N-p \\ \color{red} \end{matrix} & \begin{matrix} N-p \times 1 \\ \color{red} \end{matrix}
 \end{array} \quad [D_{bb}(\omega_r)] \text{ è sicuramente invertibile}$$

$$\{\phi_b\} = - [D_{nn}(\omega_r)]^{-1} [D_{ba}(\omega_r)] \{\phi_a\}$$

Bisogna fare in modo che i Φ_r restino ortogonali tra loro.
Si definiscono allora p Φ_r da sostituire nella formula precedente

$$\{\phi_a\}_r = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_r \quad \{\phi_a\}_{r+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_a\}_{r+p-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Un esempio sistema 3gdl non smorzato, non forzato
 $m=1, k=1$



$$[D(\omega)] = \begin{bmatrix} 2-\omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\det[D(\omega)] = (2-\omega^2) \begin{bmatrix} 2-\omega^2 & -1 \\ -1 & 2-\omega^2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2-\omega^2 \end{bmatrix}$$

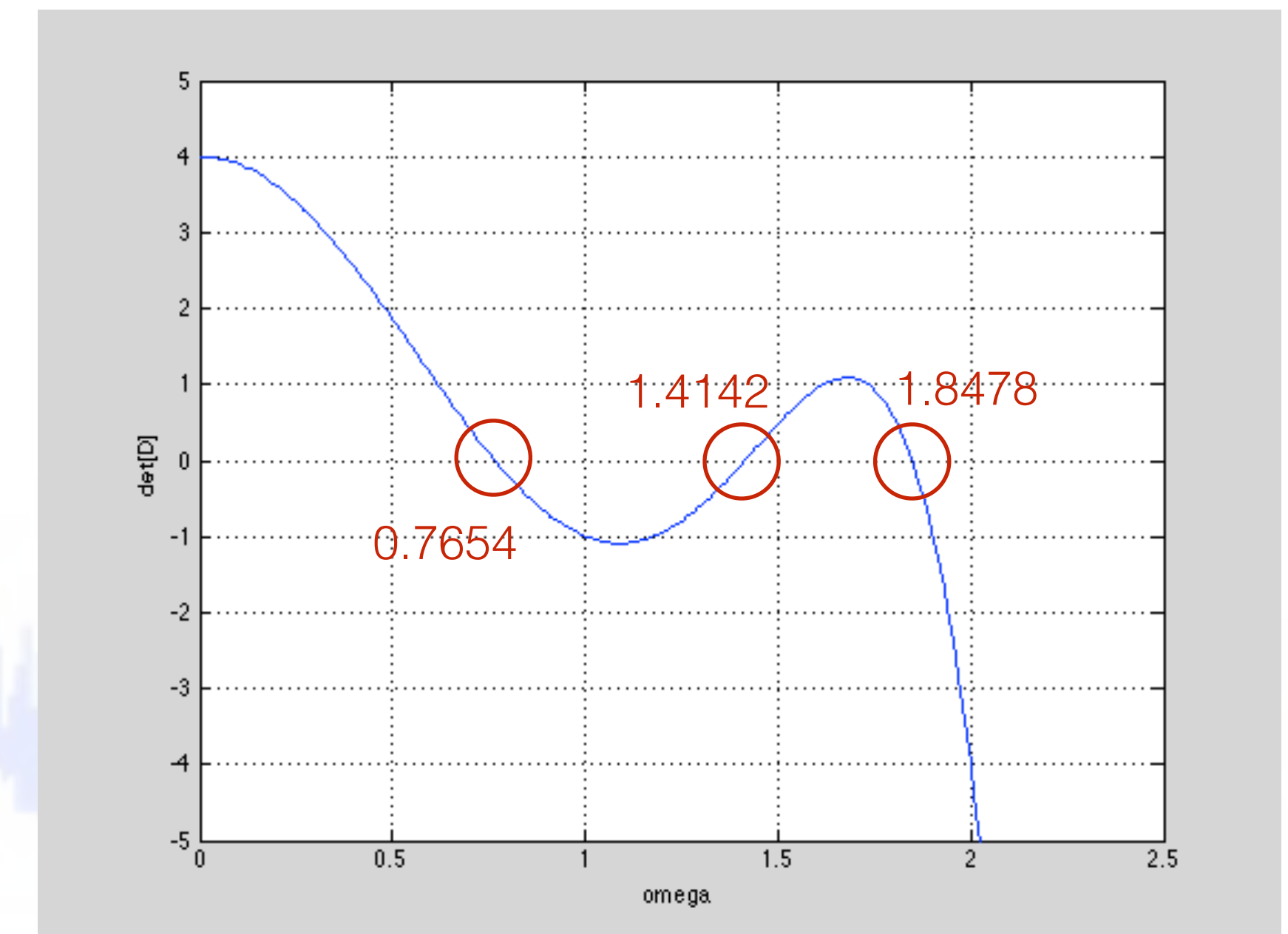
$$\det[D(\omega)] = (2-\omega^2)(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) \quad \text{tre autovalori distinti!}$$

..con il comando eig in Matlab

```
eigvalue =
    0.5858    0    0
    0    2.0000    0
    0    0    3.4142
```

Calcoliamo, con le formule appena viste l'autovettore associato con ω_2

andamento di $\det[D(\omega)]$



$$[D(\omega_2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

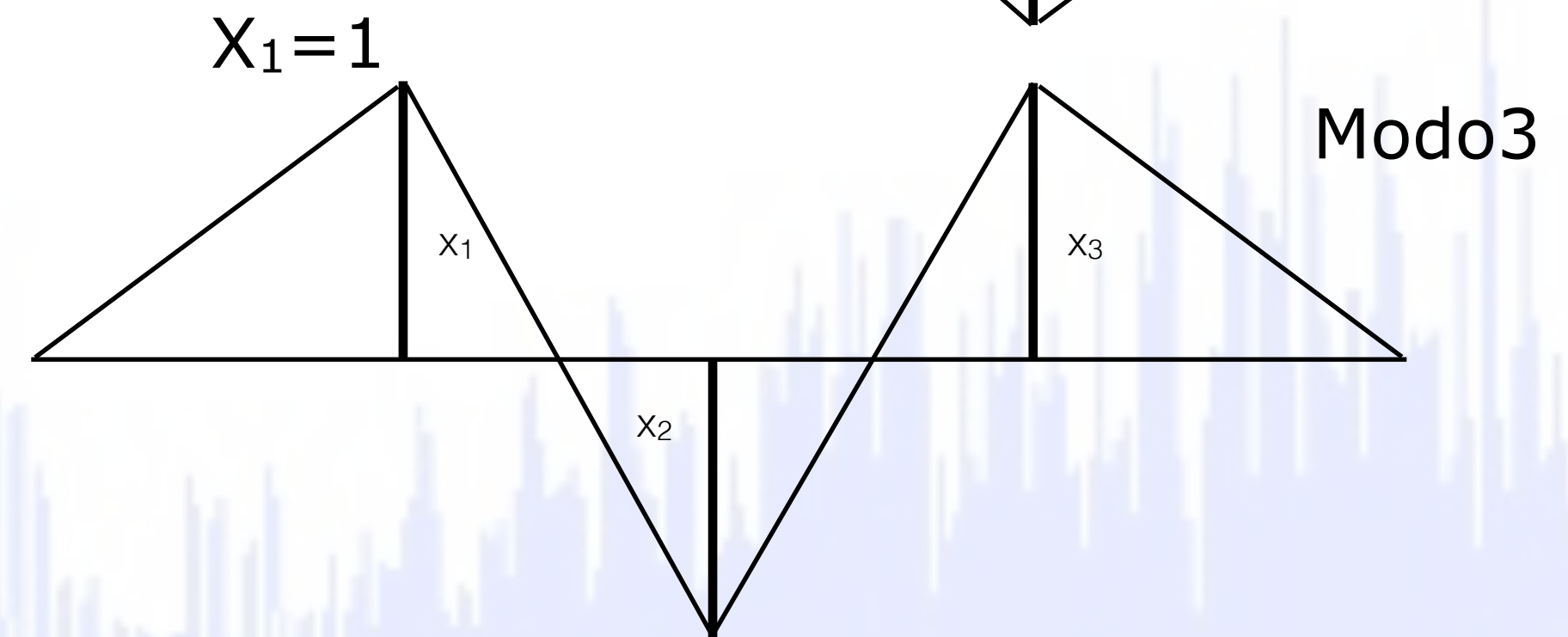
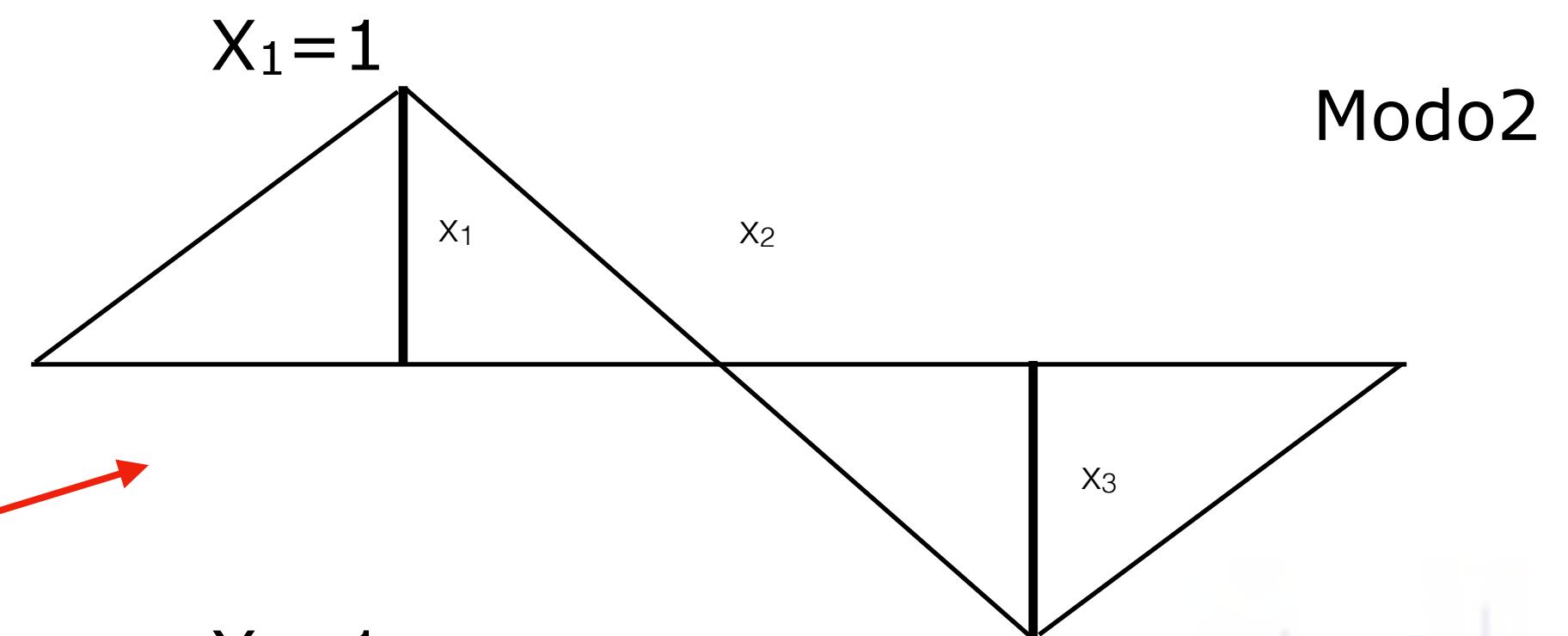
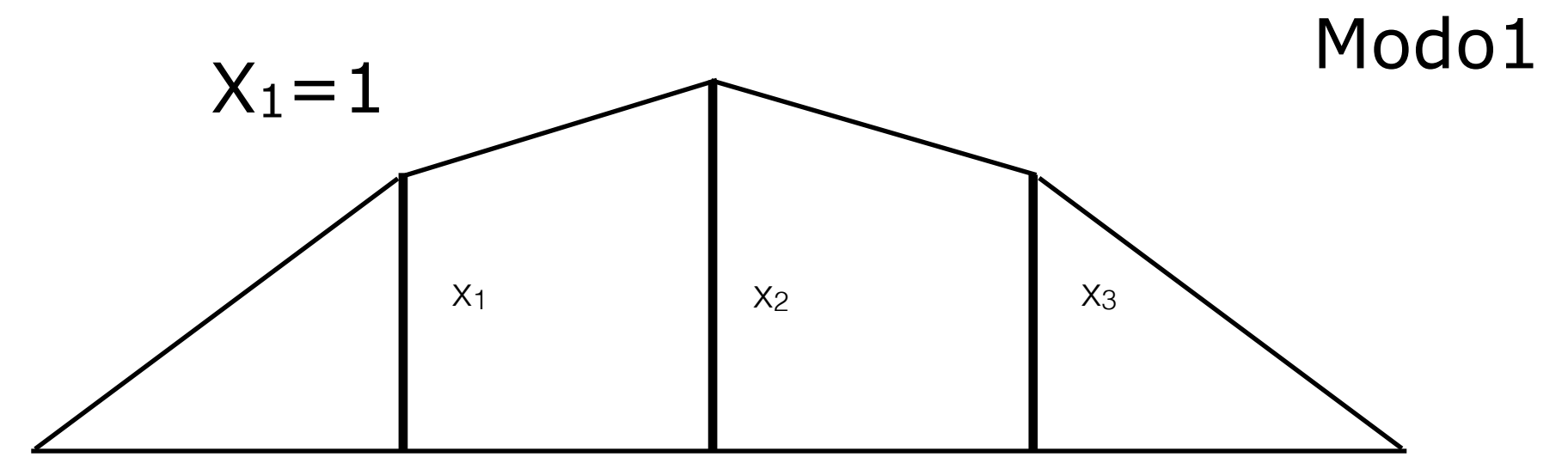
$$\{\phi_b\} = -[D_{bb}(\omega_r)]^{-1} \{D_{ba}(\omega_r)\}$$

$$\{\phi_b\} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

..con il comando eig in Matlab

eivector =
 1.0000 1.0000 1.0000
 1.4142 -0.0000 -1.4142
 1.0000 -1.0000 1.0000



provate a scalare eivector in modo da avere la matrice modale unitaria..

NB la notazione dei vettori è stata tralasciata!

Condizioni iniziali nella trasformazione modale

All'equazione del moto in coordinate fisiche sappiamo bisogna aggiungere le C.I. per ottenere la soluzione del moto

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Bisogna trasportare quelle condizioni alle coordinate modali

$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

$$\begin{cases} x(0) = [\phi]q_0 \\ \dot{x}(0) = [\phi]\dot{q}_0 \end{cases}$$

moltiplicando tutto per $[\phi]^T[m]$ otteniamo

$$\begin{cases} [\phi]^T[m]x(0) = [\phi]^T[m][\phi]q_0 \\ [\phi]^T[m]\dot{x}(0) = [\phi]^T[m][\phi]\dot{q}_0 \end{cases}$$

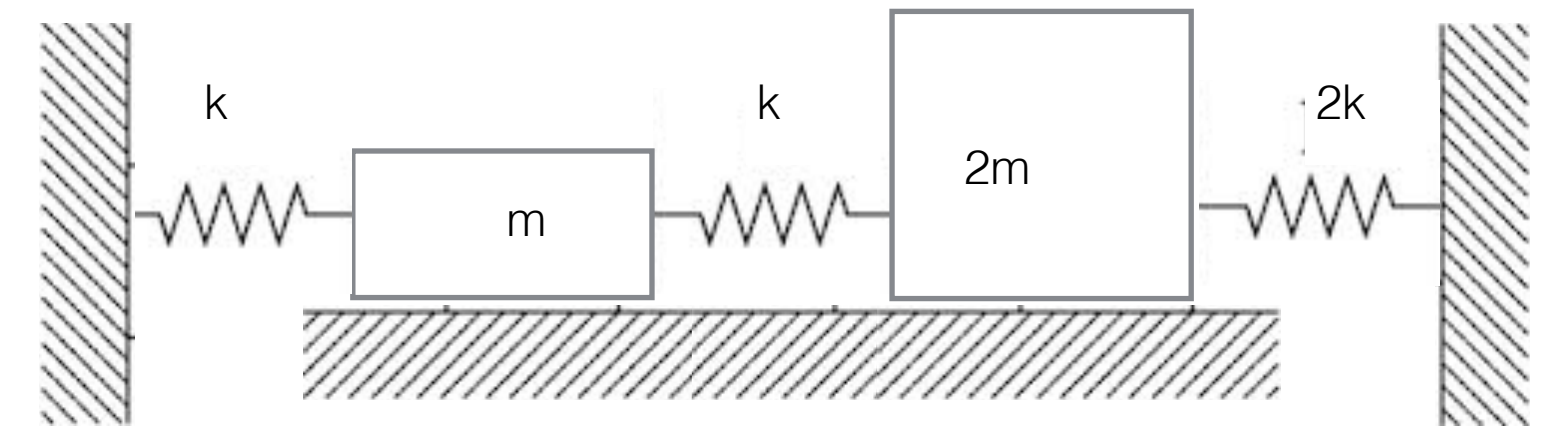
ricordando che $[\phi]^T[m][\phi] = [M]$

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{M}[\phi]^T[m]x(0) \\ \dot{q}_0 = \frac{1}{M}[\phi]^T[m]\dot{x}(0) \end{cases}$$

nello specifico per il modo r

$$\begin{cases} q_{0r} = \frac{1}{M_r} \{\phi_r\}^T [m]x(0) \\ \dot{q}_{0r} = \frac{1}{M_r} \{\phi_r\}^T [m]\dot{x}(0) \end{cases}$$

Da un esempio già visto



$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_0 \end{Bmatrix} \\ \dot{x}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

con le formule precedenti..

$$q_{1r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$q_{2r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$\dot{q}_{1r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\dot{q}_{2r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Risposta di sistemi mgdl con sovrapposizione modale

Le forme modali costituiscono una base ortonormale con cui descrivere tutte le deformazioni del sistema (NB se il sistema è continuo, ha un numero di modo infinti.. servono tutti i modi in teoria! altrimenti avremo una rappresentazione approssimata..)

Le coordinate modali sono dette anche coordinate principali / naturali / normali ($M_r=1$)

$$\overset{nx1}{\{x(t)\}} = \overset{nxn}{[\phi]} \overset{nx1}{\{q(t)\}} = \sum_{r=1}^N \phi_r \eta_r(t) \quad \text{con le già viste C.I.} \quad [\phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_N]$$

qualora il numero di modi identificati non sia completo, la sommatoria si fermerà prima

$$\{\hat{x}(t)\} = [\phi] \{\hat{q}(t)\} = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \phi_r \eta_r(t) \quad [\phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{\hat{N}}]$$

$$\eta_r(t) = \eta_r(0) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \dot{\eta}_r(0) \sin(\omega_n t) + \left(\frac{1}{M_r} \right) \int_0^t P_r(\tau) \sin(\omega_r(t - \tau)) d\tau \quad \text{es. senza smorzamento}$$

Un esempio di un sistema mgdl

definizione del sistema

```
m=[1 0 0 0;
    0 2 0 0;
    0 0 2 0;
    0 0 0 3];

k=800*[1 -1 0 0;
    -1 3 -2 0;
    0 -2 5 -3;
    0 0 -3 7];

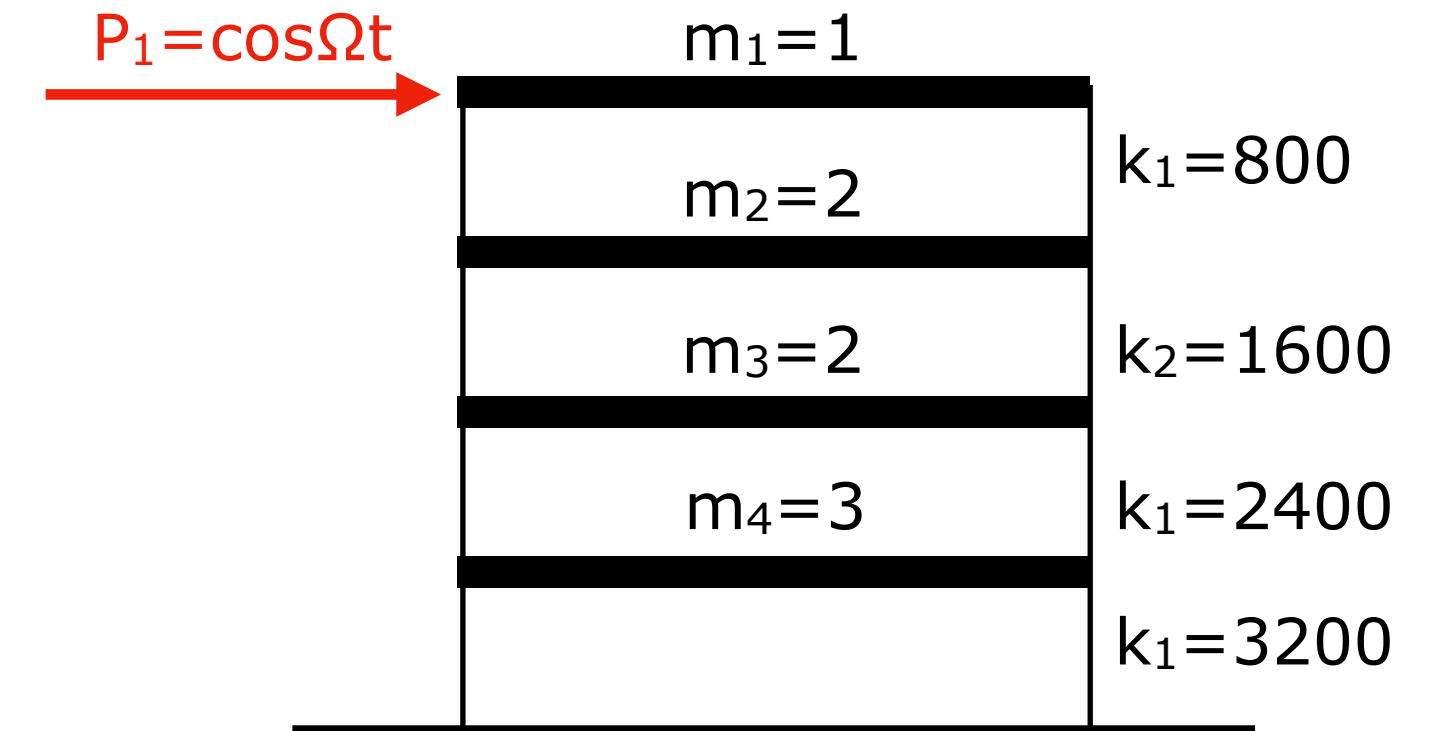
P=[1 0 0 0]';
```

calcolo autovalori e autovettori

```
[eigvector,eigvalue]=eig(k,m);
omega=sqrt(diag(eigvalue));
eigvector =
-0.5900 -0.6777 0.4314 -0.0809
-0.4597 0.0675 -0.4786 0.2348
-0.2930 0.3659 0.0759 -0.5240
-0.1387 0.2966 0.3388 0.3337

eigvalue =
1.0e+03 *
0.1767 0 0 0
0 0.8797 0 0
0 0 1.6875 0
0 0 0 3.1228

omega =
13.2935
29.6597
41.0787
55.8820
```



scalaggio autovettori

```
phi= eigvector./max(abs(eigvector))*-1;
```

```
phi =
1.0000 1.0000 -0.9015 0.1544
0.7791 -0.0996 1.0000 -0.4482
0.4966 -0.5399 -0.1586 1.0000
0.2351 -0.4376 -0.7080 -0.6369
```

elemento massimo unitario

calcolo matrici modali (disaccoppiate)

ModM=phi'*m*phi; ModM_diag=diag(ModM)

ModK=phi'*k*phi; ModK_diag=diag(ModK)

ModP=phi'*P

ModM_diag =
2.8729
2.1773
4.3666
3.6424

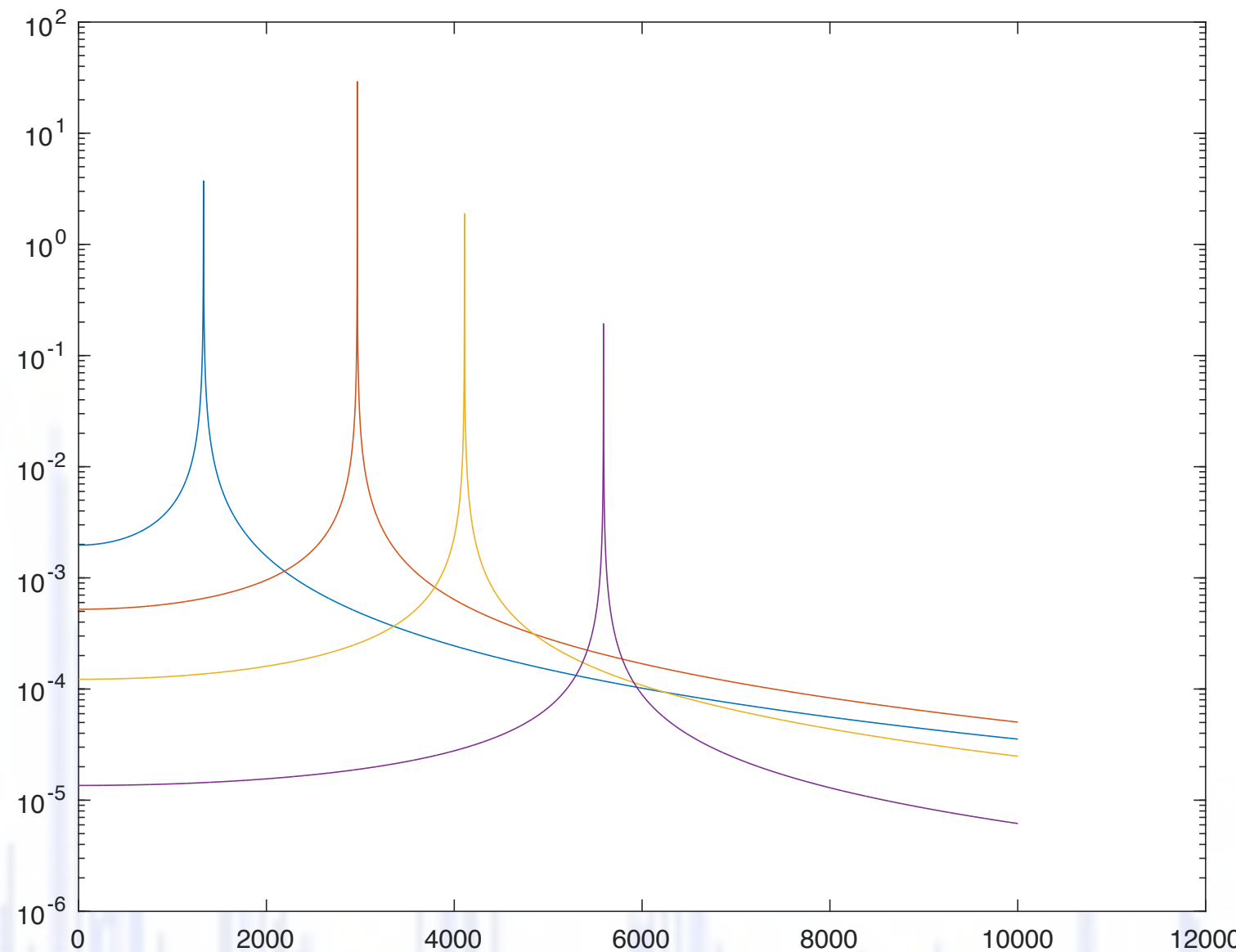
ModK_diag =
1.0e+04 *
0.0508
0.1915
0.7368
1.1374

ModP =
1.0000
1.0000
-0.9015
0.1544

calcolo |q_r|

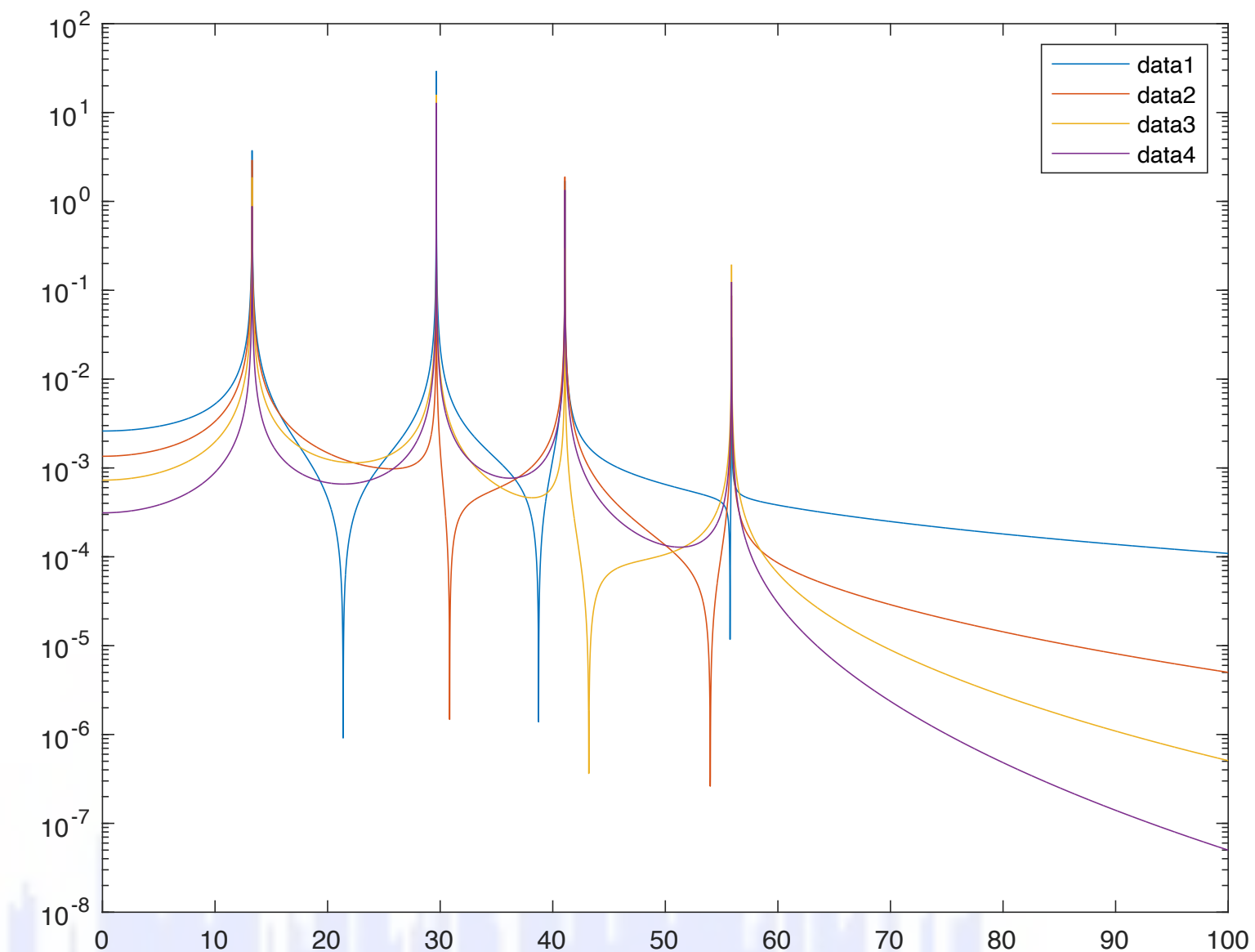
$$q_r = \frac{(F_r/K_r)}{1 - r_r^2}$$

Omega=0:.01:100;
r=Omega./omega;
q=(ModP./ModK_diag)./(1-r.^2)
semilogy(abs(q'))



calcolo x

x=phi*q;
semilogy(Omega,abs(x'))



data1= x1/F1
data2= x2/F1
data3= x3/F1
data4= x4/F1

..provate a fare il calcolo della risposta nel dominio del tempo..
NB dovrete fissare un valore di Ω per la forzante..

$$q_r = \frac{(F_r/K_r) \cos \Omega t}{1 - r_r^2}$$

Le funzioni di risposta in frequenza per sistema mgdl

Ricordiamo quanto fatto nel modulo 2..

La matrice delle FRF è simmetrica, è tridimensionale, è l'inversa della matrice di rigidità dinamica ..

Ogni FRF H_{ij} ($=x_i/F_j$) essere rappresentata come

rapporto di polinomi

guadagni zeri e poli

sommatoria di residui (complessi coniugati)

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_p)}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_{2N})}$$

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

Se ci sono Ngdl, ci sono anche 2N frequenze naturali, 2N modi..

Proprietà matrice dei residui - Sintesi delle FRF

Ricordiamo che la matrice delle FRF può essere ottenuta come somma di residui!

Se N è il grado del sistema, le matrici dei residui, sono NxN e sono quanti sono i modi del sistema!

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\overset{nxn}{[A_r]}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\overset{nxn}{[A_r^*]}}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^N \frac{\begin{bmatrix} A_{11r} & A_{12r} \\ A_{21r} & A_{22r} \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11r}^* & A_{12r}^* \\ A_{21r}^* & A_{22r}^* \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

Stante la simmetria delle matrici di partenza [m], [c], [k], non servirà calcolare tutti gli elementi delle matrici [A_r]

anzi sfrutteremo il fatto che la matrice dei residui [A_r] è proporzionale all'autovettore {Φ_r}

$$[A_r] = Q_r \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = Q_r$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

Si parte dall'identità basata sulla matrice di rigidezza dinamica

$$[Z(\omega)][Z(\omega)]^{-1} = [I] \quad \text{ricordando la definizione dell'inversa} \quad [Z(\omega)]^{-1} = \frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$[Z(\omega)] \frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} = [I]$$

$$[Z(\omega)] adj[Z(\omega)] = \det[Z(\omega)] [I]$$

valutiamo l'espressione in corrispondenza dell'autovalore λ_r
(si annulla il determinante)

$$[Z(\lambda_r)] adj[Z(\lambda_r)] = \{0\}$$

prendiamo la colonna i della matrice aggiunta

$$[Z(\lambda_r)] \{Z(\lambda_r)\}_i^A = \{0\}$$

$$[Z(\lambda_r)] \{X\}_{\lambda_r} = [Z(\lambda_r)] \{\phi\}_r = \{0\}$$

Dalla definizione della rigidezza dinamica,
valutata in corrispondenza dell'autovalore λ_r
osserviamo la menzionata proporzionalità

$$\{\phi_r\} = \beta_{ir} \{Z(\lambda_r)\}_i^A$$

..la colonna della matrice aggiunta è proporzionale all'autovettore

Stante la simmetria delle matrici di partenza, anche la matrice aggiunta è simmetrica quindi lo stesso discorso di proporzionalità può anche essere fatto per le sue righe!

Per tanto vale la relazione:

$$adj[Z(\lambda_r)] = Q_r \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix} = [A_r]$$

Ripartendo dall'espressione della matrice delle FRF

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

concentrando l'attenzione sulla colonna k

$$\begin{Bmatrix} H_{1k}(\omega) \\ H_{2k}(\omega) \\ \dots \\ H_{Nk}(\omega) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^N \frac{\{A_r\}_k}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\{A_r\}_r^*}{j\omega - \lambda_r^*}$$

si osserva che questa dipende dalla colonna k delle matrici dei residui ..che è proporzionale all'autovettore $\{\Phi_r\}$

Estraendo la colonna k dalla matrice dei residui, varranno le seguenti relazioni:

$$[A_r] = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \dots \\ A_{Nk} \end{Bmatrix}_r = Q_r \begin{Bmatrix} \phi_1\phi_k \\ \phi_2\phi_k \\ \dots \\ \phi_N\phi_k \end{Bmatrix}_r = Q_r \phi_{kr} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r$$

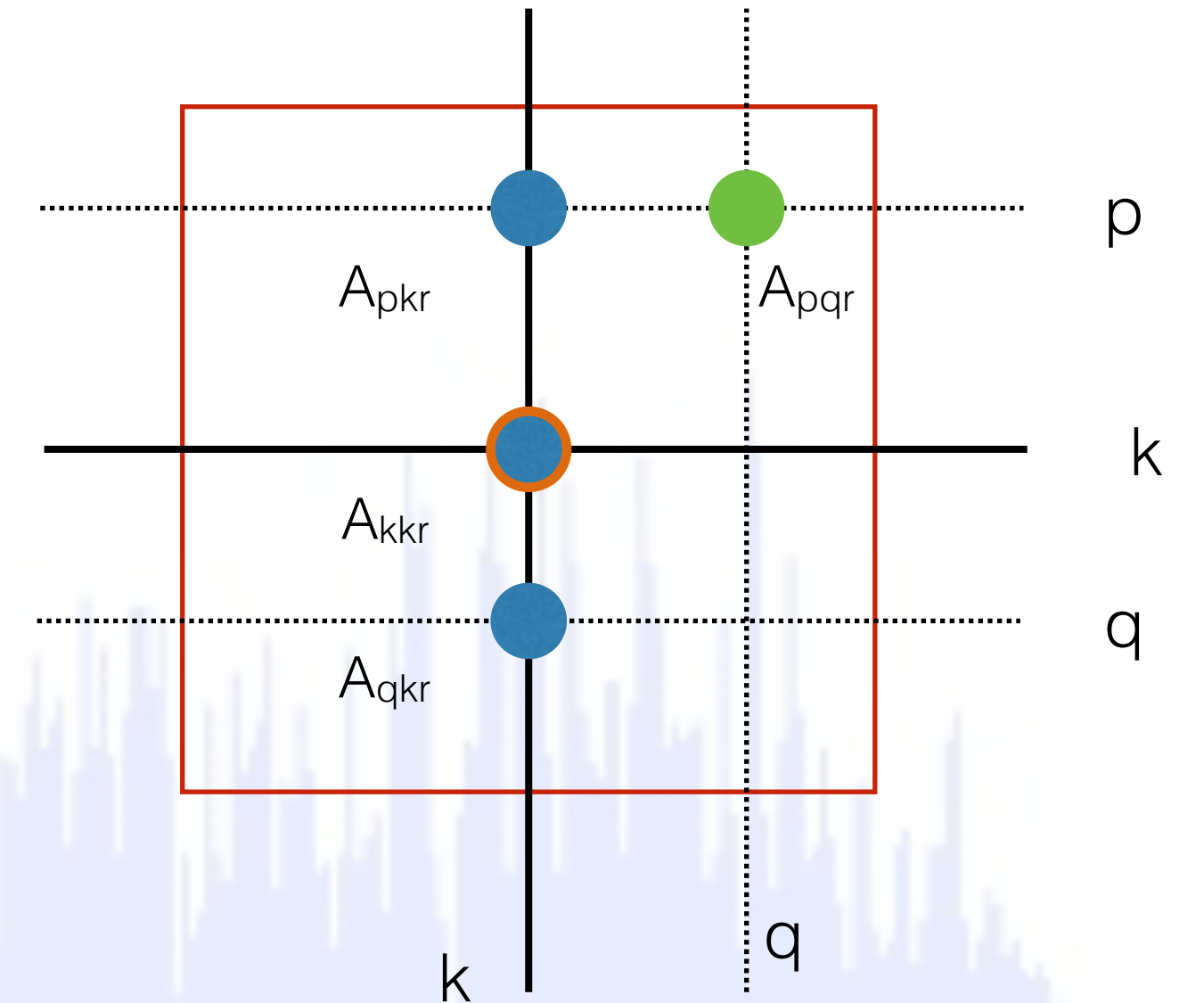
$$A_{pqr} = Q_r \phi_{pr} \phi_{qr}$$

il generico elemento della matrice dei residui..

$$A_{pqr} = \frac{A_{kpr} A_{kqr}}{A_{kkk}} = \frac{Q_r \phi_{kr} \phi_{pr} Q_r \phi_{kr} \phi_{qr}}{Q_r \phi_{kr} \phi_{kr}}$$

..e la formula per sintetizzare tutti gli altri elementi, anche fuori dalla colonna k

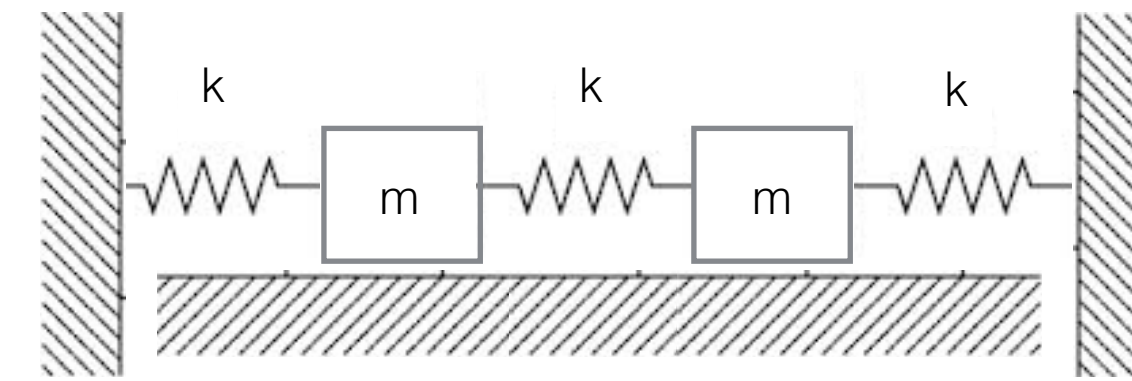
matrice Ar



NB è fondamentale avere a disposizione l'elemento diretto Akkr

NB2 Con una colonna (o riga) completa di Ar è possibile sintetizzare tutti gli elementi mancanti!

Esempio di rappresentazione delle FRF



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

equazioni del moto

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix}$$

matrice di rigidezza dinamica

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} & -(k_{21} - \omega^2 m_{21}) \\ -(k_{12} - \omega^2 m_{12}) & k_{11} - \omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21})}$$

matrice di risposta in frequenza

$$(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21}) = \\ (j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)$$

polinomio caratteristico e
poli del sistema

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_{22} - \omega^2 m_{22}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(\omega) = H_{21}(\omega) = \frac{k_{12} - \omega^2 m_{12}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

funzioni di risposta
(rapporto di polinomi)

$$H_{22}(\omega) = \frac{k_{11} - \omega^2 m_{11}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

Concentriamo l'attenzione su H_{11} e vediamo la rappresentazione a frazioni parziali

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_{22} - \omega^2 m_{22}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$= \frac{c_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{c_2}{(j\omega - \lambda_2)} + \frac{c_3}{(j\omega - \lambda_2^*)} + \frac{c_4}{(j\omega - \lambda_1^*)}$$

$$c_1 = \frac{k_{22} - \lambda_1^2 m_{22}}{(\lambda_1 - \lambda_1^*)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2^*)} = A_{111} \quad c_2 = \frac{k_{22} - \lambda_1^{*2} m_{22}}{(\lambda_1^* - \lambda_1)(\lambda_1^* - \lambda_2)(\lambda_1^* - \lambda_2^*)} = A_{111}^*$$

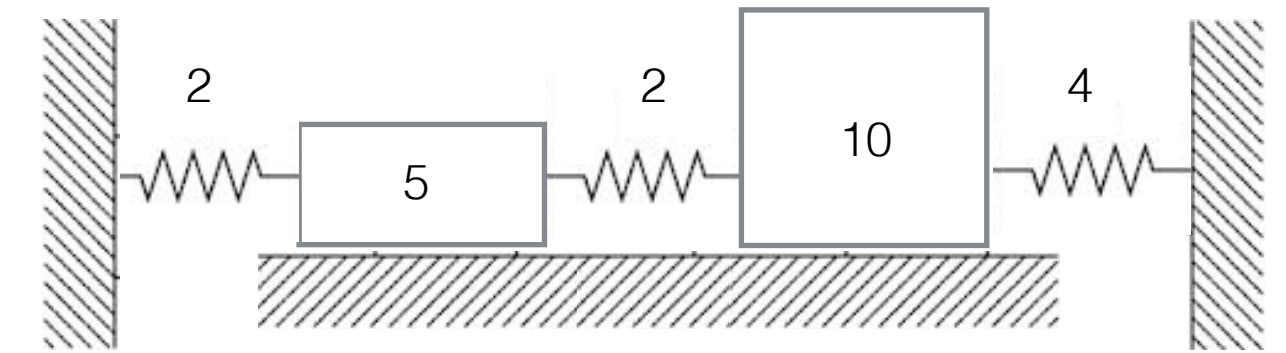
$$c_3 = \frac{k_{22} - \lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1^*)(\lambda_2 - \lambda_2^*)} = A_{112} \quad c_4 = \frac{k_{22} - \lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2^* - \lambda_1)(\lambda_2^* - \lambda_1^*)(\lambda_2^* - \lambda_2)} = A_{112}^*$$

per calcolare c_1
moltiplico tutto per $(j\omega - \lambda_1)$
e valuto il risultato per $j\omega = \lambda_1$

Analogamente per gli altri c_i e per le altre FRF,.. vale sempre la simmetria, non servirà calcolare tutti i residui!!

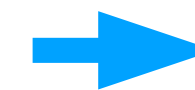
Esempio di calcolo delle FRF, senza, con smorzamento proporzionale, con smorzamento non proporzionale

$$[m] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{matrici del sistema}$$



$$\left[\left[\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \{0\} \quad \text{problema autovalori/autovettori}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$



$$\begin{aligned} & \left[[k] + s^2 [m] \right] = \{0\} \\ & \left[[m]^{-1} [k] + s^2 [I] \right] = \{0\} \\ & \left[[k]^{-1} [m] + \frac{1}{s^2} [I] \right] = \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \text{ci interessa la soluzione non banale}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} \right) \left(2 + \frac{1}{s^2} \right) - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{equazione caratteristica}$$

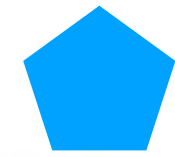
$$\alpha = \frac{1}{s^2} \quad \alpha^2 + \frac{7}{2} \alpha + \frac{5}{2} = 0 \quad \alpha_{1,2} = \begin{cases} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} \pm j\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \pm j \end{cases}$$

poli del sistema,
smorzamento nullo:
puramente immaginari, a due a due complessi coniugati

$$\lambda_1 = \pm j\sqrt{\frac{2}{5}}$$

sostituisco in



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \{0\}$$

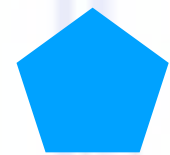
$$-X_1 + X_2 = \{0\}$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

trovo gli autovettori:

$$\lambda_1 = \pm j$$

sostituisco in



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \{0\}$$

$$\frac{1}{2}X_1 + X_2 = \{0\}$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{1}{2}X_1 \end{Bmatrix}$$

definisco la matrice modale: $[\phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$ posso scalarla in vari modi..

..matrice di massa modale unitaria

$$[\phi]^T [m][\phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

Trovo due equazioni

$$5X_1^2 + 10X_1^2 = 1$$

$$5X_1^2 + \frac{5}{2}X_1^2 = 1$$

e due termini di scalaggio
(modo1 e modo2)

$$X_{11} = \pm \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$X_{12} = \pm \sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}$$

matrice modale scalata,
che permette
la trasformazione modale
e il disaccoppiamento
delle equazioni del moto

$$\{x\} = [\Phi]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi]^T [m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [k][\Phi]\{q\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \{0\}$$

con le forzanti cosa cambierebbe?
>..?

Calcolo delle FRF dalla matrice di rigidezza dinamica:

$$[Z(s)] = \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}$$

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 6 & 2 \\ 2 & 5s^2 + 4 \end{bmatrix}}{(5s^2 + 4)(10s^2 + 6) - 4}$$

conosco già i poli \rightarrow

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 6 & 2 \\ 2 & 5s^2 + 4 \end{bmatrix}}{50 \left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) (s - j)(s + j)}$$

con la rappresentazione a frazioni parziali

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2 + 6}{50 \left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) (s - j)(s + j)} \rightarrow H_{11}(s) = \frac{A_{111}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{A_{111}^*}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{A_{112}}{(s - j)} + \frac{A_{112}^*}{(s + j)}$$

$$A_{111} = -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \quad A_{111}^* = \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \quad A_{112} = -\frac{j}{15} \quad A_{112}^* = \frac{j}{15}$$

Sviluppando tutte le funzioni ed i residui

..simmetria, poli & residui complessi coniugati..

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j}{15} & \frac{j}{30} \\ \frac{j}{30} & -\frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s-j)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j}{15} & -\frac{j}{30} \\ -\frac{j}{30} & \frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s+j)}$$

$$Q_1 = \pm j \frac{\sqrt{2/5}}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$Q_1 = \pm \frac{j}{60} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

..ritroviamo la stessa matrice modale

$$[\phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

..con smorzamento proporzionale

$$[c] = \frac{1}{2}[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

La trasformazione modale, disaccoppia anche questa matrice

$$[\Phi]^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} [\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \begin{Bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{Bmatrix}$$

Supponendo ci sia una forzante..
I modi sono gli stessi che nel caso non smorzato,
ma cambiano le funzioni di risposta in frequenza!!!

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 2s + 4 & -s - 2 \\ -s - 2 & 10s^2 + 3s + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 2s + 4 & -s - 2 \\ -s - 2 & 10s^2 + 3s + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 3s + 6 & s + 2 \\ s + 2 & 5s^2 + 2s + 4 \end{bmatrix}}{50s^4 + 35s^3 + 75s^2 + 20s + 20}$$

Termini dispari > poli complessi
(spostati verso sinistra nel piano di Laplace)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} -\frac{1}{10} \pm j\frac{\sqrt{39}}{10} \\ -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

Calcoliamo le FRF (rapporto polinomi / frazioni parziali)

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2 + 3s + 6}{50(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)} \quad H_{11}(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1)} + \frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{-j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2)} + \frac{j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(s) = \frac{s + 2}{50(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)} \quad H_{12}(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1)} + \frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2)} + \frac{-j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2^*)}$$

Le forme modali non cambiano!

$$Q_1 = \pm j\frac{\sqrt{39}}{117} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad Q_1 = \pm \frac{j\sqrt{15}}{225} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

..con smorzamento non proporzionale

$$[c] = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{phi}' * c * \text{phi}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 45 \end{bmatrix}$$

La trasformazione modale
già vista non disaccoppia le matrici del sistema!

Bisogna utilizzare l'espansione di Duncan Collar

Cambiano ulteriormente le FRF

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 6s + 4 & -4s - 2 \\ -4s - 2 & 10s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 6s + 4 & -4s - 2 \\ -4s - 2 & 10s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 5s + 6 & 4s + 2 \\ 4s + 2 & 5s^2 + 6s + 4 \end{bmatrix}}{50s^4 + 85s^3 + 84s^2 + 40s + 20}$$

e quindi i poli, i residui e le forme modali.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.095 + j0.629 \\ \lambda_1^* = -0.095 - j0.629 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -0.754 + j0.645 \\ \lambda_2^* = -0.754 - j0.645 \end{cases}$$

$$H_{22}(s) = \frac{0.0037 - j0.0587}{(s - \lambda_1)} + \frac{0.0037 + j0.0587}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{0.0037 - j0.0163}{(s - \lambda_2)} + \frac{0.0037 + j0.0163}{(s - \lambda_2^*)}$$

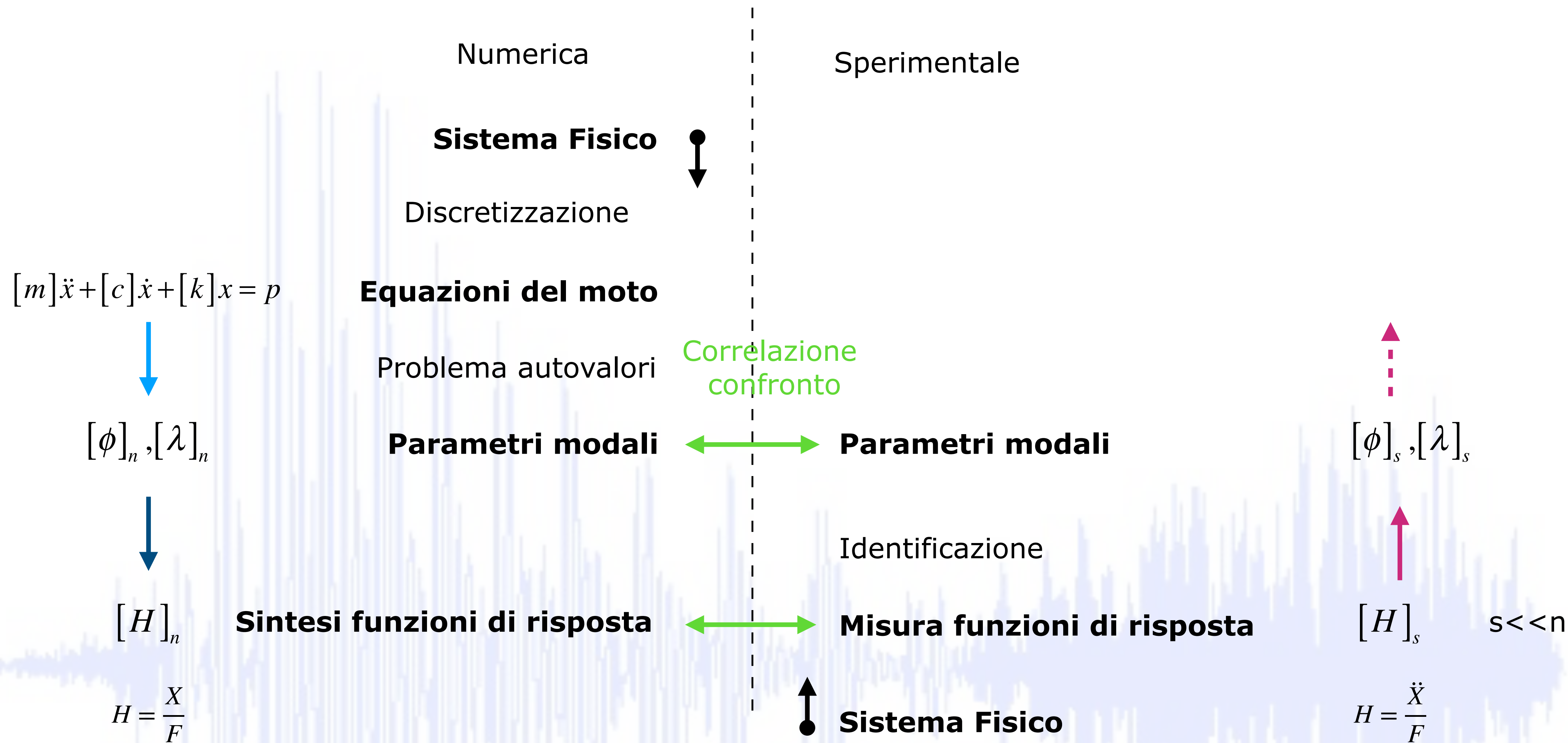
$$\text{per } \lambda_1 \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.0034 - j0.0501 \\ 0.0037 - j0.0587 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0502 \quad -93.96^\circ \\ 0.0588 \quad -86.93^\circ \end{Bmatrix}$$

Le forme modali diventano complesse!
I gdl non raggiungono lo spostamento massimo in fase!

$$\text{per } \lambda_2 \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0034 + j0.0452 \\ 0.0037 - j0.0163 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0454 \quad +94.30^\circ \\ 0.0167 \quad -77.21^\circ \end{Bmatrix}$$

(c'è chi arriva prima e chi arriva dopo in funzione dello smorzamento)

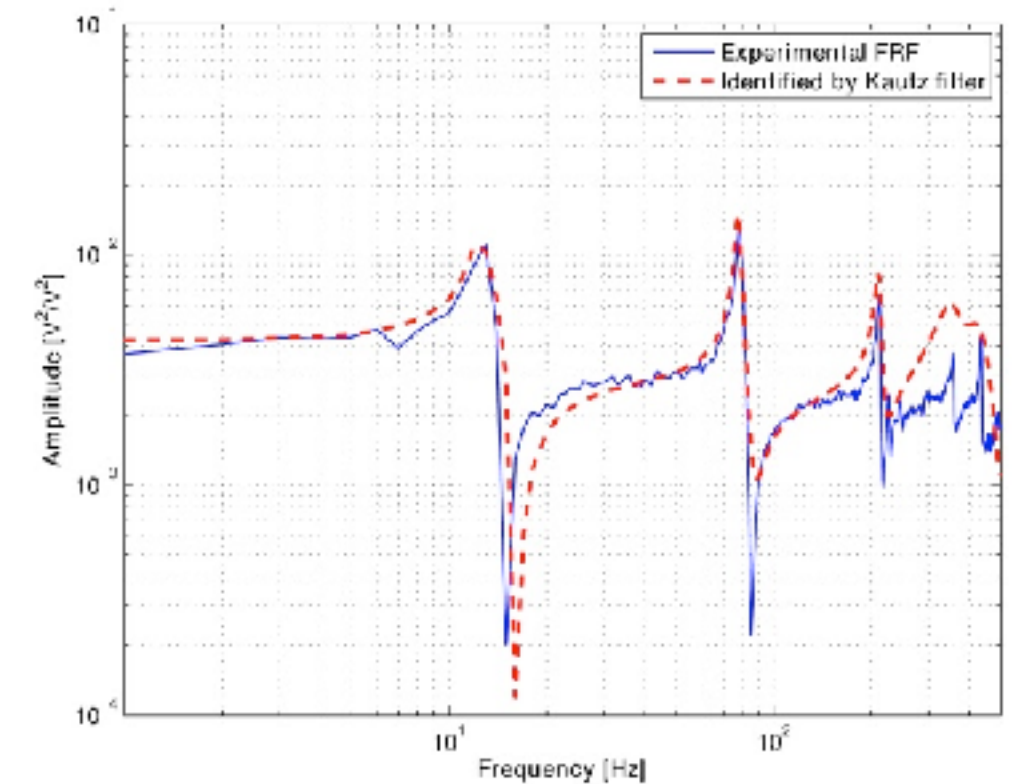
Analisi modale numerica e sperimentale



E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

L'analisi modale sperimentale parte dalla misura delle FRF sul sistema fisico (vedremo dettagli nella parte 4 Strumenti e metodi sperimentali)
Si deve misurare una colonna (o una riga) completa della matrice H

Tramite il processo di identificazione si ricavano i parametri modali in modo tale che FRF da queste sintetizzate siano le più prossime possibili a quelle misurate usando la stessa rappresentazione con i residui già vista



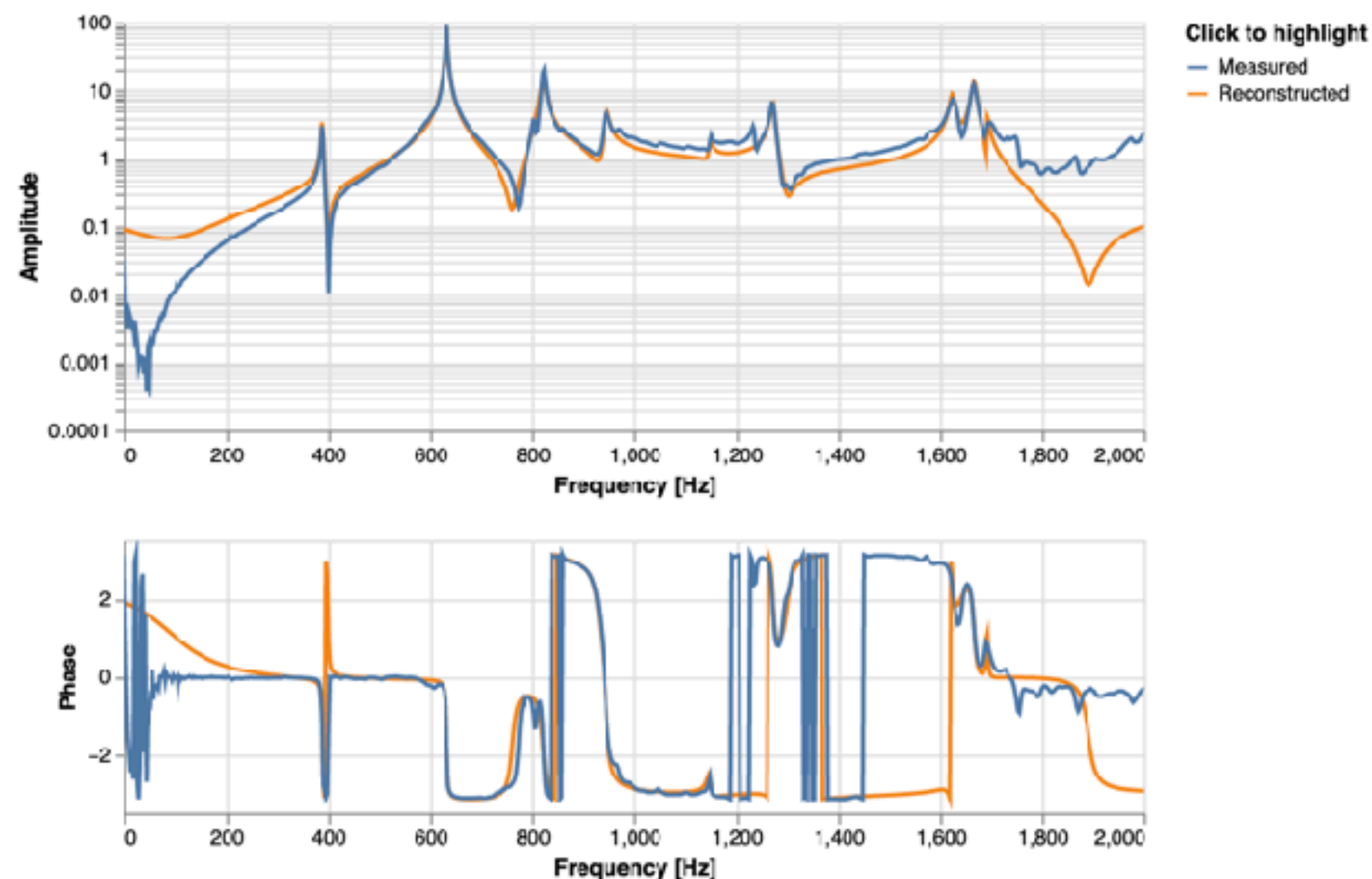
$$[H(\omega)]_s = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

$$[H(j\omega)] = [V][j\omega[I] - [\lambda]]^{-1}[L]$$

matrice modale $[V] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \dots & \{\phi\}_N \end{bmatrix}$

matrice di partecipazione modale $[L] = [Q][V]^T$

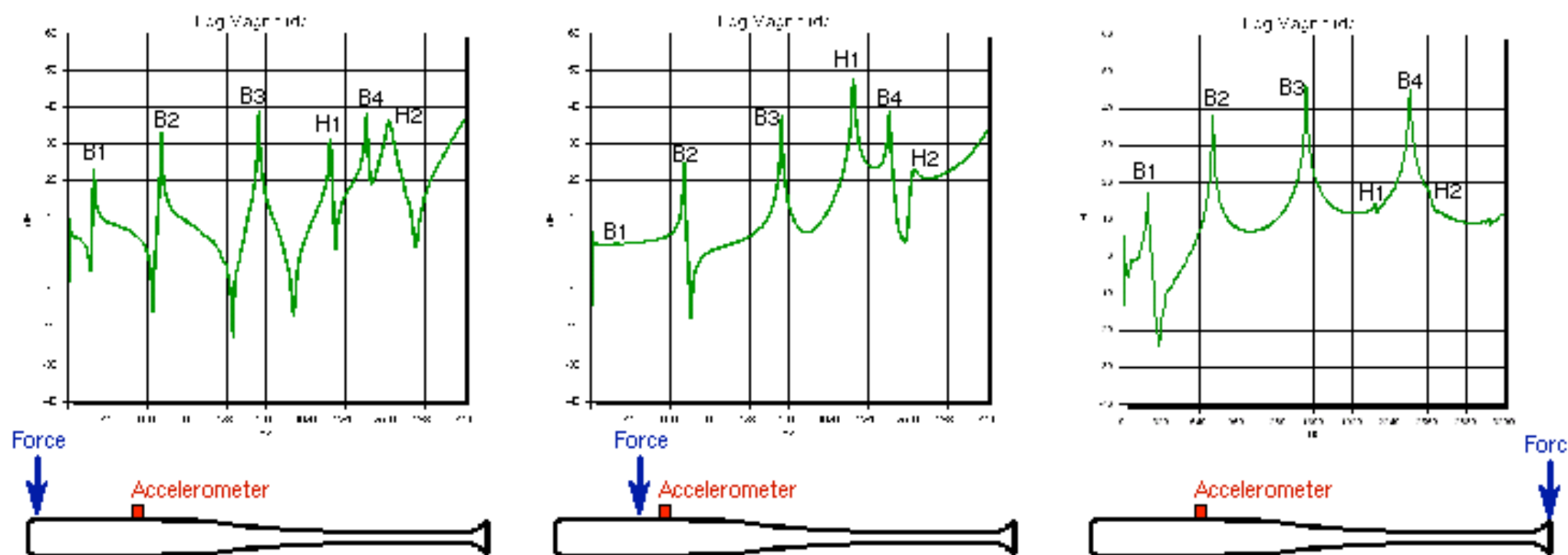
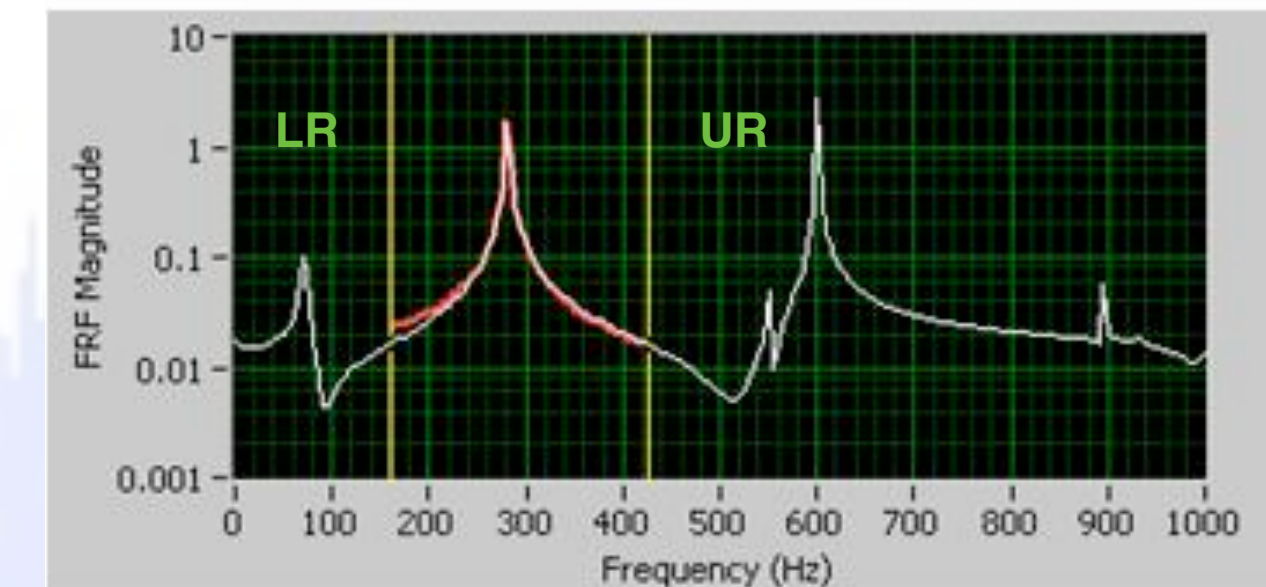
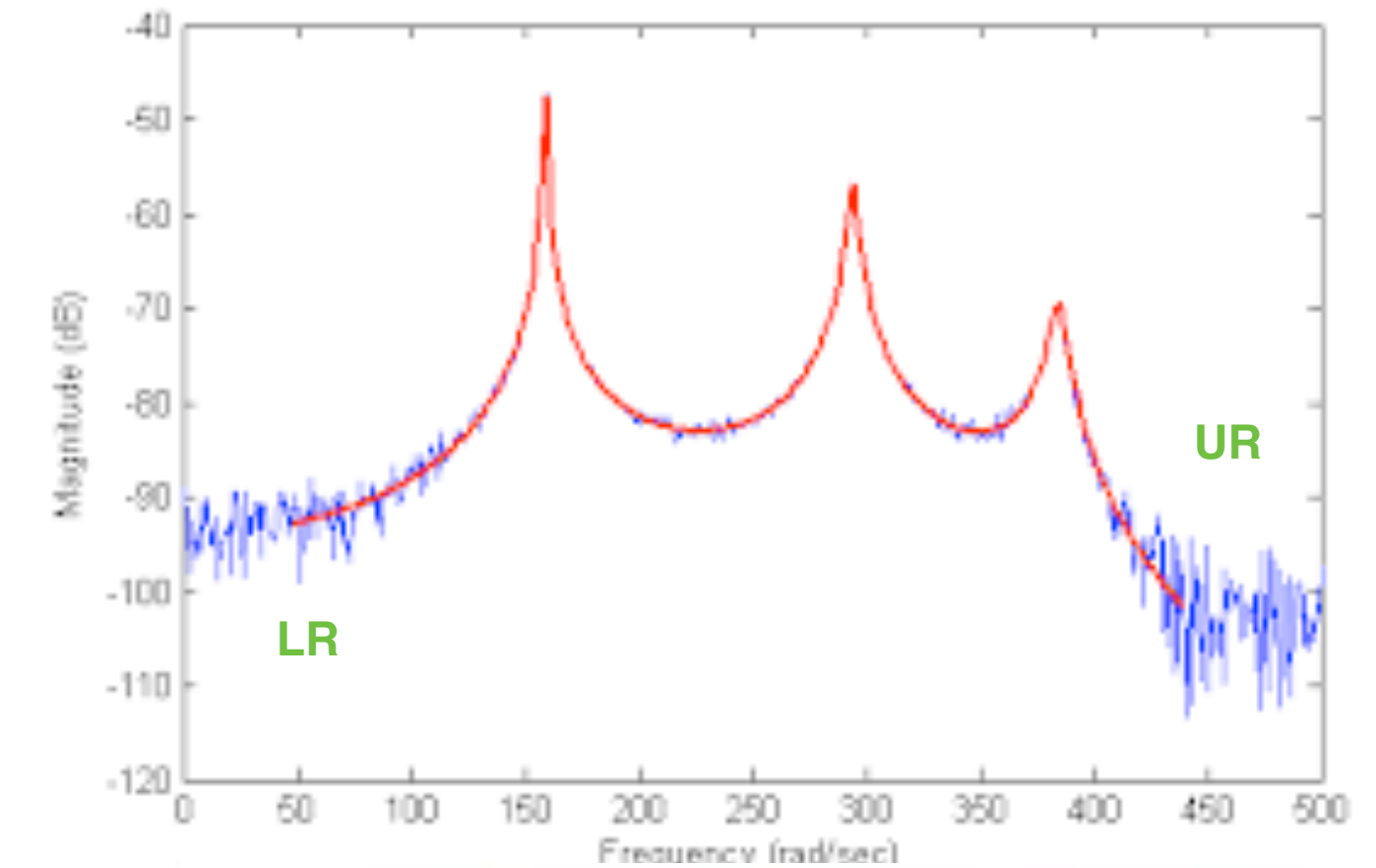


Visto che le strutture fisiche hanno infiniti modi, teoricamente bisognerebbe identificarli nella banda in frequenza tra 0 e ∞ .. E' impossibile.. ci si limita ad una banda finita, compensando i contributi dei modi fuori banda con dei residui particolari

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)} + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2}$$

$[UR]$ Upper residual - costante

$\frac{[LR]}{\omega^2}$ Lower residual - decrescente con la frequenza



Qualcuno identifica l'errore?

Metodi di identificazione si classificano:

SDOF vs MDOF: un solo modo o più modi nella banda d'interesse

LOCALI vs GLOBALI: non tengono o tengono conto del fatto che
i poli non dipendono da i, j , p modi non dipendono dal punto di eccitazione j ,
i coefficienti di partecipazione non dipendono dal punto di misura i

S excitation vs M excitation: si considera una a più colonne contemporaneamente

MODALI vs DIRETTI: identificano i parametri modali o le matrici di m, c, k

REALI vs COMPLESSI: identificano forme modali reali o complesse

TEMPO vs FREQUENZA: identificano parametri modali dalle risposte all'impulso
o dalle risposte in frequenza ..schemino..

<https://www.mpihome.com/en/products/dynamic-signal-analysis/modal-analysis.html>

<http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/mspace.html>

<https://pyfbs.readthedocs.io/en/latest/index.html>

Utilizzo analisi modale

L'analisi modale è disponibile dalla fine degli anni '70.
Inizialmente era utilizzato solo per "vedere" come vibrava una struttura

Attualmente i parametri modali possono essere utilizzati per

pretest analysis

l'analisi di sensitività alle variazioni dei parametri fisici di un modello

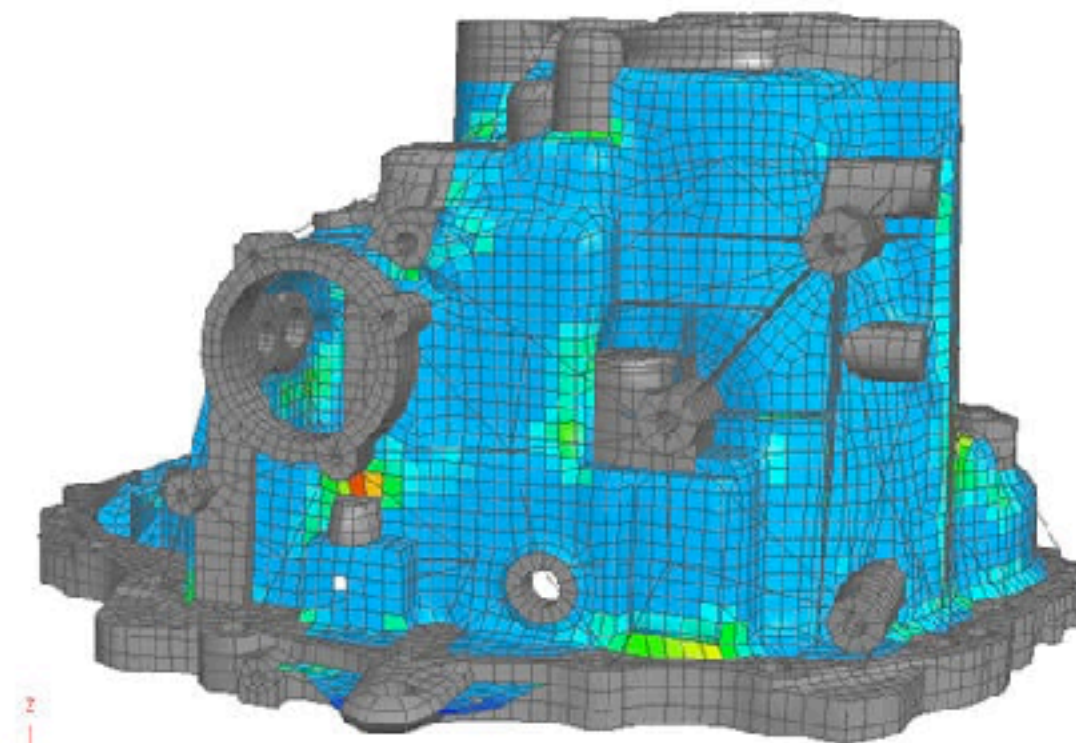
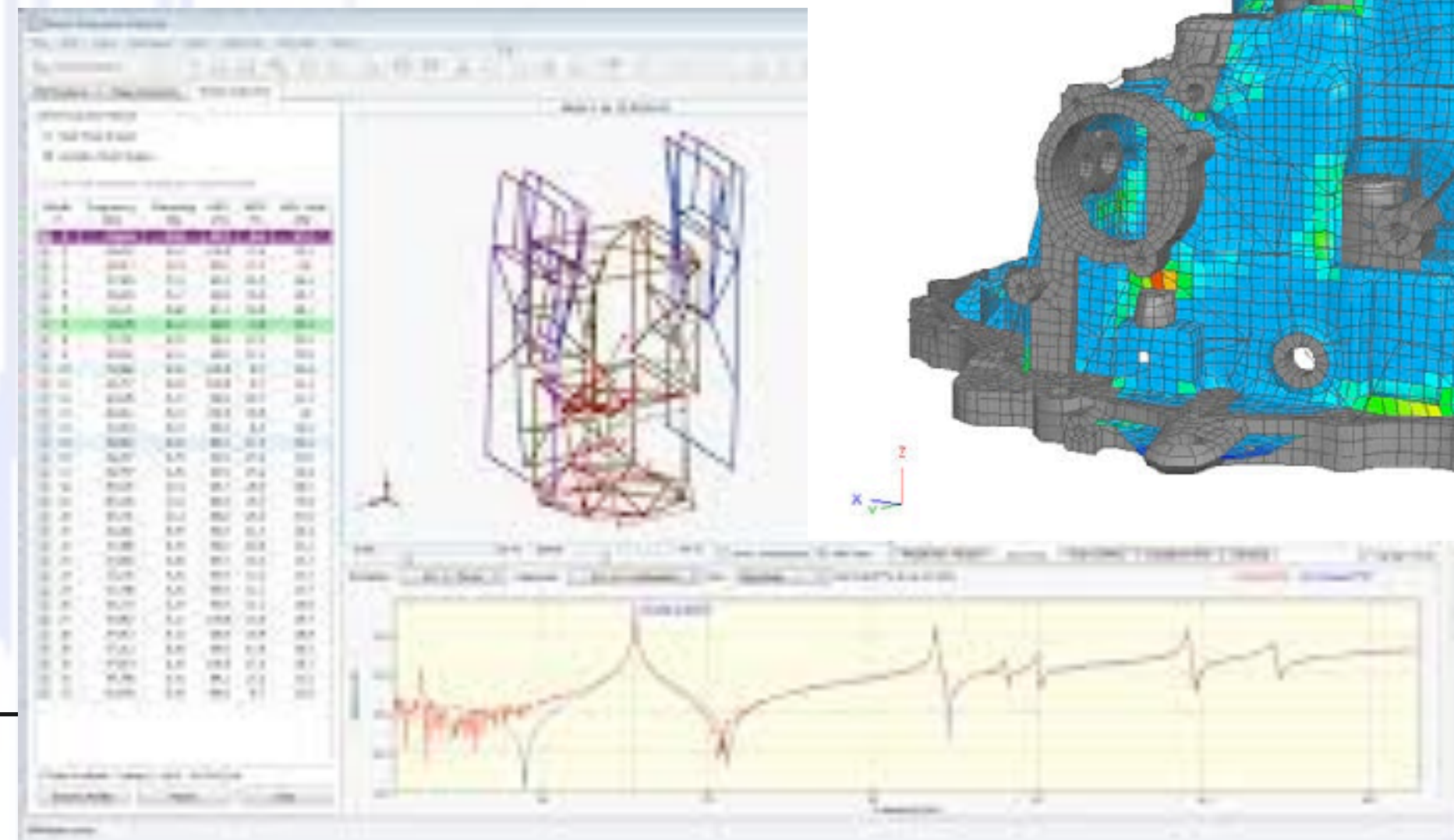
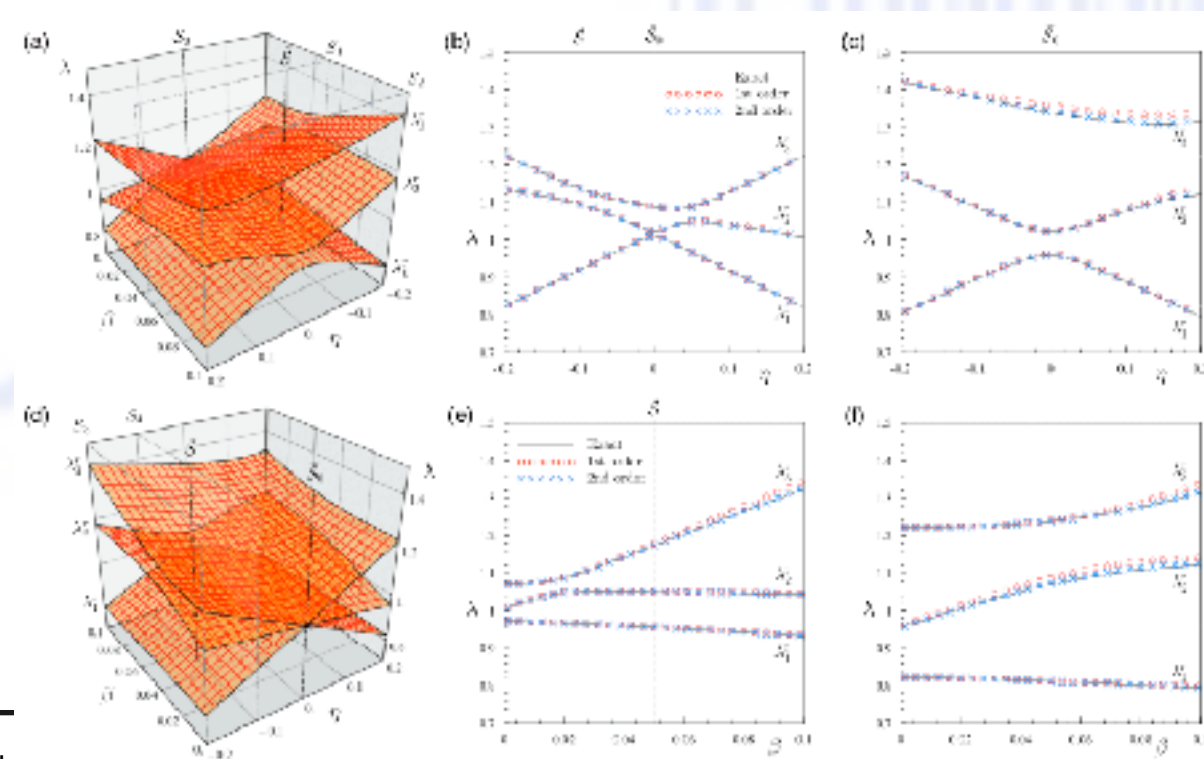
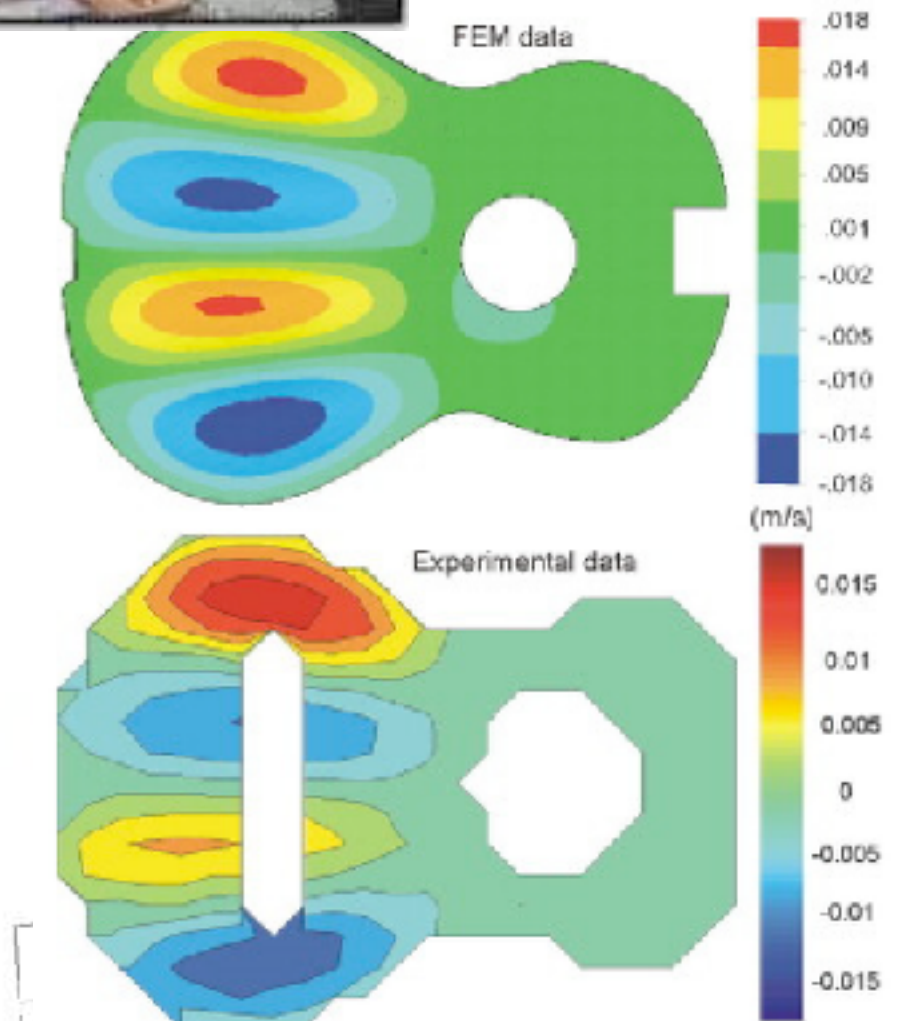
il calcolo della risposta forzata di un sistema

l'effetto di modifiche strutturali

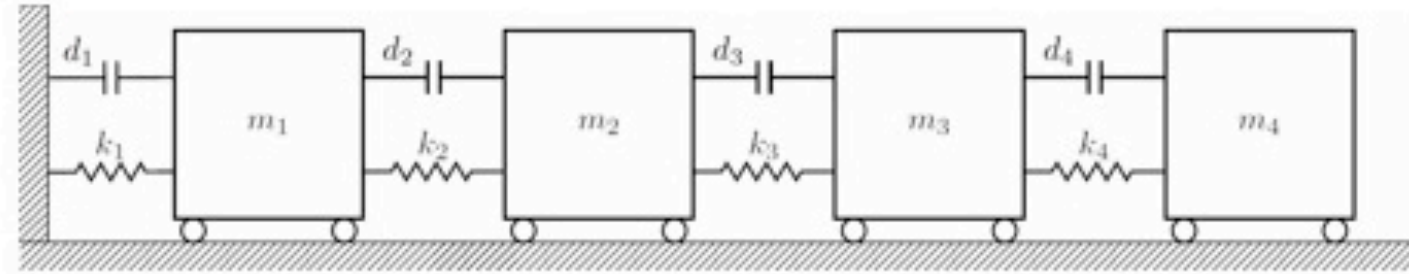
l'aggiornamento dei modelli numeri (model updating)

la sintesi della dinamica di componenti accoppiati

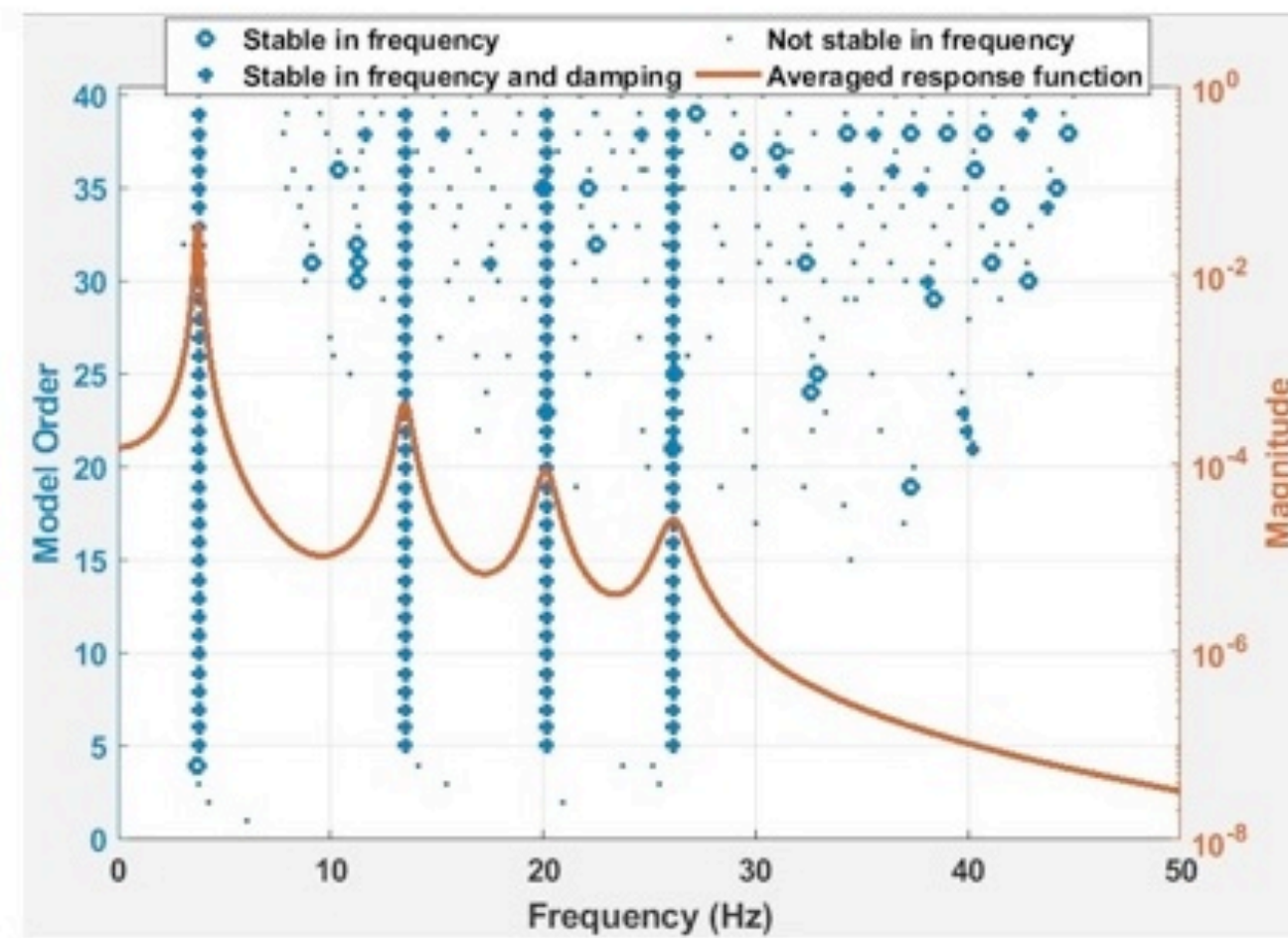
...



Analytical model



Defined matrix				Estimated matrix (0% noise)				Estimated matrix (1% noise)			
90.0	-55.0	0.0	0.0	90.0	-55.0	0.0	0.0	89.0	-53.7	-3.7	2.7
-55.0	125.0	-70.0	0.0	-55.0	125.0	-70.0	0.0	-52.2	124.3	-69.2	-1.3
0.0	-70.0	115.0	-45.0	0.0	-70.0	115.0	-45.0	-6.6	-66.9	117.9	-46.7
0.0	0.0	-45.0	45.0	0.0	0.0	-45.0	45.0	4.5	-3.0	-46.2	46.0



Model



Damping



Stabilization plot

Case study



8	-32	6	23	-43	-11	49	-55	49	-35	15	17
-34	-13	-38	3	-2	4	-16	5	-3	2	0	-1
7	-32	-12	-15	32	-18	6	10	-21	0	40	-6
21	2	-14	-18	18	-40	13	-30	4	-10	-79	-50
-39	-3	29	18	16	-17	8	4	8	-5	-36	30
-12	5	-12	-41	-12	20	-18	-17	-41	-3	15	2
51	-14	7	14	9	-21	-1	-20	-41	58	14	42
-62	6	11	-27	2	-16	-26	3	-21	6	22	-35
47	-4	-24	6	11	-49	-32	-19	-1	0	-5	5
-33	1	-1	-4	-6	-12	61	4	-4	30	-88	15
14	1	44	-71	-42	18	12	27	-9	-74	-7	4
19	-2	-8	-44	36	6	47	-29	4	23	7	-6

