

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 4  
analisi macchinario rotante

# Rotodinamica

La maggior parte delle macchine industriali ha organi rotanti!

La rotodinamica si occupa di macchine in cui una parte (rotore) ruota con un significativo momento angolare

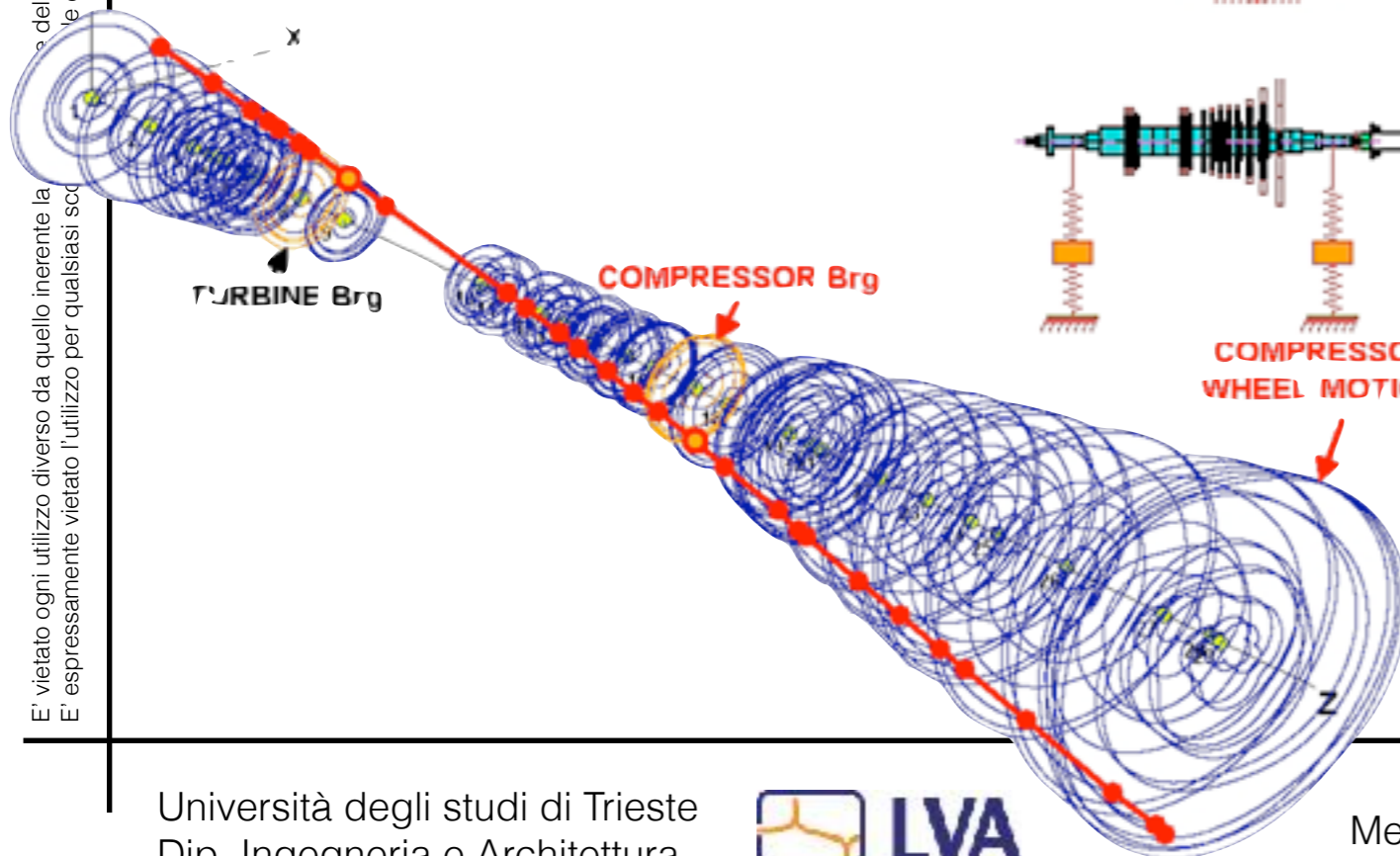
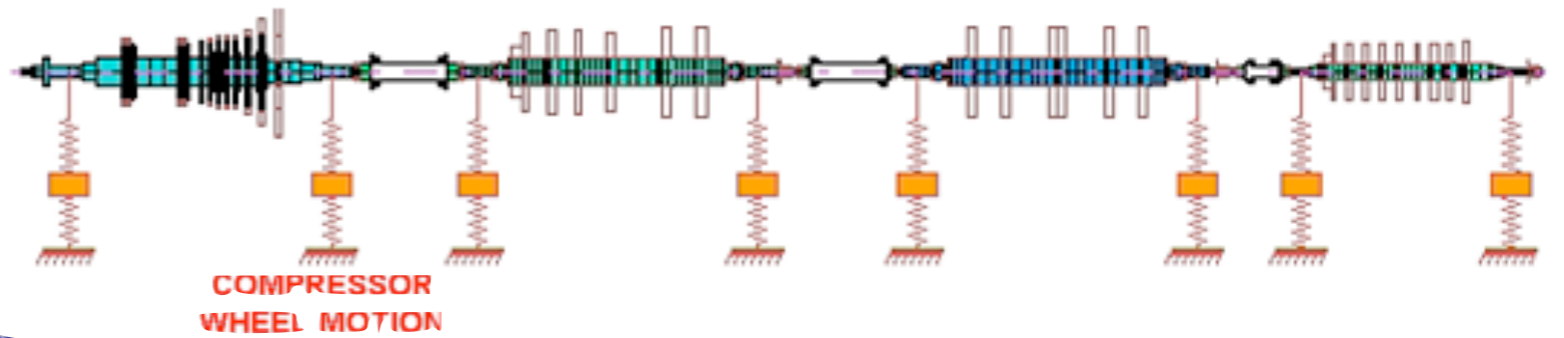
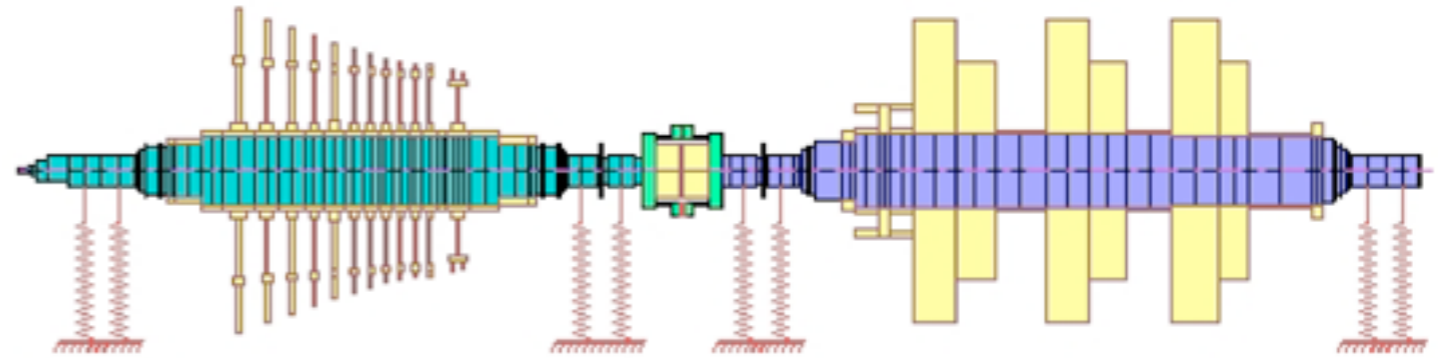
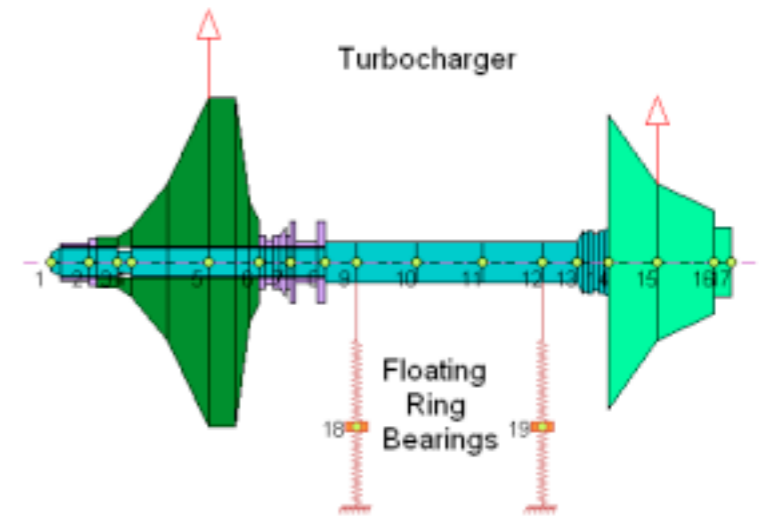
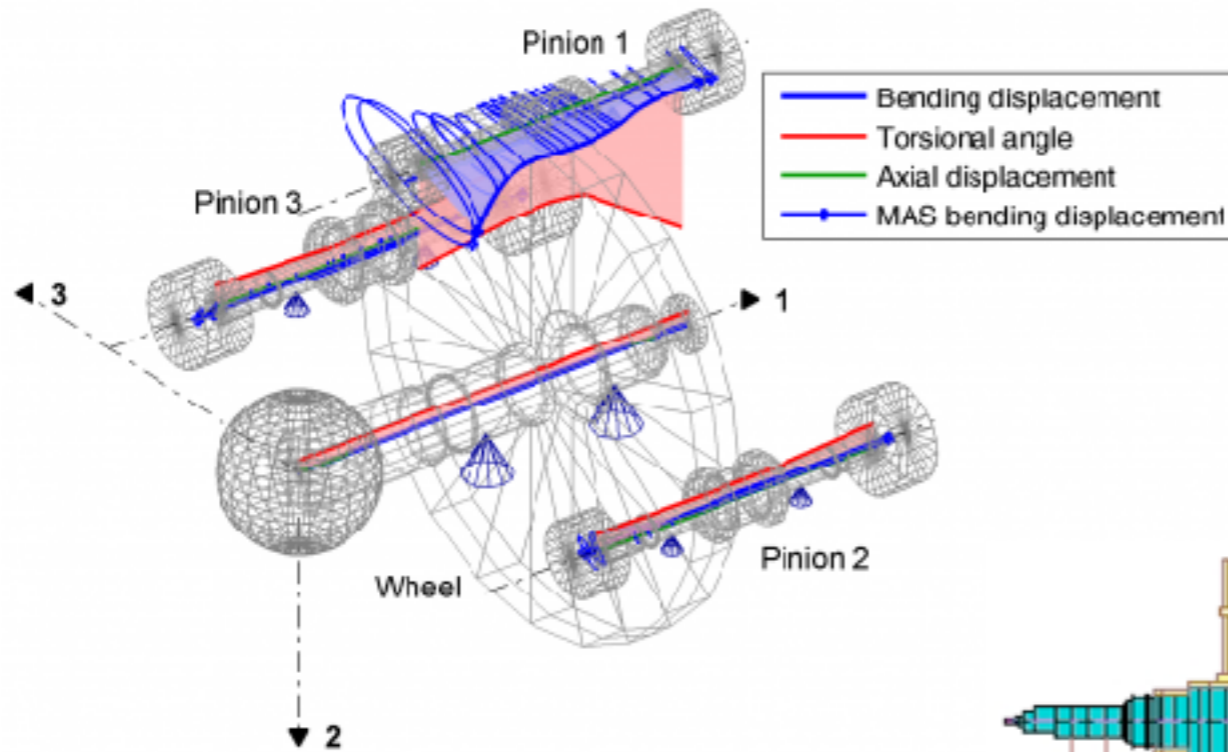
Lo studio della loro dinamica si differenzia in base alle dimensioni e dal regime di funzionamento

Si considerano acquisiti i concetti di squilibrio statico / dinamico / di coppia





# Rotodinamica



E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la  
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo  
e/o di lucro

## Rotodinamica - semplificazioni

Si definisce un ROTORE un corpo sospeso tramite una serie di cerniere cilindriche che gli permettono di ruotare liberamente attorno ad un asse! (statore..non si muove)

Si immagina che l'asse di rotazione sia fisso nello spazio (non è vero nelle macchine semoventi automobili, aerei, navi..)

Si immagina che il rotore sia equilibrato (asse rotazione coincide asse principale d'inerzia), o se non lo è lo squilibrio sia piccolo e le deformazioni relative piccole

Si immagina che il rotore sia assial-simmetrico (le equazioni son più semplici, e non serve lavorare con un sistema di rif solidale al rotore)

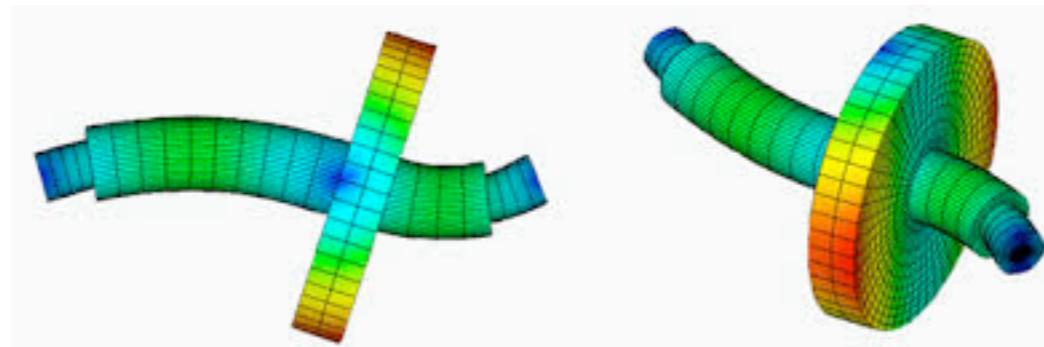
Si immagina che il rotore sia “mosso” dall'esterno



## Rotodinamica - classificazioni

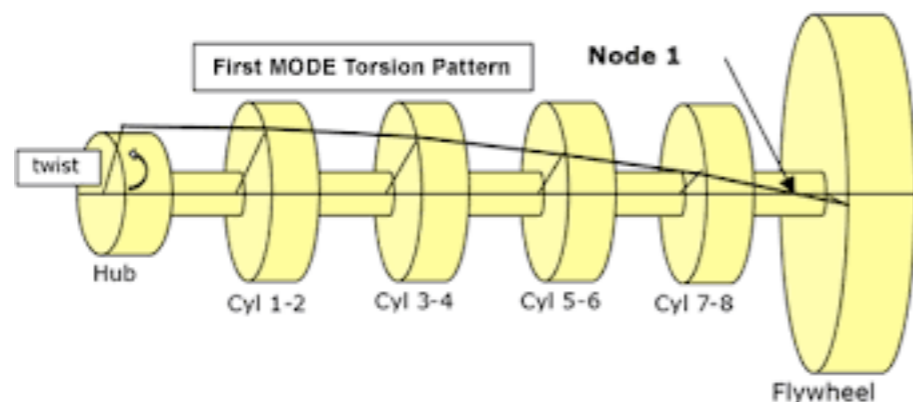
Vibrazioni Flessionali (-> risonanze flessionali)

l'asse del rotore si deforma su un piano (se non c'è smorzamento)



Vibrazioni Torsionali (-> risonanze torsionali)

l'asse del rotore resta coincidente a quello del sistema indeformato



..bisogna considerare entrambi i casi!!!

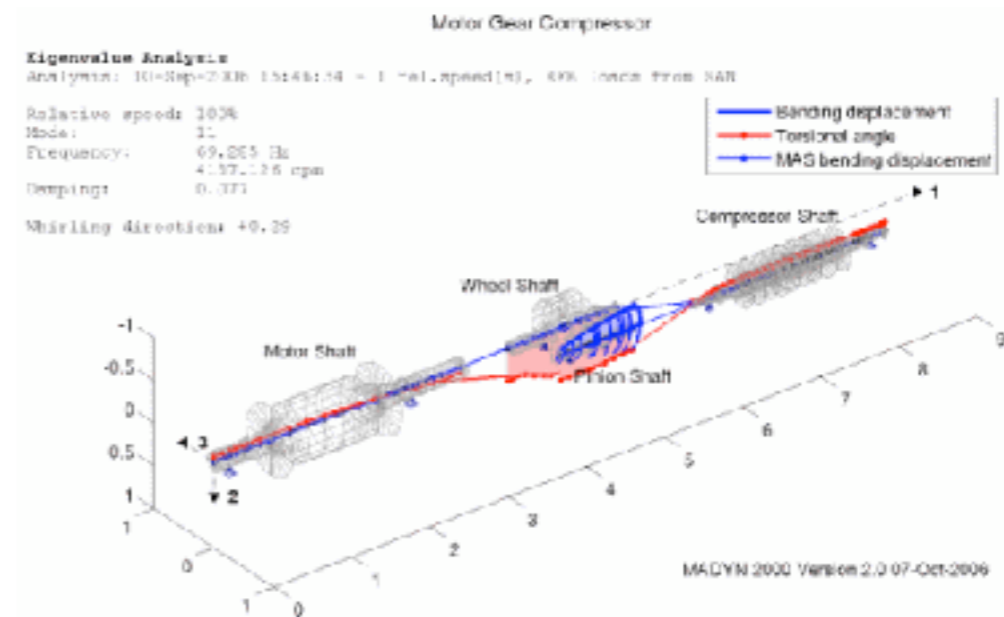
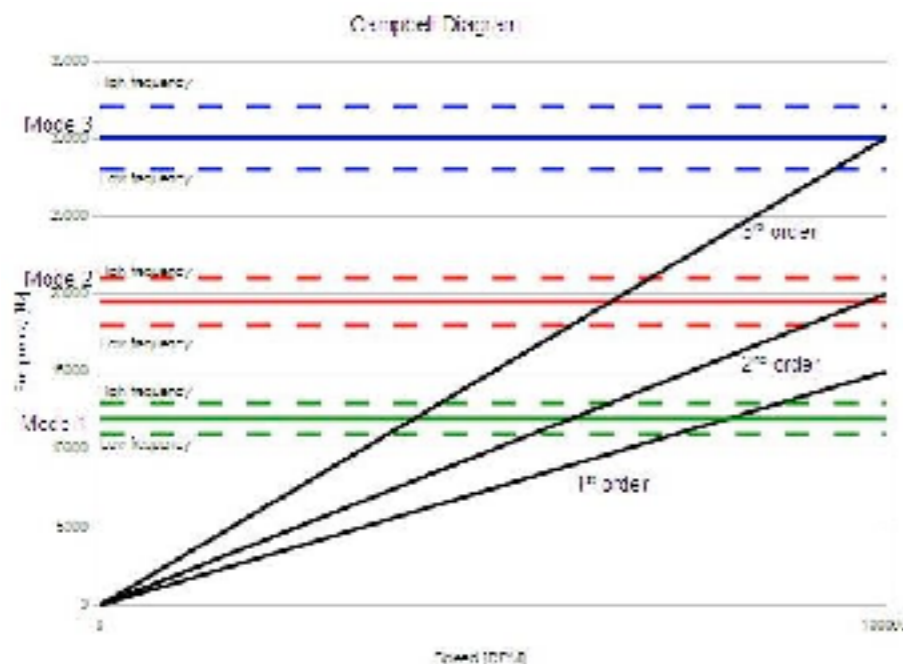
## Rotodinamica - risonanze e regimi di funzionamento

Si possono immaginare due condizioni di funzionamento:

- a velocità costante (o poco variabile es. alternatore elettrico)
- a velocità variabile (transitorio es. motore automobile)

Il rotore avrà un certo numero di frequenze naturali (flessionali - torsionali)..  
si deve fare in modo che il/i regimi di funzionamento, siano più lontani possibili  
da tali frequenze... (amplificazione delle deformate...vibrazioni...rotture)

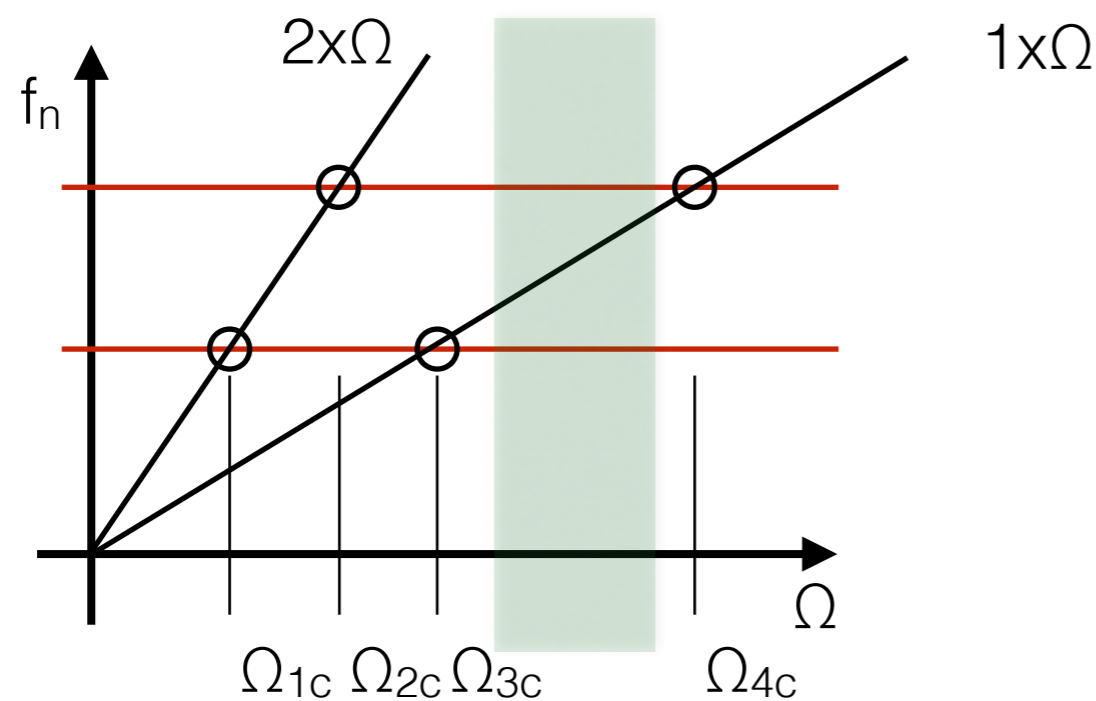
Si utilizza il diagramma di Campbell che rappresenta contemporaneamente  
la velocità del rotore e le sue risonanze (flessionali, torsionali, forward, backward,..)





## Rotodinamica - diagramma di Campbell

Nel diagramma di Campbell le rette orizzontali rappresentano le frequenze naturali del rotore (flessionali e/o torsionali)  
L'intersezione tra queste e le rette rappresentanti la velocità del rotore  $\Omega$  (o le sue armoniche) sono dette velocità critiche!

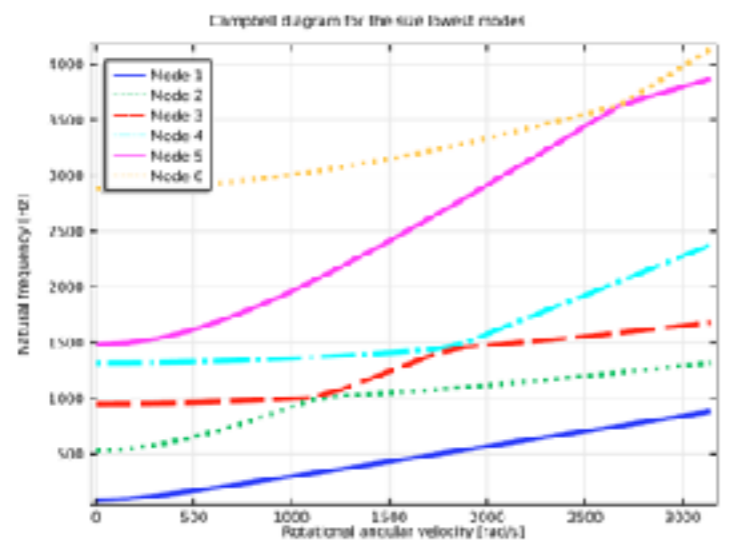


Non tutte le critiche creano problemi!  
dipende dal valore di smorzamento associato!

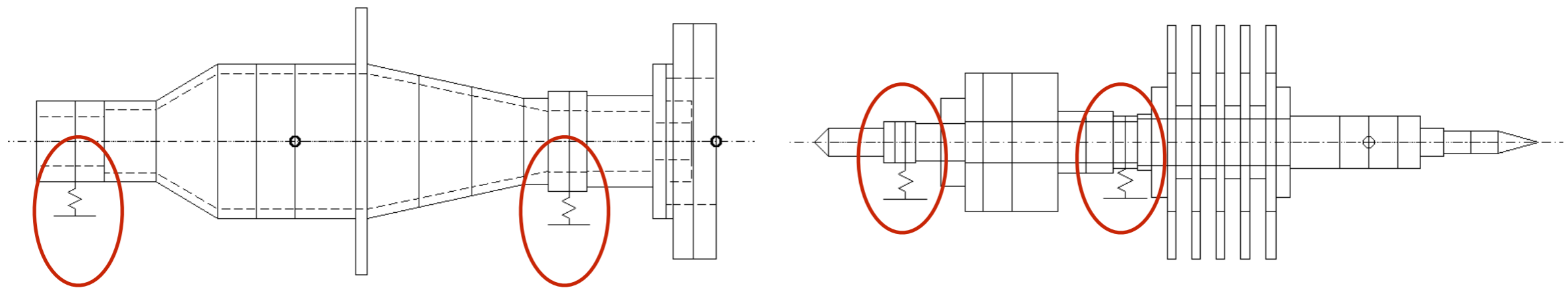
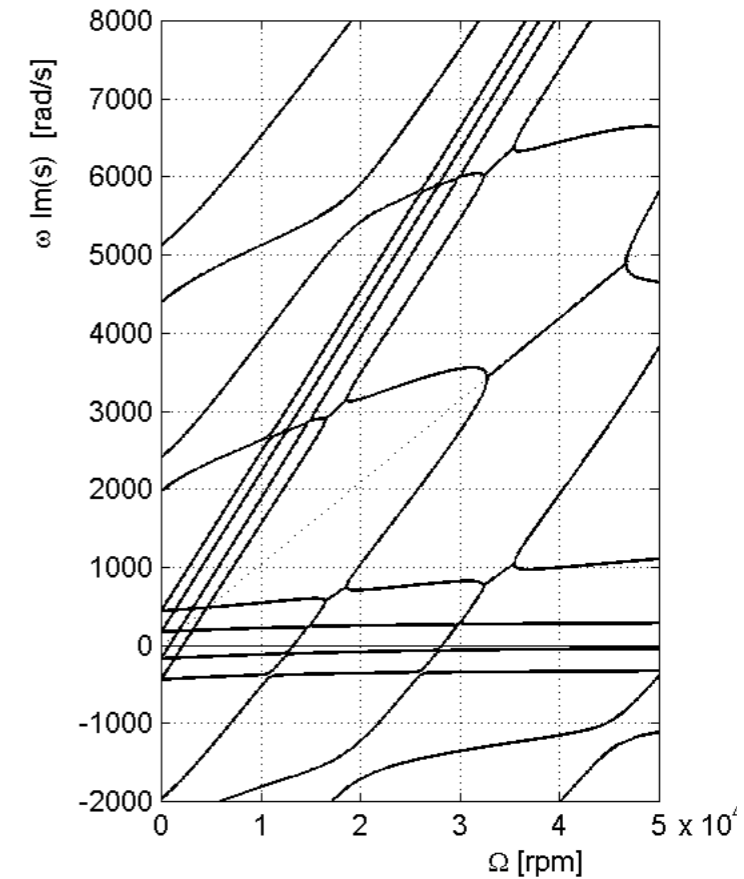
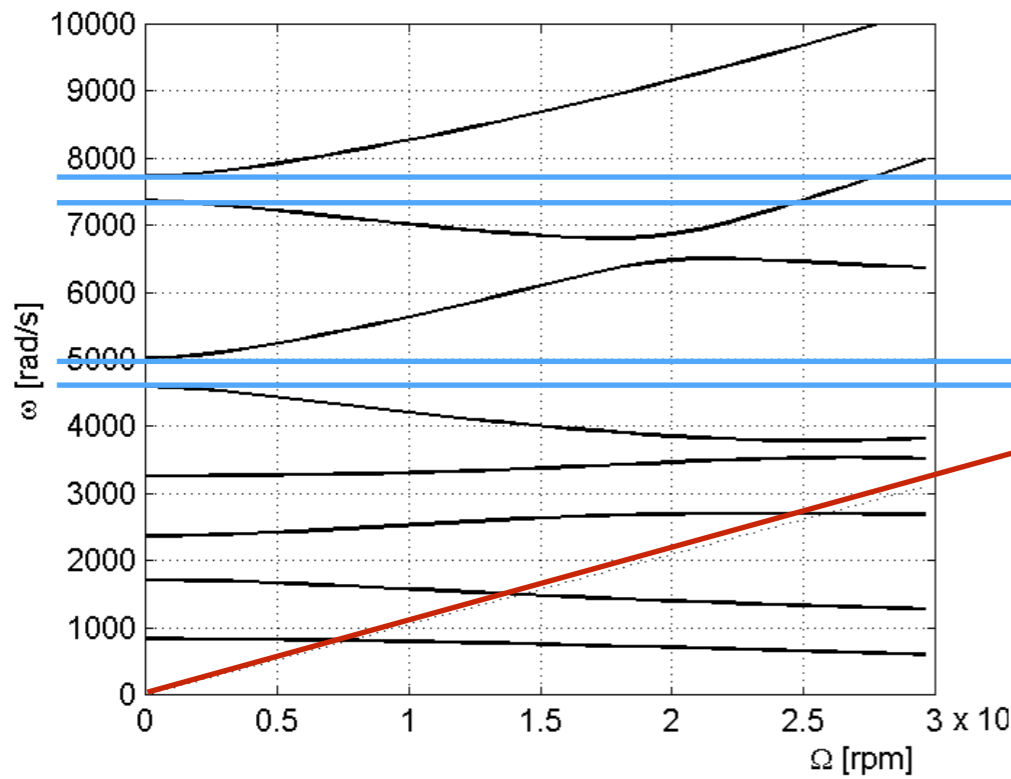
Nel grafico a sinistra si riporta il caso di freq. naturali  $f_n$  indipendenti da  $\Omega$ .  
(rette rosse)

Non è sempre così per effetto dei momenti giroscopici..

NB alle velocità critiche il rotore non vibra, ma ruota deformato!  
diventando la sorgente di eccitazione periodica della parte statica della macchina!!



# Rotodinamica - diagramma di Campbell



Gli effetti giroscopici influenzano il diagramma di Campbell in maniera significativa!

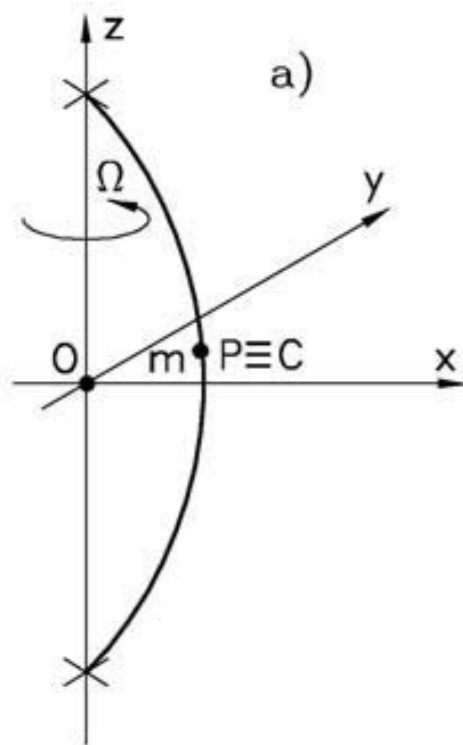


# Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

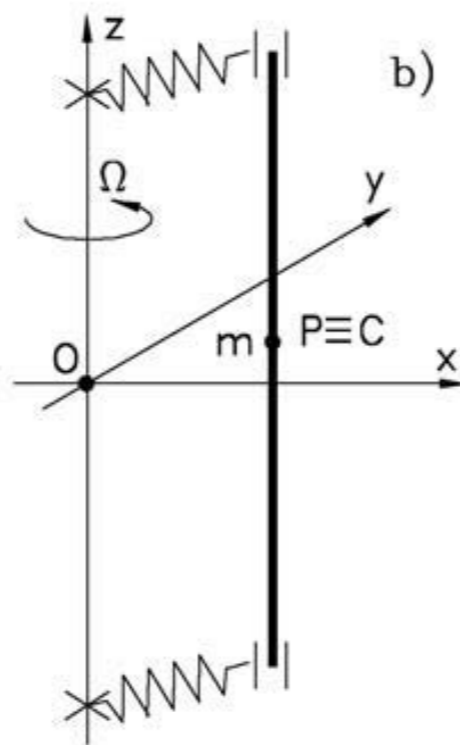
Il sistema più semplice per lo studio dei sistemi flessioni rotanti consiste in un punto materiale  $m$  collegato a un albero senza peso (Foppl 1895 - Jeffcott 1919)

Le forze di richiamo che si generano nel sistema possono dipendere da..

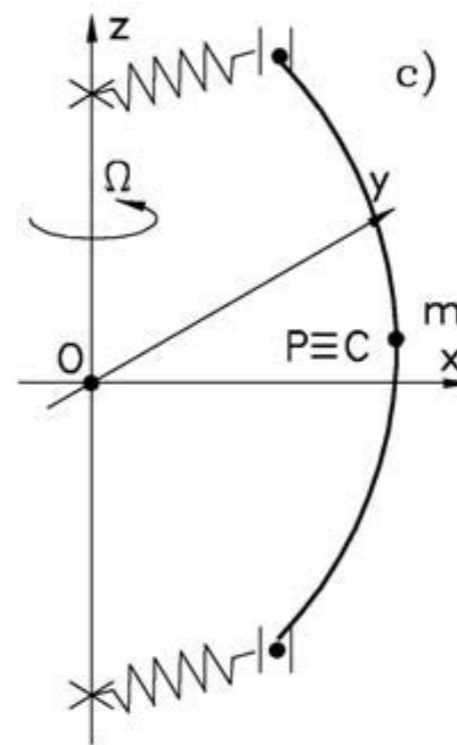
albero



supporti



albero+supporti

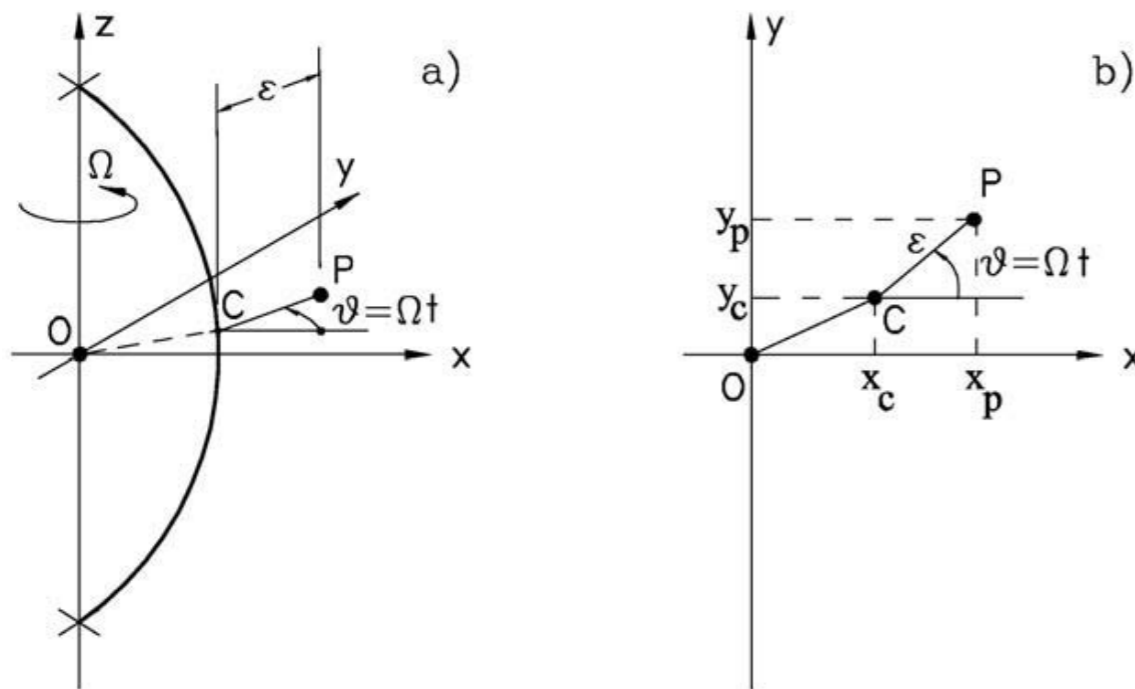


rotore  
equilibrato

Il caso rappresentato è troppo ideale, ci sarà sempre un po' di squilibrio residuo e la massa non giacerà sull'albero..

# Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

...l'eccentricità  $\epsilon$  della massa  $m$ , creerà lo squilibrio statico  $m\epsilon$  che influenzerà fortemente il sistema... in funzione della velocità di rotazione  $\Omega$  (costante per il momento)..



(si possono scrivere le equazioni del sistema in coordinate ortogonali o polari)

$$\mathbf{r}_P(t) = \begin{Bmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_C(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \\ y_C(t) + \epsilon \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_P(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \dot{y}_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_C(t) - \epsilon\Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_C(t) + \epsilon\Omega \cos(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

energia cinetica

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) = \\ &= \frac{1}{2}m \{ \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \epsilon^2\Omega^2 + 2\epsilon\Omega [-\dot{x}_C \sin(\Omega t) + \dot{y}_C \cos(\Omega t)] \} \end{aligned}$$

energia potenziale elastica

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}k (x_C^2 + y_C^2)$$



# Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

L'equazione di Lagrange..  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial q_i} = Q_i$

con le forze generalizzate..  $Q_i = \partial \delta \mathcal{L} / \partial \delta q_i$

ed il lavoro virtuale delle forze applicate..  $\delta \mathcal{L} = F_x \delta x_C + F_y \delta y_C$

Con le opportune derivate, nelle coordinate generalizzate si ottiene il sistema di equazioni del moto del rotore di Jeffcott ..

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C(t) + kx_C(t) = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) + F_x(t) , \\ m\ddot{y}_C(t) + ky_C(t) = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) + F_y(t) , \end{cases} \quad \bullet$$

Il sistema omogeneo da le vibrazioni libere del rotore di Jeffcott perfettamente equilibrato

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C(t) + kx_C(t) = 0 \\ m\ddot{y}_C(t) + ky_C(t) = 0 \end{cases} \quad \bullet$$

..equazioni uguali a un sistema SDOF!!

## Rotazione libera (senza squilibrio)...

Soluzione di tentativo...  $\begin{cases} x_C(t) = x_{C_0} e^{st} \\ y_C(t) = y_{C_0} e^{st} \end{cases}$

..derivata (2 volte) e sostituita nell'equazione ● ...

$$\begin{cases} (ms^2 x_{C_0} + kx_{C_0}) e^{st} = 0 \\ (ms^2 y_{C_0} + ky_{C_0}) e^{st} = 0 \end{cases} \quad \text{..si cerca la soluzione valida per ogni istante } t \text{ e diversa dalla soluzione di quiete..}$$

$$\begin{cases} ms^2 + k = 0 \\ ms^2 + k = 0 \end{cases} \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad \text{..2 soluzioni complesse e coniugate.... } \pm i\omega_n$$

$$\begin{cases} x_C(t) = X_1 e^{i\omega_n t} + X_2 e^{-i\omega_n t} \\ y_C(t) = Y_1 e^{i\omega_n t} + Y_2 e^{-i\omega_n t} \end{cases} \quad \text{..con } X_i \text{ e } Y_i \text{ dipendenti dalle condizioni iniziali sullo spostamento e sulla velocità....}$$

$$\begin{cases} x_C(t) = x_C(0) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \dot{x}_C(0) \sin(\omega_n t) \\ y_C(t) = y_C(0) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \dot{y}_C(0) \sin(\omega_n t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_C(t) = X \cos(\omega_n t - \phi_x) , \\ y_C(t) = Y \cos(\omega_n t - \phi_y) , \end{cases}$$

..soluzione generale....

$$\begin{aligned} x_C(0) &= X \cos \phi_x , & \dot{x}_C(0) &= \omega_n X \sin \phi_x \\ y_C(0) &= Y \cos \phi_y , & \dot{y}_C(0) &= \omega_n Y \sin \phi_y \end{aligned}$$

# Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

## Rotazione sbilanciata (con squilibrio)...

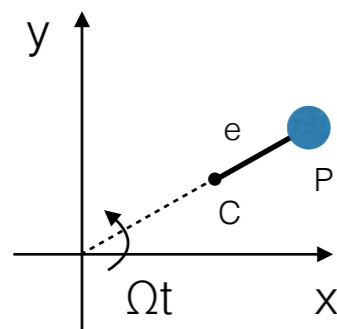
Risolviamo l'equazione  e per semplicità trascuriamo la forza esterna F...

..la soluzione particolare è.... 
$$\begin{cases} x_C(t) = x_{C_0} \cos(\Omega t) , \\ y_C(t) = y_{C_0} \sin(\Omega t) = y_{C_0} \cos(\Omega t + \pi/2) \end{cases}$$

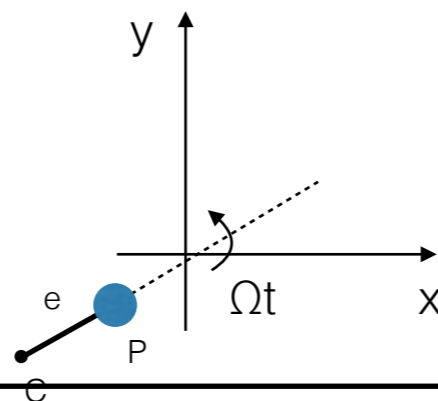
$$\begin{cases} (k - m\Omega^2) x_{C_0} = m\epsilon\Omega^2 \\ (k - m\Omega^2) y_{C_0} = m\epsilon\Omega^2 \end{cases}$$

..che porta allo spostamento .... 
$$x_{C_0} = y_{C_0} = \epsilon \frac{m\Omega^2}{k - m\Omega^2} = \epsilon \frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2 - \Omega^2} = \epsilon \frac{\frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2}}$$

..sub-critica..



..iper-critica..  
..autocentratura..

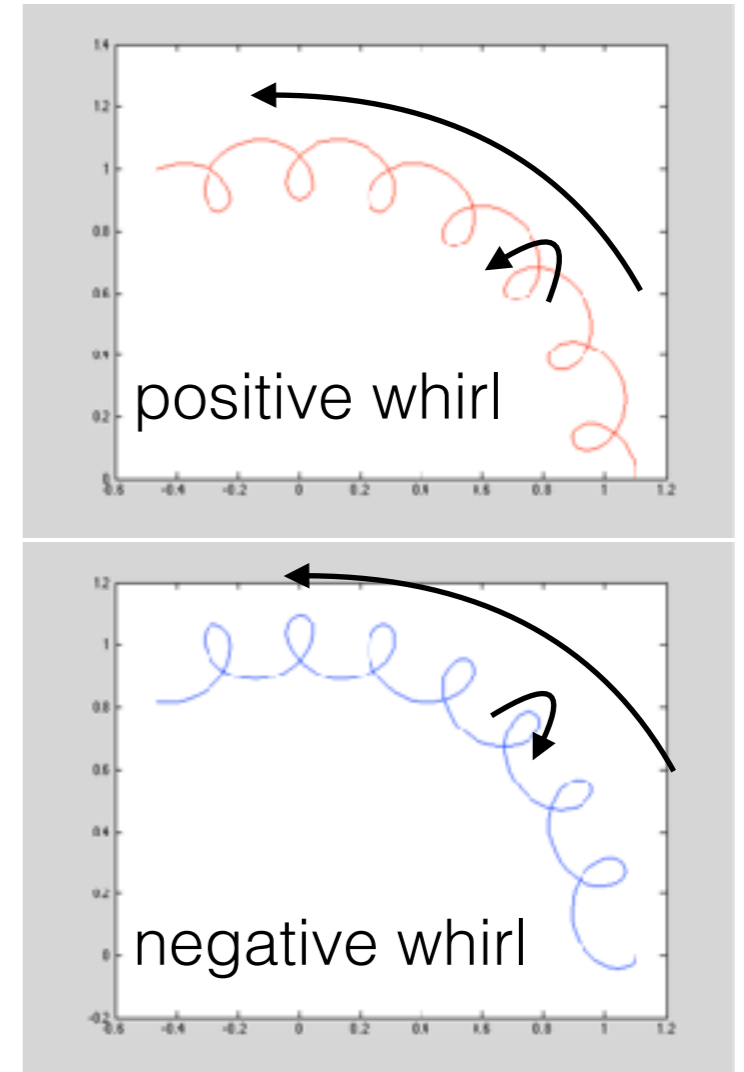
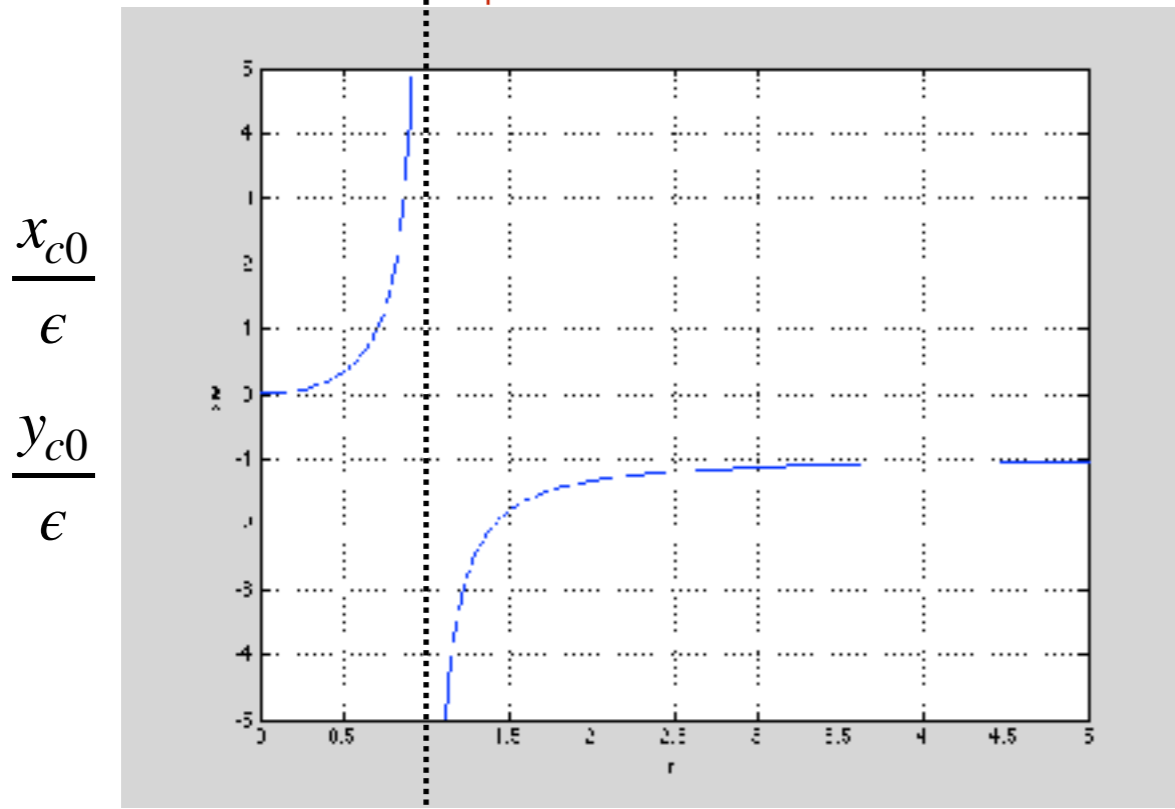


..velocità critica..

# Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

..ampiezza della risposta del rotore di Jeffcott al variare di  $r = \frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2}$

sub-critica      iper-critica





# Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

Oltre all'eccentricità si può studiare l'effetto

..della piegatura (flessione statica) dell'albero

(non necessariamente nel piano dello squilibrio)..

..la presenza di smorzamento

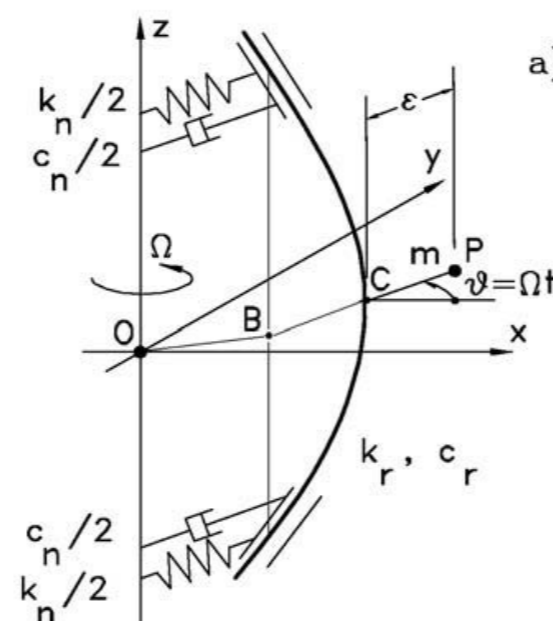
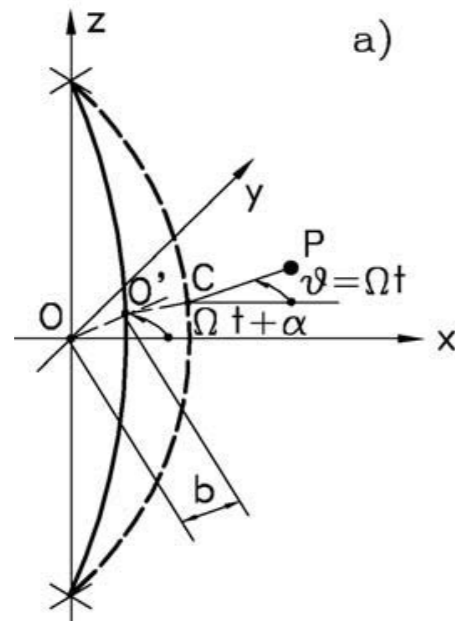
(non rotating damping - fondazioni e rotating damping - albero) (viscoso, strutturale..)

..la rigidità delle fondazioni..

..la variazioni di coppia dovute a resistenze interne

(legati a fenomeni dissipativi dello smorzamento)..

..



..con coordinate solidali alla macchina (fisse)..

..con coordinate solidali al rotore (rotanti)..

## Rotodinamica - flessionale / momenti giroscopici

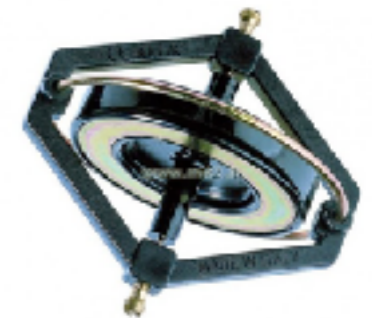
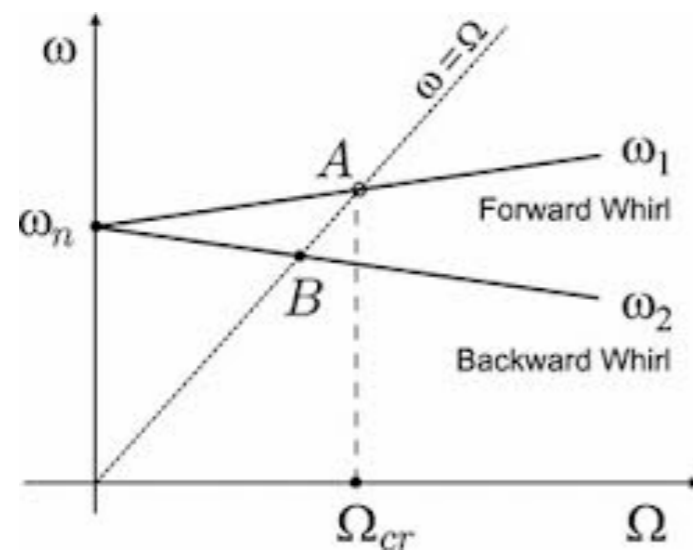
Finora abbiamo considerato un sistema costituito da un albero e una massa puntuale  $m$  (centrata o eccentrica)..

I modi di questo sistema non dipendono da  $\Omega$ , ed il diagramma di Campbell rappresenta le frequenze naturali con da rette orizzontali.

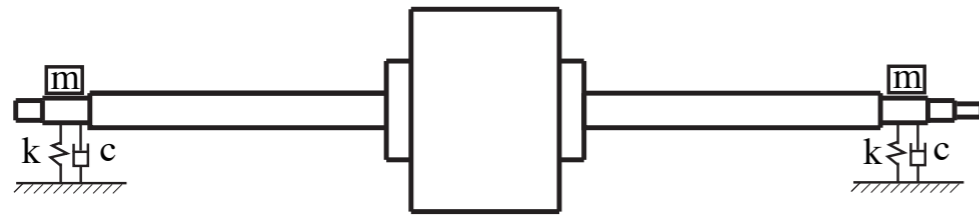
Quando il rotore contiene un corpo rigido (al posto della massa  $m$ ), si introducono momenti giroscopici che tendono a ..deformare l'albero.

..variare le frequenze naturali del sistema (in funzione di  $\Omega$ )

..



# Rotodinamica - flessionale / momenti giroscopici



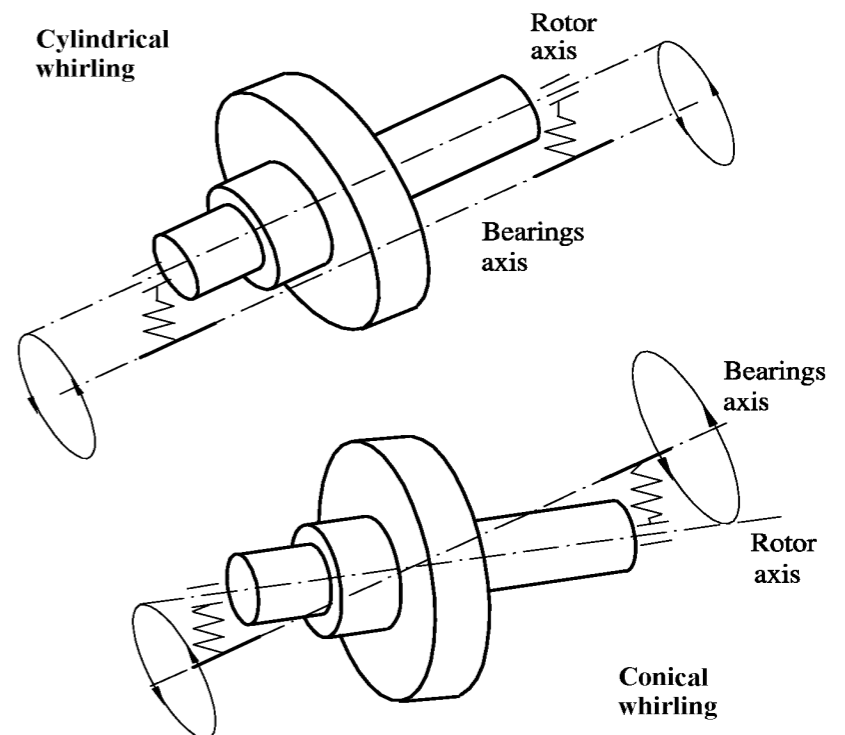
Si studierà il sistema supponendo che rotore giri con una velocità angolare  $\Omega$  abbia un momento d'inerzia polare  $I_p$  abbia momento trasversale d'inerzia  $I_t$  il centro di massa non coincide con l'asse geometrico del sistema...

squilibrio statico / squilibrio di coppia



$I_p > I_t$  si parlerà di disco

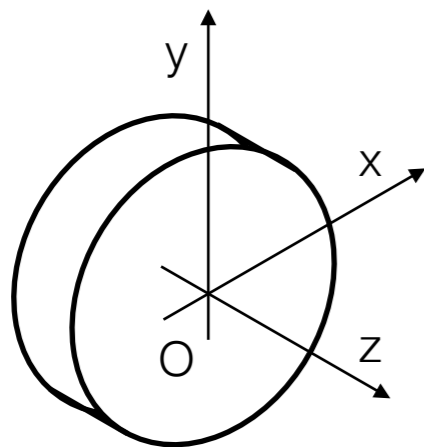
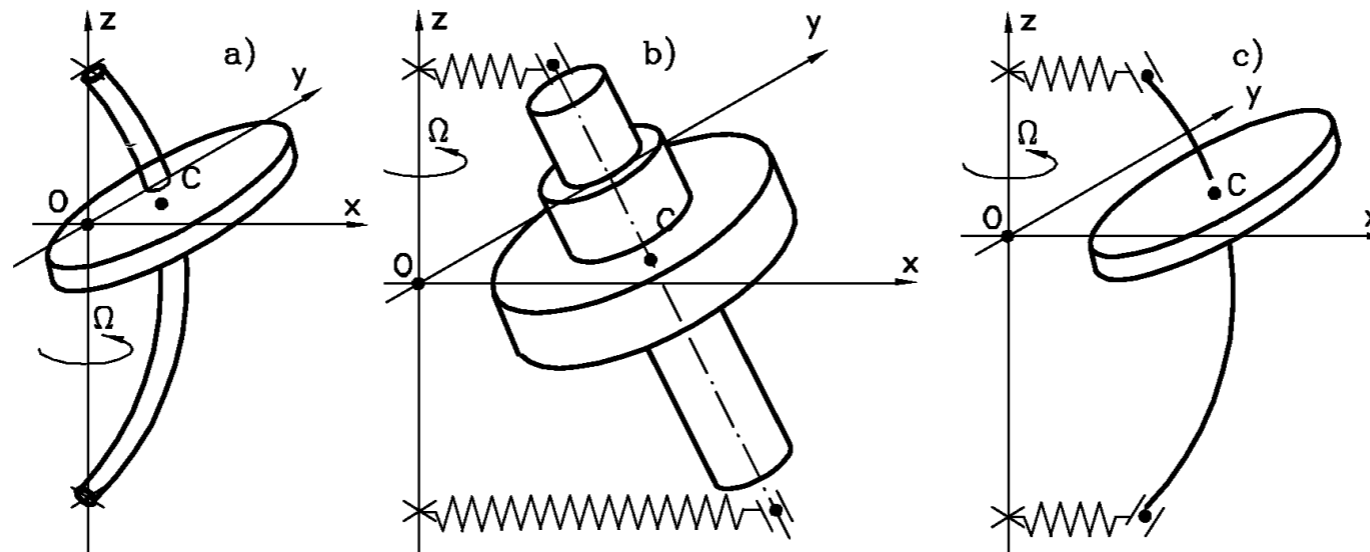
$I_p < I_t$  si parlerà di rotore allungato



attenzione al caso  $I_p = I_t$  nei rotori veloci

# Rotodinamica - flessionale / momenti giroscopici

Per studiare tale sistema si possono ipotizzare tre diverse configurazioni:  
(man mano più complesse)



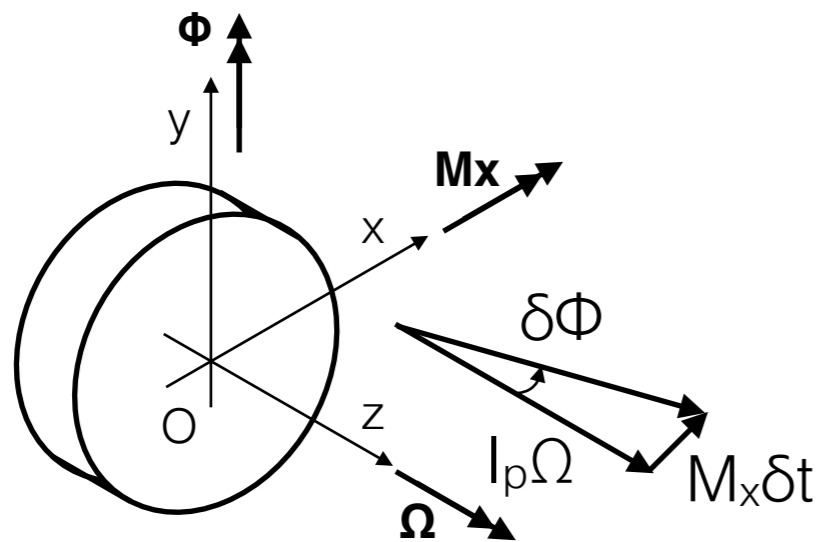
Ricordiamo che gli effetti giroscopici derivano  
..dalla conservazione del momento angolare del sistema..  
..e sono perpendicolari all'asse di rotazione del rotore!  
(vale la regola della mano destra!!)



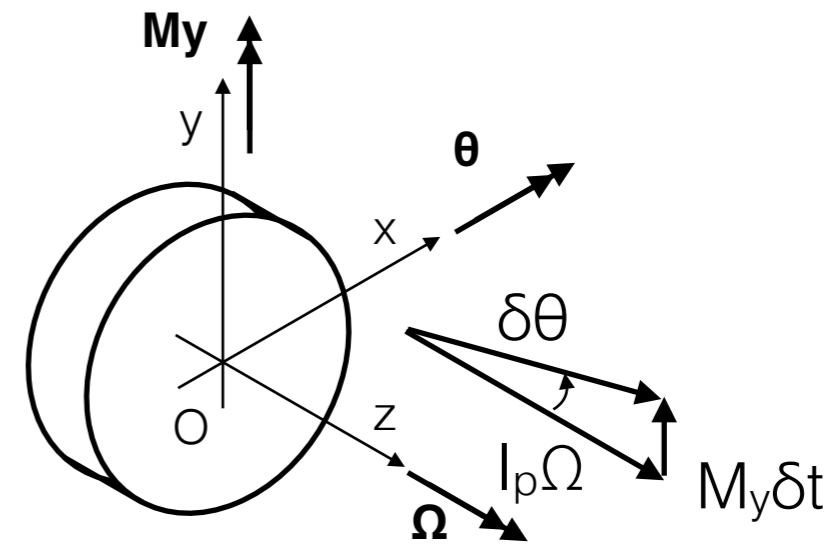
# Rotodinamica - flessionale / momenti giroscopici

Quando il corpo ruota, il suo momento angolare del rotore sarà  $I_p\Omega$ .

..supponiamo il disco ruoti in un  $\delta t$  attorno all'asse  $y$  con velocità  $\dot{\phi} = \frac{\delta\phi}{\delta t}$   
 Il momento angolare ruoterà di una quantità  $\delta\phi$  generando un momento  $M_x$



..supponiamo il disco ruoti in un  $\delta t$  attorno all'asse  $x$  con velocità  $\dot{\theta} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$   
 Il momento angolare ruoterà di una quantità  $\delta\theta$  generando un momento  $M_y$



Attenzione ai segni!

$$M_x \delta t = I_p \Omega \delta\phi \quad \text{per } \delta t \text{ che tende a zero...}$$

$$M_x = I_p \Omega \dot{\phi} \quad I_d \ddot{\phi} + I_p \Omega \dot{\phi} = M_x$$

$$-M_y \delta t = I_p \Omega \delta\theta$$

$$M_y = I_p \Omega \dot{\theta} \quad I_d \ddot{\theta} - I_p \Omega \dot{\theta} = M_y$$



## Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Consideriamo un rotore rigido su supporti flessibili..

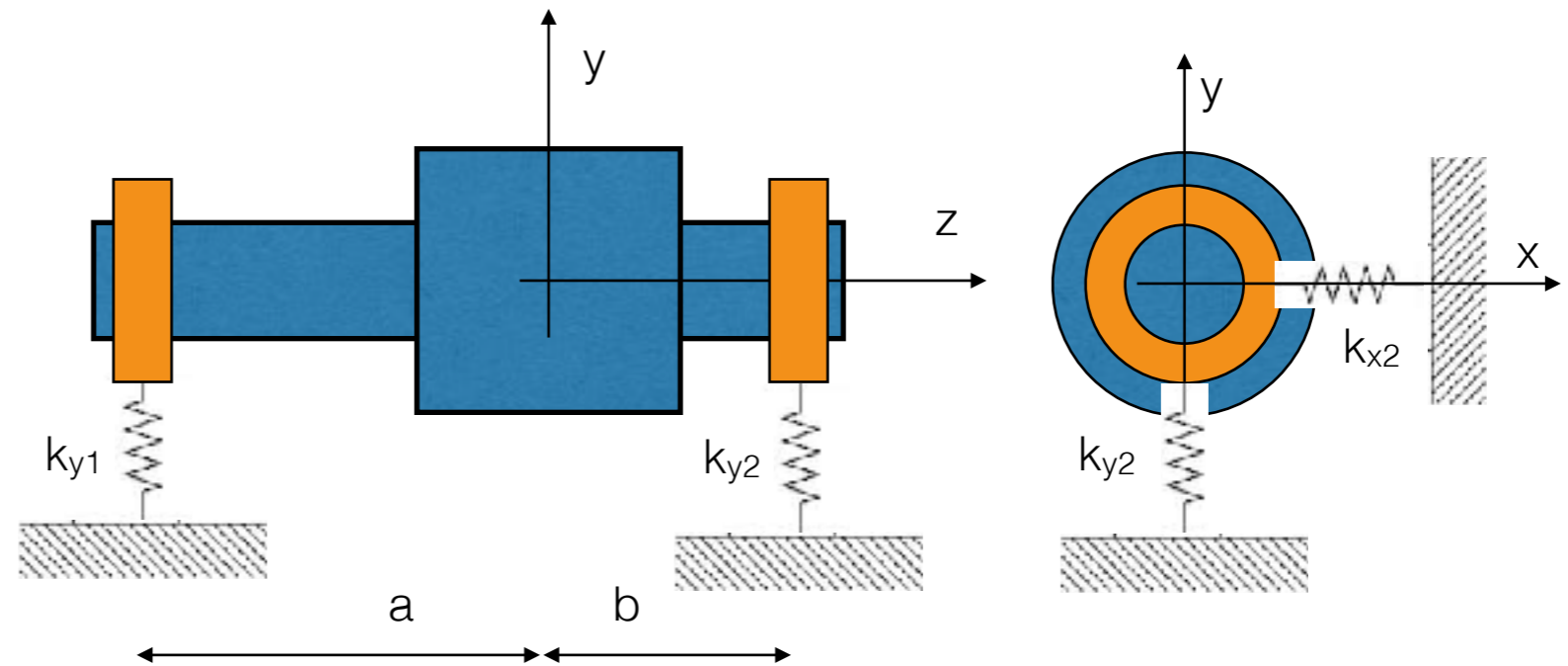
questo sistema ha 4 gradi di libertà (due traslazioni e due rotazioni)..

..supponiamo che i cuscinetti non abbiano rigidità angolare (short bearings),  
e che si possano muovere in direzione orizzontale e verticale..

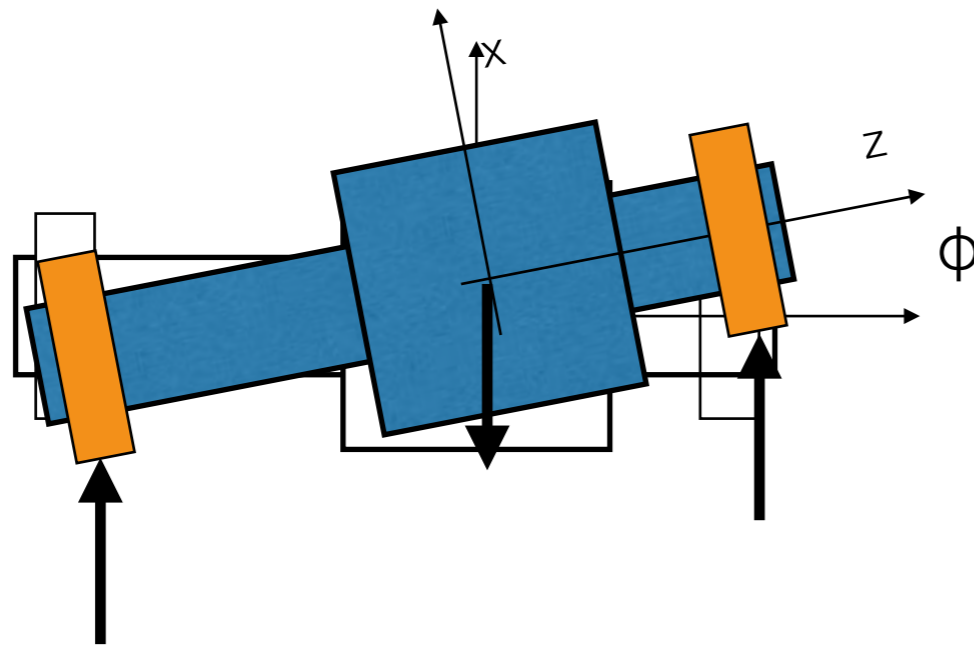
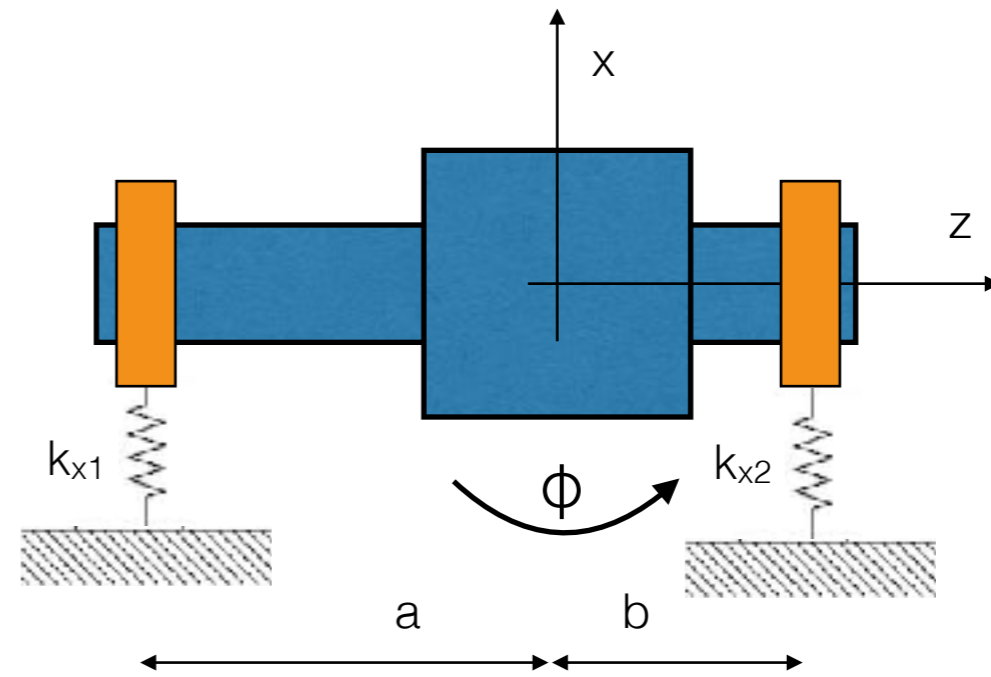
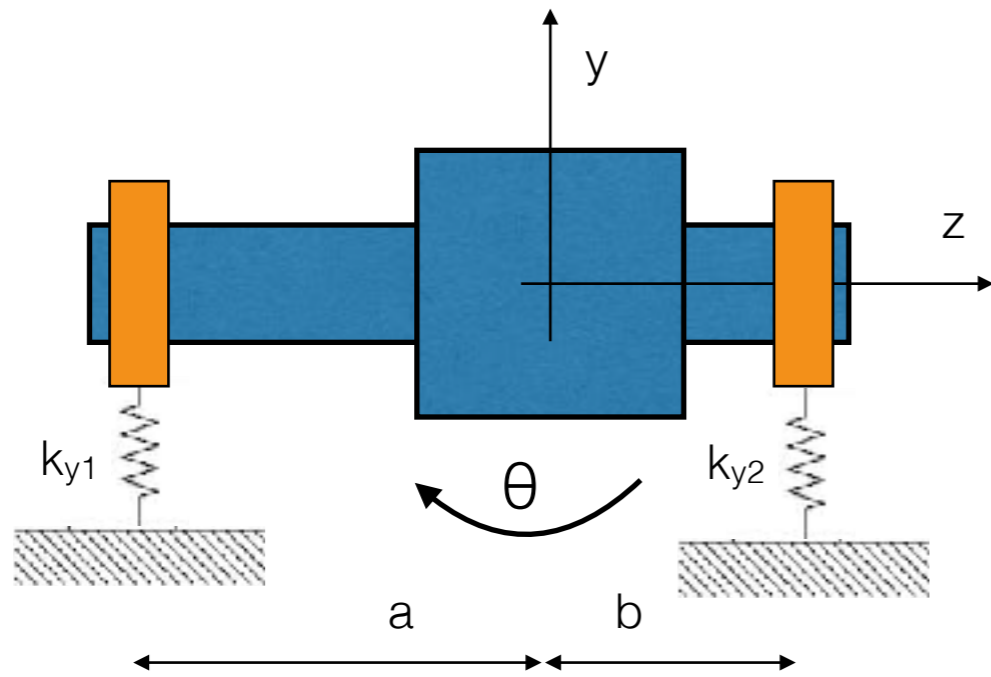
e in queste direzioni hanno due rigidità (possono essere uguali o diverse)

..possiamo usare le equazioni di Lagrange o scrivere le equazioni  
del moto grazie alla legge di Newton..

..per le traslazioni  
piano XZ e YZ  
e per le rotazioni  
attorno a X e Y



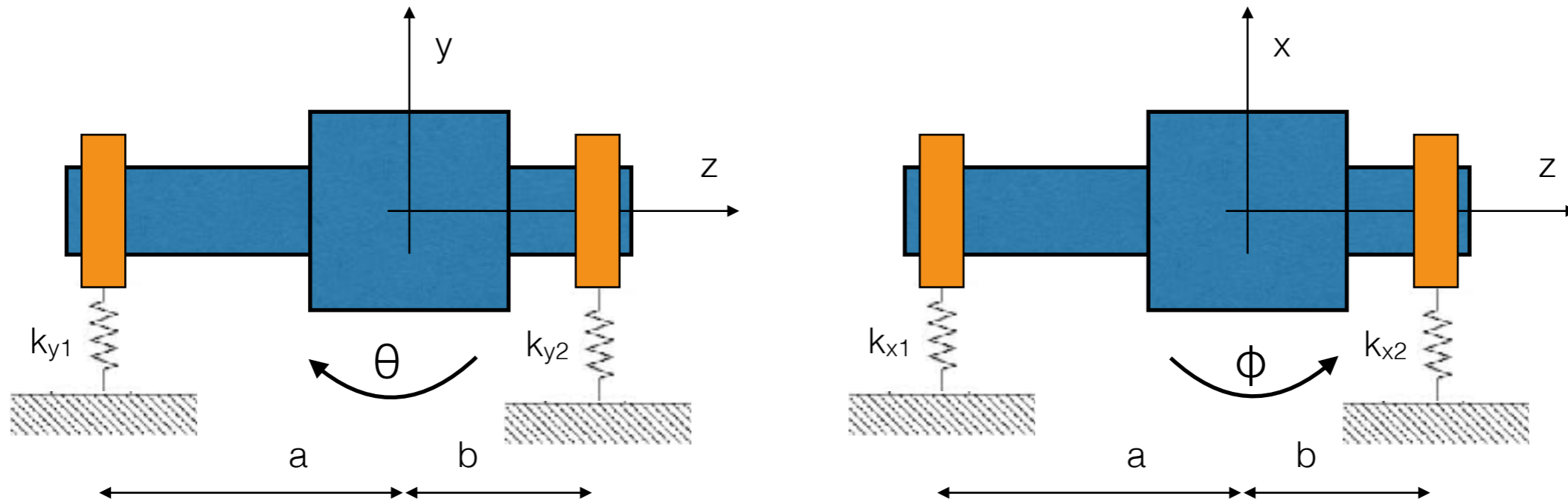
# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili



A partire dal diagramma di corpo libero considerando le forze applicate nei due piani...  
 si impone l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione..



# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili



Rispetto al centro di massa,  
scriviamo le equazioni di equilibrio...

traslazione / bounce  
rotazione / tilt

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_{x1}(x - a\phi) + k_{x2}(x + b\phi) = 0 \\ m\ddot{y} + k_{y1}(y + a\theta) + k_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + ak_{y1}(y + a\theta) - bk_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} - ak_{x1}(x - a\phi) + bk_{x2}(x + b\phi) = 0 \end{array} \right.$$

Equilibrio forze in dir x

Equilibrio forze in dir y

Equilibrio momenti attorno  $\theta$

Equilibrio momenti attorno  $\phi$

momenti giroscopici... segni in funzione della regola mano destra

# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Riordinando le equazioni in forma matriciale..

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..matrice momenti giroscopici

utilizzando le espressioni compatte..

$$\begin{cases} k_{xT} = k_{x1} + k_{x2} & k_{yT} = k_{y1} + k_{y2} \\ k_{xC} = -ak_{x1} + bk_{x2} & k_{yC} = -ak_{y1} + bk_{y2} \\ k_{xR} = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} & k_{yR} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

si ottengono le equazioni generali del moto.

NB questa sono accoppiate, per i termini fuori dalla diagonale principale diversi da 0 (1-4 / 2-3) !

## Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Bisogna risolvere il sistema di equazioni simultaneamente...  
in modo da trovare i modi di vibrazione  
traslazionali (x,y) e rotazionali ( $\theta, \phi$ ).

E' possibile analizzare alcuni casi semplificati:

- |  |  |                     |
|--|--|---------------------|
| 1 con supporti isotropi<br>senza accoppiamento elastico (es a=b) no effetto giroscopico,         | $k_{xT} = k_{yT} = k_T$ $k_{xC} = k_{yC} = k_C = 0$                                | $I_p \Omega = 0$    |
| 2 con supporti isotropi<br>accoppiamento elastico (es a non uguale b), no effetto giroscopico,   | $k_{xT} = k_{yT} = k_T$ $k_{xC} \neq k_{yC} \neq 0$                                | $I_p \Omega = 0$    |
| 3 con supporti isotropi<br>senza/con accoppiamento elastico (es a=b), con effetto giroscopico,   | $k_{xT} = k_{yT} = k_T$ $k_{xC} = k_{yC} = k_C = 0$<br>$k_{xC} \neq k_{yC} \neq 0$ | $I_p \Omega \neq 0$ |
| 4 con supporti anisotropi<br>accoppiamento elastico (es a non uguale b), con effetto giroscopico | $k_{xT} \neq k_{yT} \neq 0$ $k_{xC} \neq k_{yC} \neq 0$                            | $I_p \Omega \neq 0$ |

# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

**Caso 1** (supporti isotropi / non accoppiamento elastico, a uguale b / no momenti giroscopici)

Si riduce / semplifica il sistema di equazioni che diventano disaccoppiate!

Con la nota trasformazione di Laplace..

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = X_o e^{st} \\ y = Y_o e^{st} \\ \theta = \theta_o e^{st} \\ \phi = \phi_o e^{st} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad \text{bounce mode} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} \quad \text{tilt mode} \end{array} \right.$$

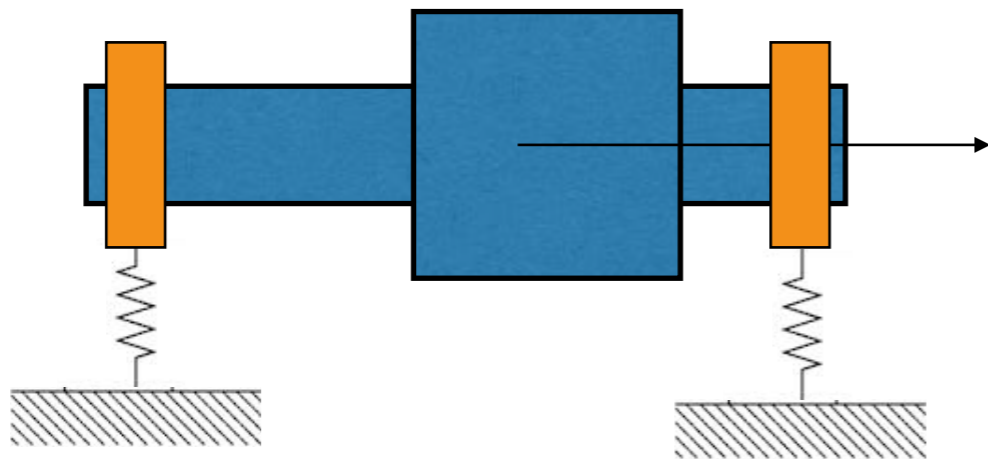
Il sistema ha 4DGL, ci sono in teoria 8 soluzioni ! Il sistema è simmetrico (xz e yz), nei due piani accadono le stesse cose.. le 4 soluzioni distinte (per le traslazioni e per le rotazioni) sono a due a due complesse coniugate ..se ne riportano solo due..

NB in funzione della rigidezza dei supporti (k) e delle caratteristiche del sistema (m, I) il modo di bounce può essere prima o dopo quello di tilt e viceversa!

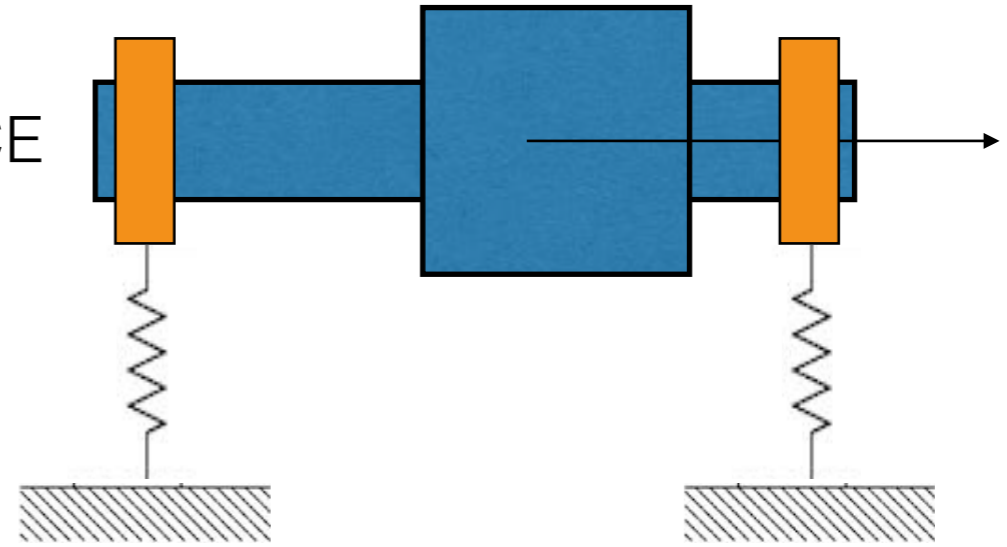


# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

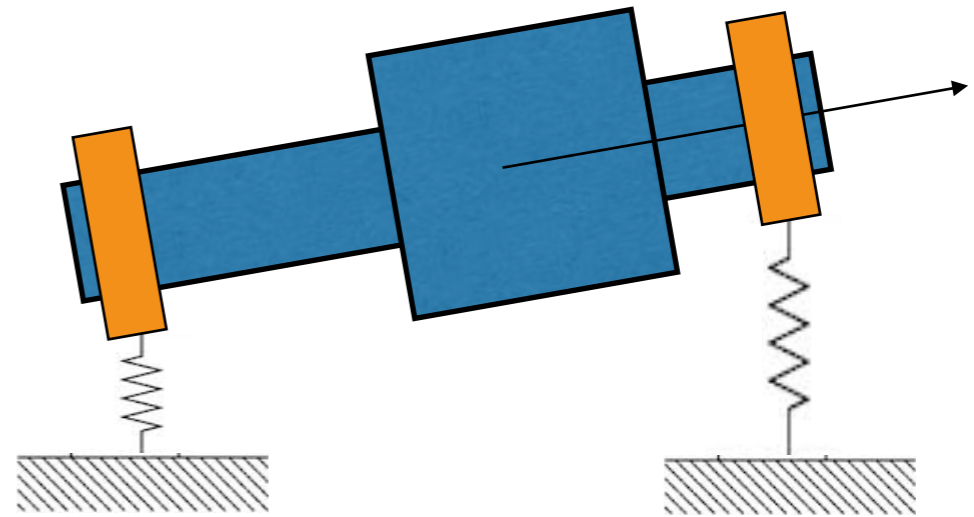
..in entrambi i piani..



Modo BOUNCE



Modo TILT





# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

**Caso 2** (supporti isotropi / accoppiamento elastico, a diverso b / no momenti giroscopici)

In questo caso il rotore non è più simmetrico! e le equazioni risultano accoppiate

Con la nota trasformazione di Laplace..

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T) X_0 + k_C \phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T) Y_0 - k_C \theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R) \theta_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R) \phi_0 + k_C X_0 = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{le equazioni del moto} \\ \text{sono ora accoppiate..} \\ \text{bisogna risolverle assieme} \end{array} \right.$$

**isolando  $X_0$  dalle equazioni 1&4 ed eguagliando i termini..**

$$X_0 = -\frac{k_C \phi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \phi_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = 0$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

$$X_0 = -\frac{k_C \phi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \phi_0}{k_C}$$

**isolando  $Y_0$  dalle equazioni 2&3 ed eguagliando i termini..**

$$Y_0 = \frac{k_C \theta_0}{(ms^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \theta_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = 0$$

sviluppando i termini tra parentesi si ottiene in entrambe i casi la seguente equazione..

$$s^4 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

..le cui radici in  $s^2$  sono..

$$s^2 = -\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{m I_d}} = -\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \gamma$$

..ed in  $s$ ..

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 &= j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) - \gamma} & s_5 = s_6 &= -j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) - \gamma} \\ s_3 = s_4 &= j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) + \gamma} & s_7 = s_8 &= -j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) + \gamma} \end{aligned}$$

compatto tutta la radice quadrata in  $\gamma$

# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Le radici sono a 2 a 2 complesse coniugate..

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} - \gamma} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} + \gamma} \end{array} \right.$$

Si ricordi che c'è accoppiamento tra i modi di traslazione (bounce) e di rotazione (tilt).. > accadono assieme !

$$\left( \frac{X_0}{\phi_0} \right)_{i=1,4} = -\frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_C} = -\frac{k_C}{m s_i^2 + k_T}$$

**isolando X<sub>0</sub>...**

$$X_0 = -\frac{k_C \phi_0}{(m s^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \phi_0}{k_C}$$

$$\left( \frac{Y_0}{\theta_0} \right)_{i=2,3} = \frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_C} = \frac{k_C}{m s_i^2 + k_T}$$

**isolando Y<sub>0</sub>...**

$$Y_0 = \frac{k_C \theta_0}{(m s^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \theta_0}{k_C}$$



# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

## Caso 3.1 (supporti isotropi / no accoppiamento elastico, a uguale b / con momenti giroscopici)

Le equazioni si semplificano, sono disaccoppiate nella traslazioni, accoppiate nelle rotazioni ..

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_R \phi = 0 \end{array} \right.$$

..con l'usuale soluzione di primo tentativo si cercano le soluzioni per le frequenze naturali..

dalle equazioni 1 e 2  $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$

**NB in realtà ci sono 4DOF  
=> 8 radici... a due a due  
complesse e coniugate**

dalle equazioni 3 e 4 (accoppiate)

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_d s^2 + k_R) \theta_0 + I_p \Omega s \phi_0 = 0 \\ -I_p \Omega s \theta_0 + (I_d s^2 + k_R) \phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

## Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Eliminando  $\theta_0$  e  $\phi_0$  da queste due equazioni di ottiene:

$$(I_d s^2 + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0$$

Facendone la radice quadrata  
si ottiene un'equazione caratteristica in  $s^2$   
le cui soluzioni sono le pulsazioni naturali del sistema!

$$I_d s^2 + k_R = \pm I_p \Omega s$$

$$I_d s^2 \mp I_p \Omega s + k_R = 0$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$
$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

Le soluzioni (pulsazioni naturali)  
dipendono da  $\Omega$  !  
e sono caratterizzate da segni  
differenti..  
+ crescenti con  $\Omega$  e  
- decrescenti con  $\Omega$

..nel diagramma di Campbell,  
le freq. naturali non son  
più rette orizzontali, ma curve!!

## Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Dalle equazioni 3 e 4 si ottiene anche il rapporto tra le rotazioni in funzione del modo di vibrazione:

$$\left( \frac{\theta_0}{\phi_0} \right)^{(i)} = - \frac{I_p \Omega s_i}{(I_d s_i^2 + k_R)} = \frac{(I_d s_i^2 + k_R)}{I_p \Omega s_i}$$

Il rapporto delle rotazioni è del tipo  $-\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$

rapporto soddisfatto se  $\frac{A}{B} = \pm j$  il segno dipende dal segno di  $(I_d s_i^2 + k_R)$

da queste caratteristiche dipende se il modo sarà di tipo forward whirl o backward whirl (concorde o discorde al verso di rotazione del rotore)

# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

## Caso 3.2 (supporti isotropi / accoppiamento elastico, a diverso b / con momenti giroscopici)

Le equazioni del moto di partenza si semplificano, rispetto al caso generale, ma sia traslazioni che rotazioni sono accoppiate!

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad (\text{accoppiate e con i termini giroscopici})$$

Usando la consueta trasformata di Laplace..

$$\left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T) X_0 + k_C \phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T) Y_0 - k_C \theta_0 = 0 \\ -k_C Y_0 + (I_d s^2 + k_R) \theta_0 + I_p \Omega \phi_0 = 0 \\ k_C X_0 - I_p \Omega \theta_0 + (I_d s^2 + k_R) \phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

## Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Analogamente a quanto fatto nei caso 2 precedente:

Dall'equazione 1 e 2 si estraggono  $\Phi_0$  e  $\theta_0$  e si sostituiscono in 3 e 4..

Dall'equazione da 3 e 4 si eliminano  $X_0$  e  $Y_0$ ..  
ottenendo un'equazione caratteristica  
in  $s^4$

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 + k_C\phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 - k_C\theta_0 = 0 \\ -k_C Y_0 + (I_d s^2 + k_R)\theta_0 + I_p \Omega \phi_0 = 0 \\ k_C X_0 - I_p \Omega \theta_0 + (I_d s^2 + k_R)\phi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ (ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 \right\}^2 + \left\{ I_p \Omega s (ms^2 + k_T) \right\}^2 = 0$$

sviluppando i prodotti riordinando si ottiene l'equazione caratteristica,  
le cui soluzioni sono le pulsazioni naturali di vibrazione...

$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_p}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$



# Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

**Caso 4** (supporti anisotropi / accoppiamento elastico, a diverso b / con momenti giroscopici)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_{yC} y + k_{yR} \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_{xC} x + k_{xR} \phi = 0 \end{cases}$$

o in forma matriciale...

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

o in forma canonica...

$$q = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Omega G & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

La soluzione che deve risolvere simultaneamente tutte le equazioni è del tipo:

$$[A]\{\dot{x}\} + [B]\{x\} = \{0\}$$

..classico problema agli autovalori..

..4 gradi di libertà..

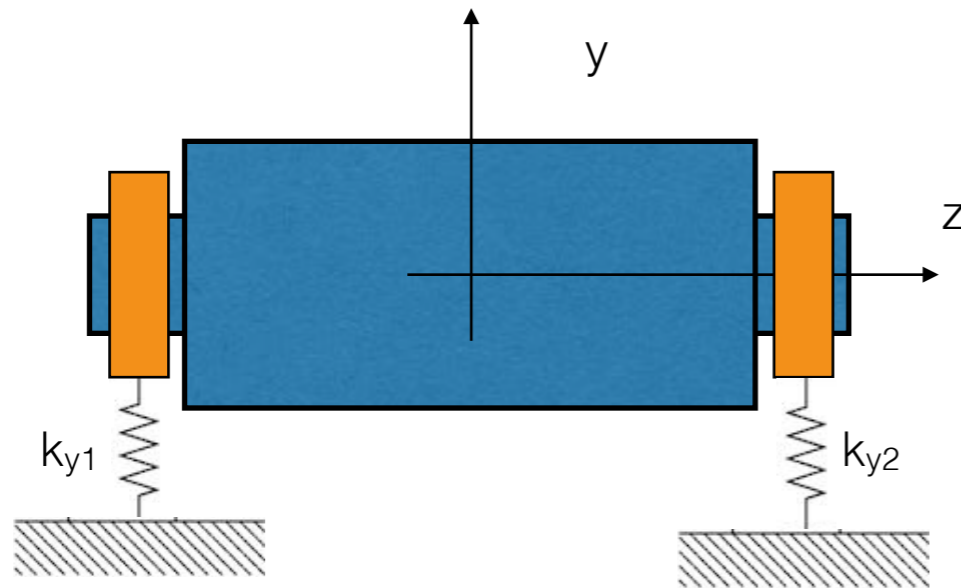
..8 radici a 2 a 2 complesse coniugate..

$$\begin{cases} s_{i=1..4} = +j\omega_{i=1..4} \\ s_{i=5..8} = -j\omega_{i=1..4} \end{cases}$$

Un modo di bounce ed un modo di tilt per ogni piano..  
ed il loro complesso coniugato!



## Rotodinamica - flessionale / Esempio 1



### Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_x=k_y=1\text{MN/m}$

### Condizioni

#### Iniziali

$X_0=1\text{mm}$

$Y_0=0.5\text{mm}$

$V_{x0}=30\text{mm/s}$

Quali sono le Frequenze naturali ?

Come si calcola la risposta del rotore?

Calcolo proprietà inerziali:

$$m = \frac{\rho \pi D^2 L}{4} = 122.68 \text{ kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{ kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{ kgm}^2$$

Calcolo proprietà elastiche:

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000 \text{ kNm}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 0 \text{ kNm}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 125 \text{ kNm}$$

## Rotodinamica - flessionale / Esempio 1

**Esempio 1** (supporti isotropi / non accoppiamento elastico, a uguale b / no momenti giroscopici)

Direttamente dalle formule viste:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad / s} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} = 208.97 \text{ rad / s} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 20.32 \text{ Hz} \\ f_3 = f_4 = \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 33.26 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

con le condizioni iniziali assegnate

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t) \\ y = B_1 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \\ \dot{x} = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ \dot{y} = B_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left( \frac{30}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \\ y = \frac{1}{2} \cos(\omega_2 t) \end{array} \right.$$



# Rotodinamica - flessionale / Esempio 1

Plottando i risultati degli spostamenti ottenuti in x e y si ottiene il diagramma orbitale e lo spostamento nelle direzioni coordinate del baricentro

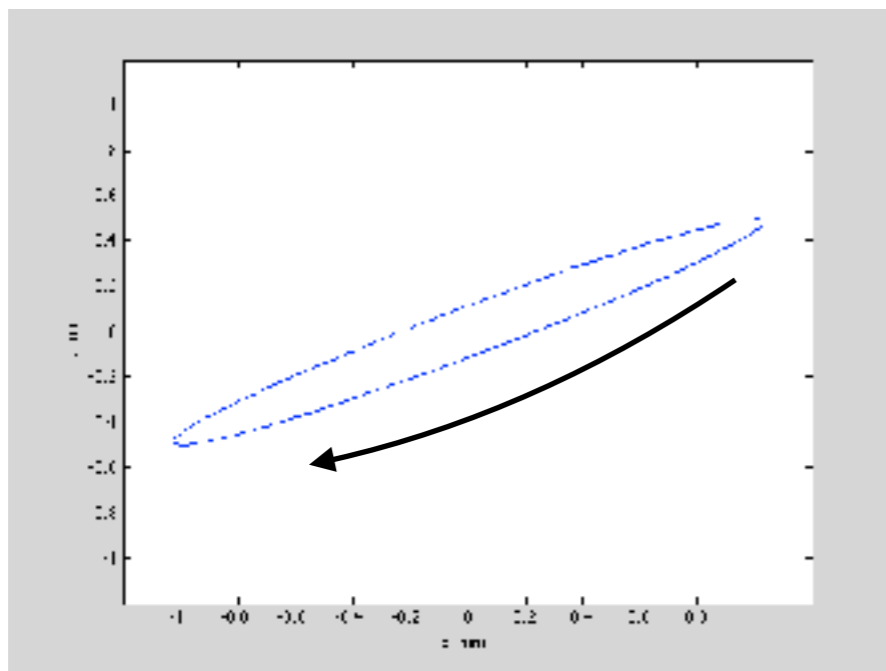
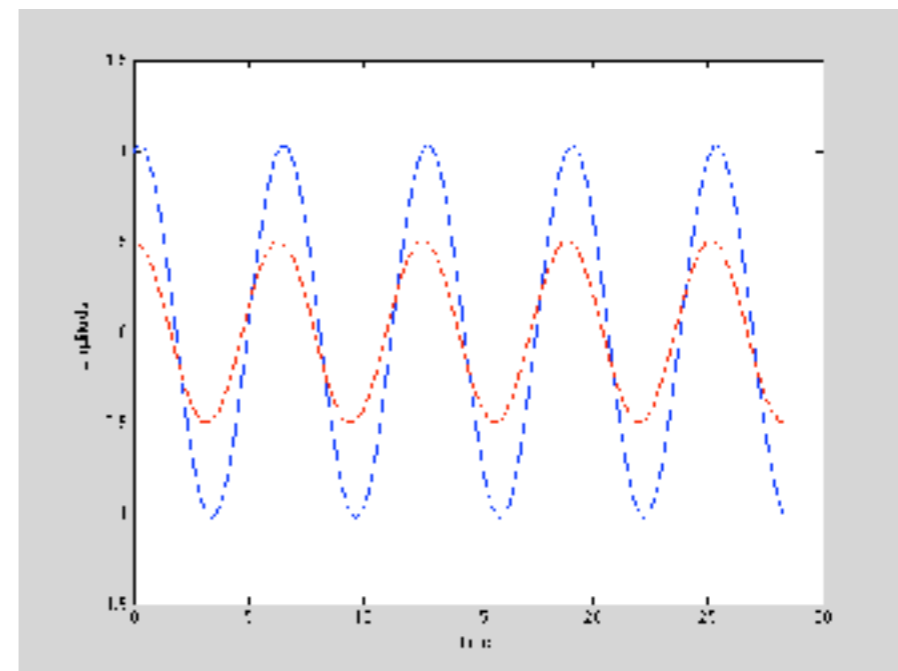


diagramma orbitale  
spostamento del baricentro  
visto lungo asse z



proiezioni degli spostamenti  
del baricentro sul piano  
XZ (blu) e YZ (rosso)

## Rotodinamica - flessionale / Esempio 2

**Esempio 2** (supporti isotropi / con accoppiamento elastico / no momenti giroscopici)

### Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_1=1\text{MN/m}$

$k_2=1.3\text{MN/m}$

Quali sono le Frequenze naturali ?  
Come si calcola la risposta del rotore?

Calcolo proprietà inerziali:

$$m = \frac{\rho \pi D^2 L}{4} = 122.68 \text{ kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{ kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{ kgm}^2$$

Calcolo proprietà elastiche

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2300 \text{ kNm}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 75 \text{ kNm}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75 \text{ kNm}$$

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{mI_d}} 16.236 \text{ rad}^2 / \text{s}^2$$

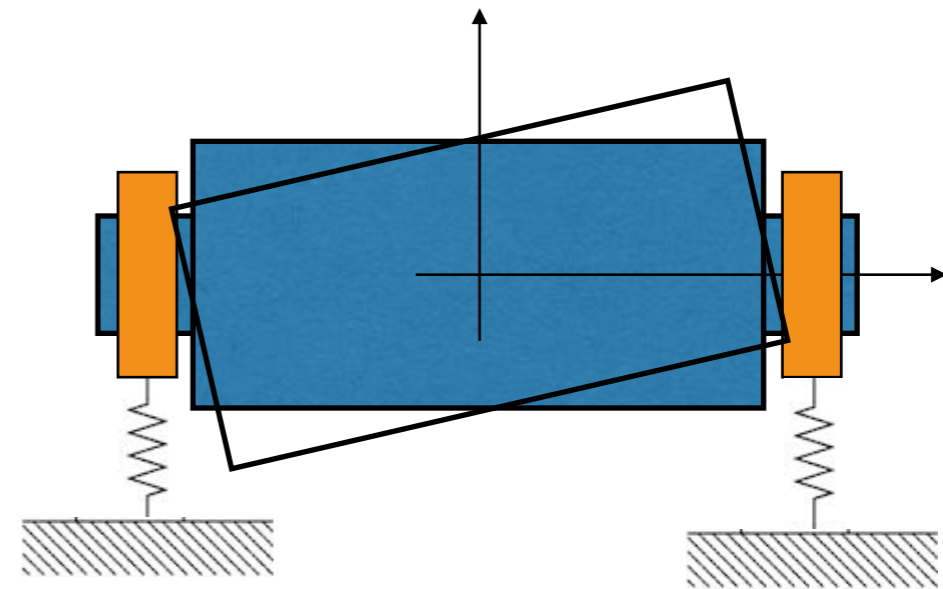
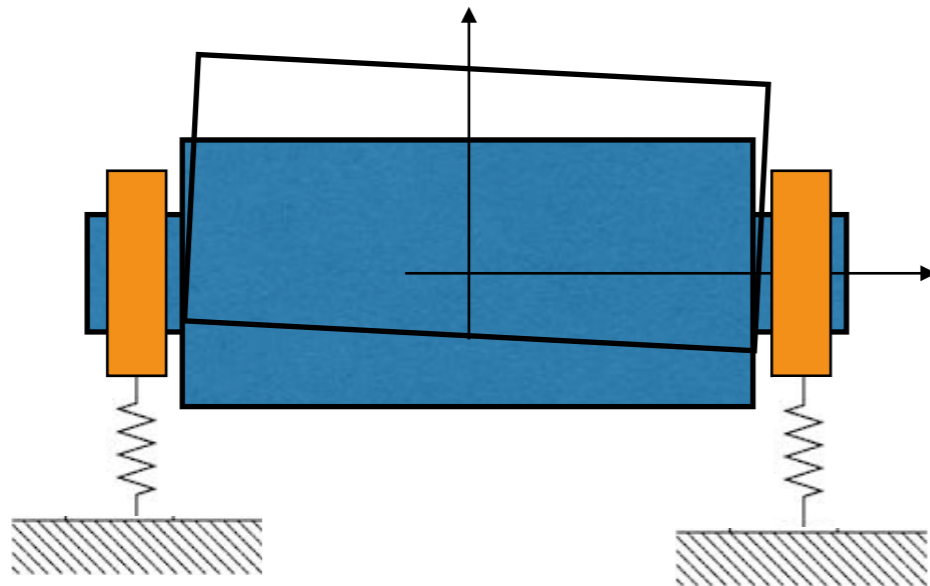
# Rotodinamica - flessionale / Esempio 2

Direttamente dalle formule viste:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} - \gamma} = 135.08 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = \omega_4 &= \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} + \gamma} = 225.21 \text{ rad/s} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 = f_2 &= \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 21.50 \text{ Hz} \\ f_3 = f_4 &= \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 35.84 \text{ Hz} \end{aligned} \right.$$

le frequenze si alzano leggermente..



## Rotodinamica - flessionale / Esempio 3

**Esempio 3** (supporti isotropi / senza - con accoppiamento elastico / momenti giroscopici) a 4000rpm

**Rotore** (supporti uguali )

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_x=k_y=1\text{MN/m}$

**Rotore** (supporti differenti)

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_1=1\text{MN/m}$

$k_2=1.3\text{MN/m}$

Calcolo velocità in radianti  $\Omega = 4000 \frac{2\pi}{60} = 418.88 \text{ rad / s}$

Calcolo proprietà elastiche

$$k_T = 2000 \text{ kNm}$$

$$k_C = 0 \text{ kNm}$$

$$k_R = 125 \text{ kNm}$$

$$k_T = 2300 \text{ kNm}$$

$$k_C = 75 \text{ kNm}$$

$$k_R = 143.75 \text{ kNm}$$

## Rotodinamica - flessionale / Esempio 3

Direttamente dalle formule viste:

(senza accoppiamento)

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 168.85 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 258.61 \text{ rad/s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 20.32 \text{ Hz} \\ f_3 = \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 26.87 \text{ Hz} \\ f_4 = \frac{1}{2\pi} \omega_4 = 41.16 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

(con accoppiamento)

$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_p}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

$$s^4 \mp j 89.76 s^3 + 68966 s^2 \mp j 1682800 s + 925.48 \times 10^6 = 0$$

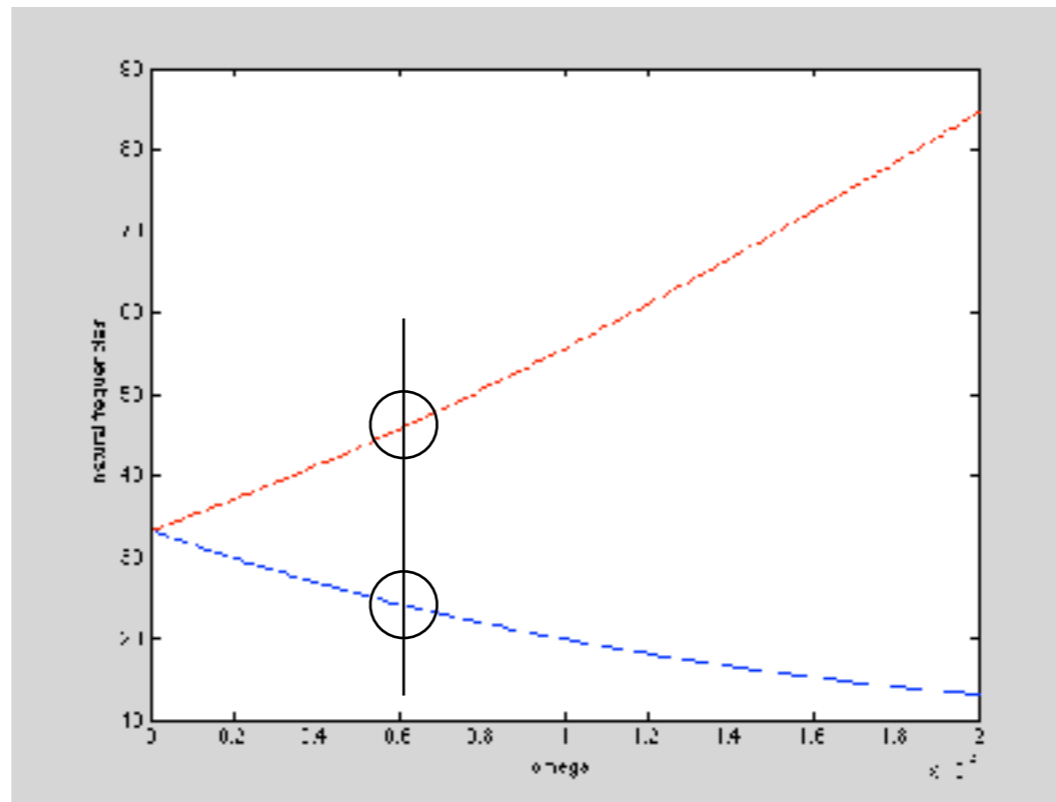
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 21.33 \text{ Hz} \\ f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_2 = 21.58 \text{ Hz} \\ f_3 = \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 29.58 \text{ Hz} \\ f_4 = \frac{1}{2\pi} \omega_4 = 43.62 \text{ Hz} \end{array} \right.$$



# Rotodinamica - flessionale / Esempio 3

.. è quindi possibile plottare l'andamento delle frequenze naturali in funzione della velocità di rotazione dell'albero...

Variazione di  $\omega_3$   $\omega_4$  tra 0 e 2000 rad/s



concorde con  $\Omega$

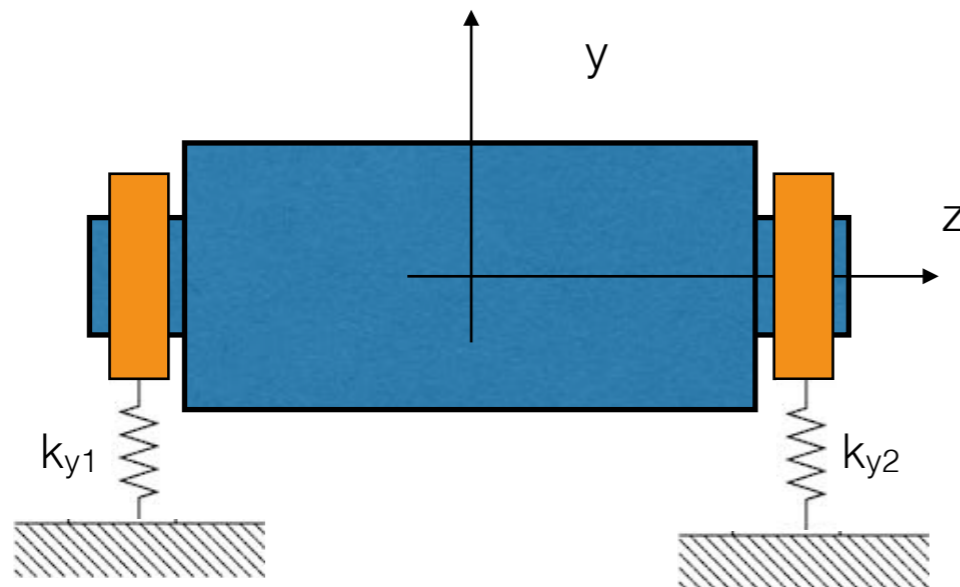
Forward Whirl

Backward Whirl

discorde con  $\Omega$

## Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

### **Esempio 4** (supporti isotropi - anisotropi / con accoppiamento elastico / momenti giroscopici)



### **Rotore**

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

### **Esempio 4.1** (supporti isotropi / con accoppiamento elastico / momenti giroscopici) stazionario

$$k_1 = 1\text{MN/m}$$

$$k_2 = 1.3\text{MN/m}$$

### **Esempio 4.2** (supporti anisotropi / con accoppiamento elastico / momenti giroscopici) stazionario, a 4000 e 8000 rpm

$$k_{x1} = 1\text{MN/m} \quad k_{x2} = 1.3\text{MN/m}$$

$$k_{y1} = 1.1\text{MN/m} \quad k_{y2} = 1.4\text{MN/m}$$

## Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

4.1 Calcolo le matrici di massa, rigidezza e giroscopica:

$$M = \begin{bmatrix} 122.68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 122.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8625 \end{bmatrix} \quad K = 10^3 \begin{bmatrix} 2.30 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 2.30 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 143.75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 & 143.75 \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .6134 \\ 0 & 0 & -.6134 & 0 \end{bmatrix}$$

ai quali corrispondono le seguenti soluzioni nel caso 4.1  
... (e le loro complesse coniugate)

$$\omega_1 = 134.0 \text{ rad / s} \quad \omega_2 = 135.6 \text{ rad / s} \quad \omega_3 = 185.9 \text{ rad / s} \quad \omega_4 = 274.0 \text{ rad / s}$$
$$f_1 = 21.33 \text{ Hz} \quad f_2 = 21.58 \text{ Hz} \quad f_3 = 29.58 \text{ Hz} \quad f_4 = 43.62 \text{ Hz}$$

## Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

similmente per il caso 4.2....:

4.2 stazionario:

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 = 135.08 \text{ rad / s} & \omega_2 = 141.13 \text{ rad / s} & \omega_3 = 225.21 \text{ rad / s} & \omega_4 = 234.62 \text{ rad / s} \\ f_1 = 21.50 \text{ Hz} & f_2 = 22.46 \text{ Hz} & f_3 = 35.85 \text{ Hz} & f_4 = 37.34 \text{ Hz} \end{array}$$

4.2 @4000rpm:

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 = 134.74 \text{ rad / s} & \omega_2 = 140.94 \text{ rad / s} & \omega_3 = 190.15 \text{ rad / s} & \omega_4 = 278.94 \text{ rad / s} \\ f_1 = 21.44 \text{ Hz} & f_2 = 22.43 \text{ Hz} & f_3 = 30.26 \text{ Hz} & f_4 = 44.40 \text{ Hz} \end{array}$$

4.2 @8000rpm:

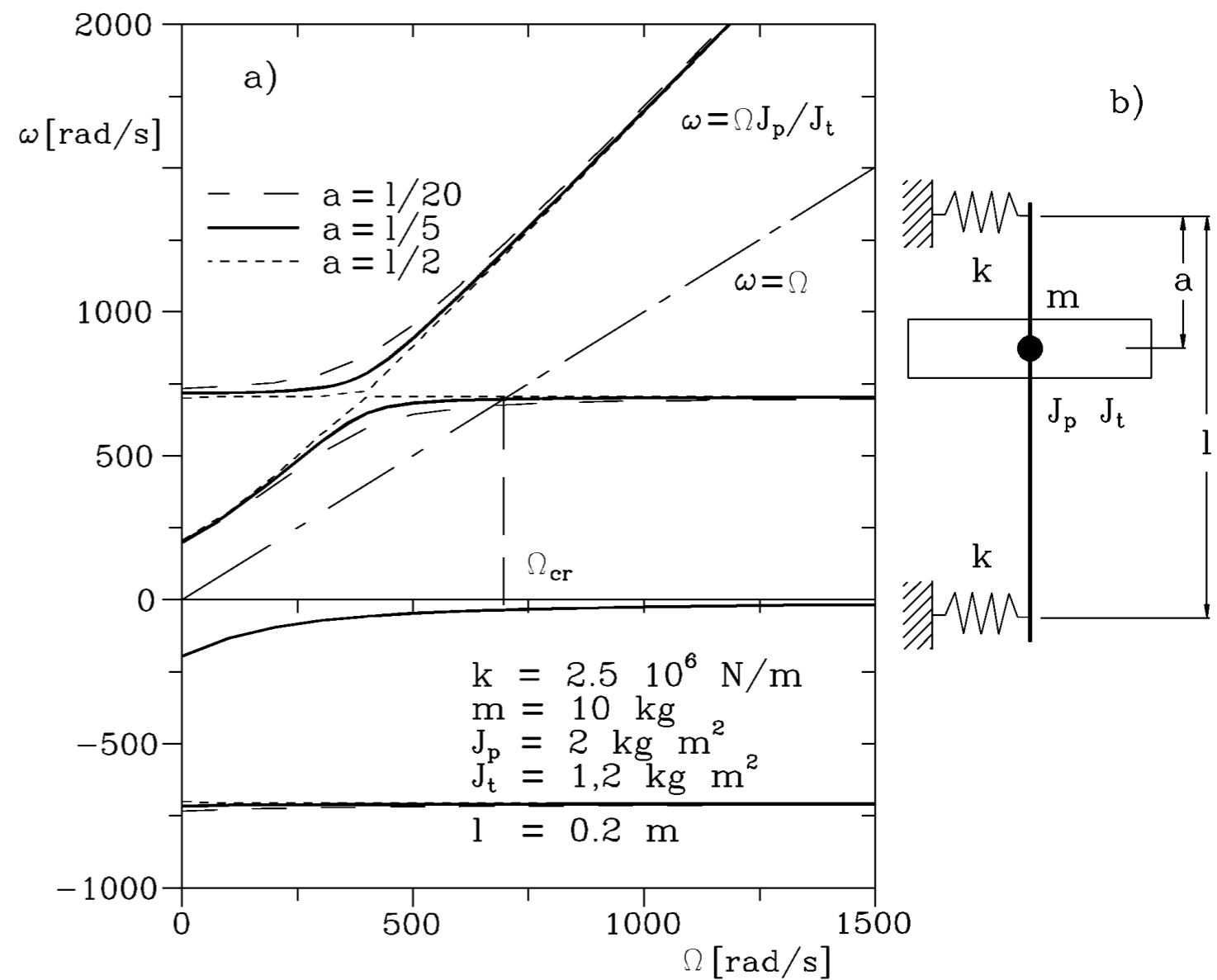
$$\begin{array}{cccc} \omega_1 = 137.87 \text{ rad / s} & \omega_2 = 140.16 \text{ rad / s} & \omega_3 = 161.05 \text{ rad / s} & \omega_4 = 336.07 \text{ rad / s} \\ f_1 = 21.13 \text{ Hz} & f_2 = 22.30 \text{ Hz} & f_3 = 25.63 \text{ Hz} & f_4 = 53.49 \text{ Hz} \end{array}$$

si osservi come cambiano i valori... NB in maniera NON lineare!!!

# Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

Questa è la ragione per cui è necessario calcolare i valori delle frequenze naturali alle diverse velocità di rotazione  $\Omega$ ! (ed ai diversi valori di rigidità dei supporti)

## Diagramma di Campbell







## Rotodinamica - flessionale / effetto dello smorzamento

Se in parallelo alle rigidità si mettono anche degli smorzatori, nel diagramma di corpo rigido, bisognerà aggiungere le forze dissipative..

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x1} = k_{x1}(x - a\phi) + c_{x1}(\dot{x} - a\dot{\phi}) \\ f_{x2} = k_{x2}(x - b\phi) + c_{x2}(\dot{x} - b\dot{\phi}) \\ f_{y1} = k_{y1}(y - a\theta) + c_{y1}(\dot{y} - a\dot{\theta}) \\ f_{y2} = k_{y2}(y - b\theta) + c_{y2}(\dot{y} - b\dot{\theta}) \end{array} \right.$$

..con le similari convenzioni..

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_{xT} = c_{x1} + c_{x2} & c_{yT} = c_{y1} + c_{y2} \\ c_{xC} = -ac_{x1} + bc_{x2} & c_{yC} = -ac_{y1} + bc_{y2} \\ c_{xR} = a^2c_{x1} + b^2c_{x2} & c_{yR} = a^2c_{y1} + b^2c_{y2} \end{array} \right.$$

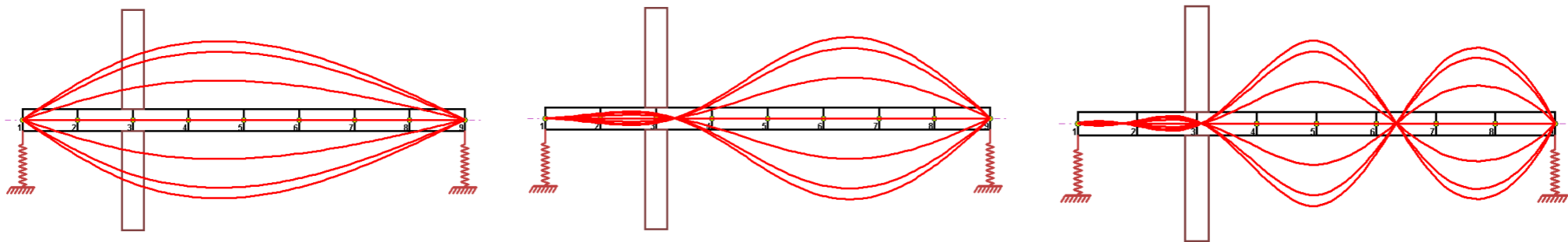
$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + c_{xT}\dot{x} + c_{xC}\dot{\phi} + k_{xT}x + k_{xC}\phi = 0 \\ m\ddot{y} + c_{yT}\dot{y} + c_{yC}\dot{\theta} + k_{yT}y + k_{yC}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} - c_{yC}\dot{y} + c_{yR}\dot{\theta} - c_{yC}y + k_{yR}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xC}\dot{x} + c_{yR}\dot{\phi} + k_{xC}x + k_{xR}\phi = 0 \end{array} \right.$$

Si possono poi studiare i diversi casi come fatto precedentemente per i sistemi non smorzati...

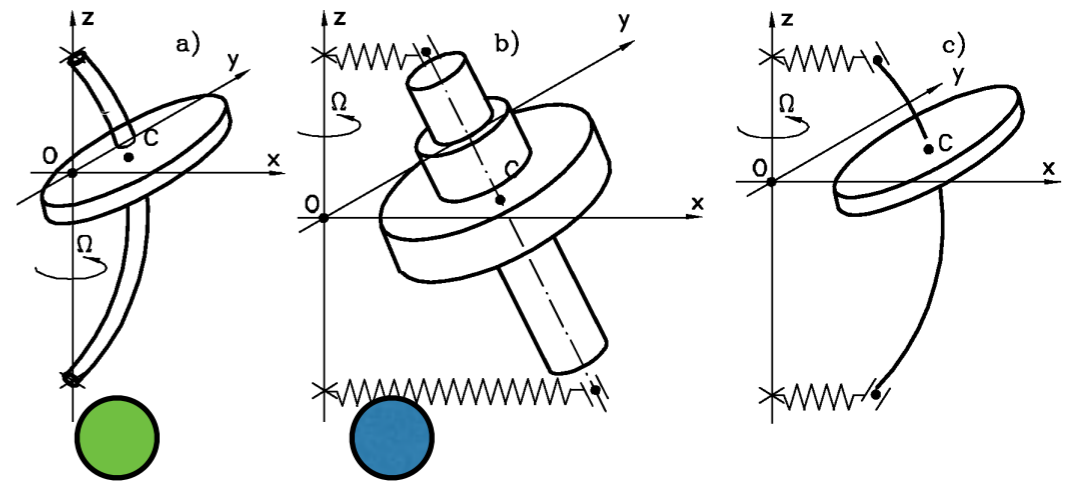
# Rotodinamica - flessionale / rotori flessibili

..ci siamo concentrati su rotori rigidi e supporti flessibili ● ...  
ma esiste la possibilità di considerare rotori flessibili e supporti rigidi ● ...

.. si procede similmente.. le frequenze naturali saranno associate a  
“modi” flessionali del rotore



.. anche in questo caso ci sarà  
l'effetto dei momenti giroscopici e  
la divisione dei modi (concordi e  
discordi a  $\Omega$ )



# Rotodinamica - flessionale

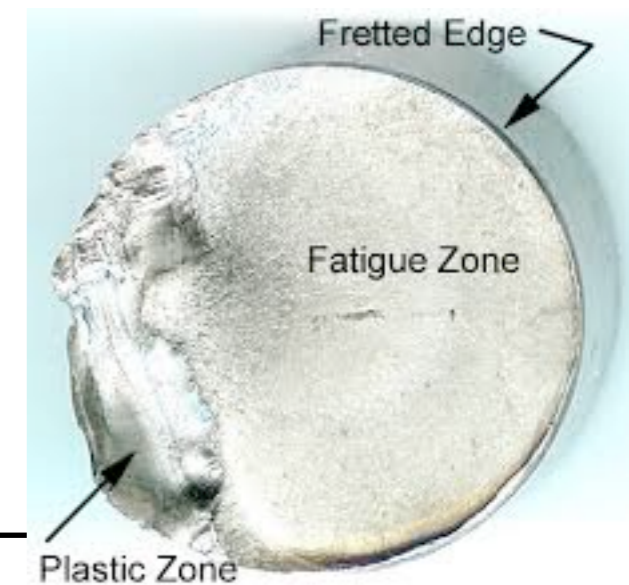
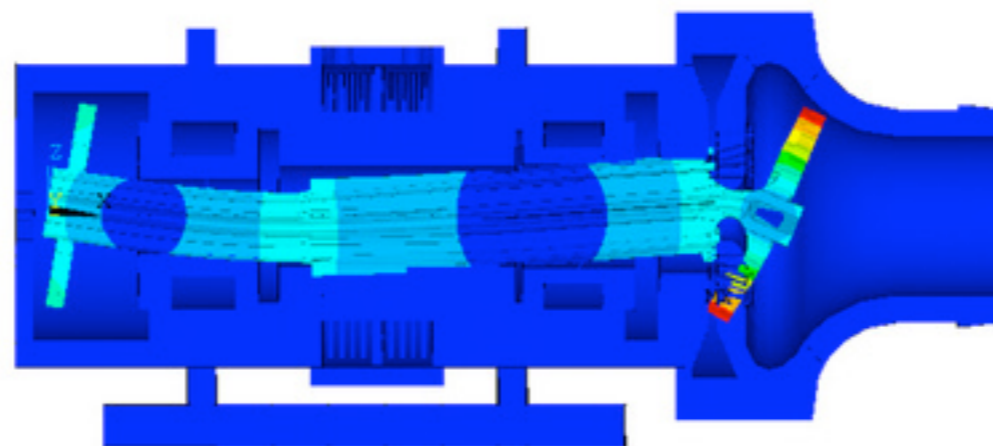
Riassumendo:

I rotori hanno modi naturali di vibrazione..

I modi di vibrazione dipendono dalle

- caratteristiche del rotore
- caratteristiche dei supporti
- velocità di rotazione del rotore..

I modi di vibrazione devono essere lontani dalla velocità di utilizzo del rotore..  
altrimenti si amplificano le deformazioni del rotore stesso  
> contatti, stress, rotture..



## Rotodinamica - flessionale

I rotori però solitamente sono più complessi e la rappresentazione finora utilizzata non basta...

bisogna estendere l'analisi a sistemi contenenti più elementi..

questi sono

collegati tra loro con elementi rigidi..

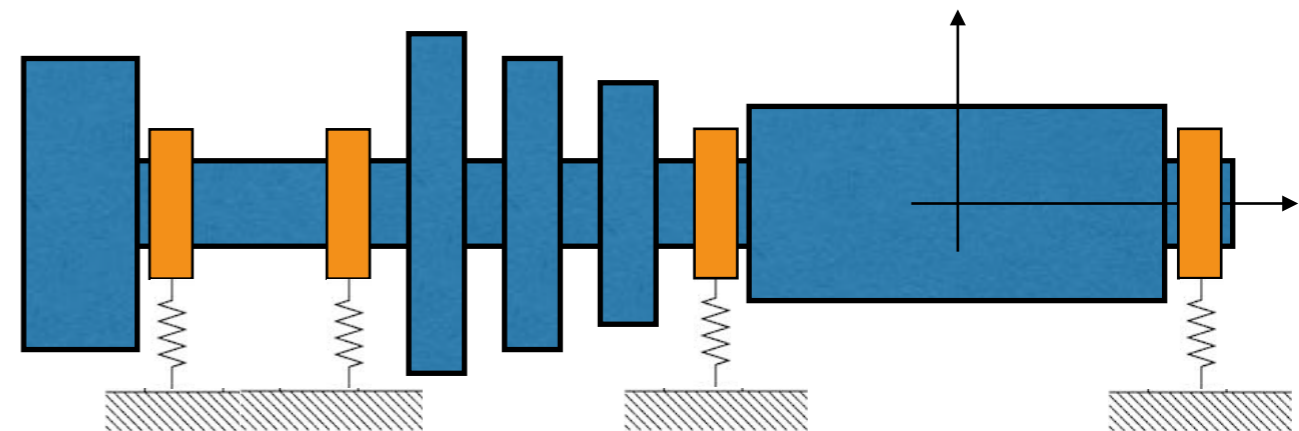
supportati da cuscinetti..

soggetti a forzanti esterne e meccanismi dissipativi..

..

Bisogna trovare il modo di calcolare i modi di vibrare anche in queste condizioni.. tracciare il diagramma di Campbell e verificare che il regime di funzionamento sia lontano dai modi trovati!!

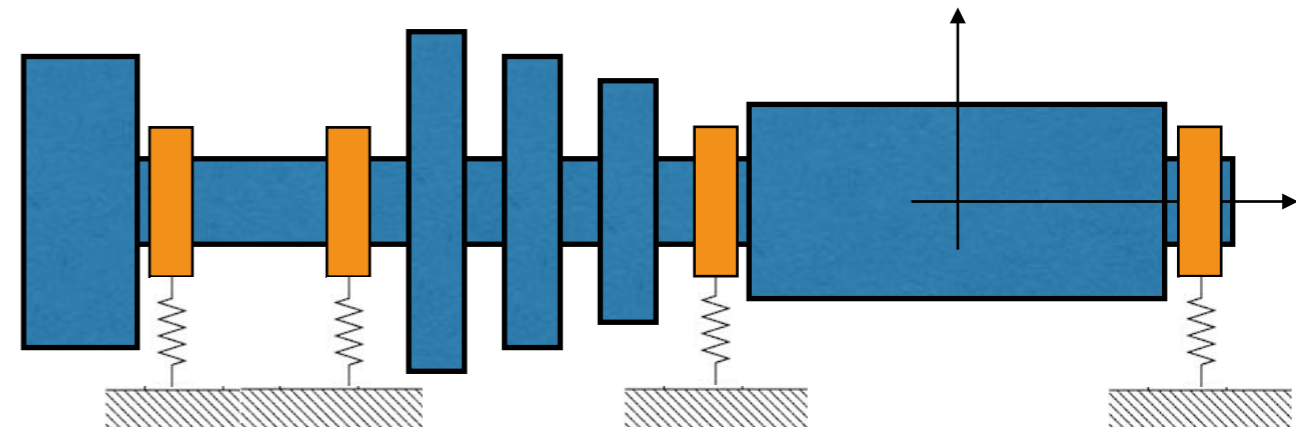
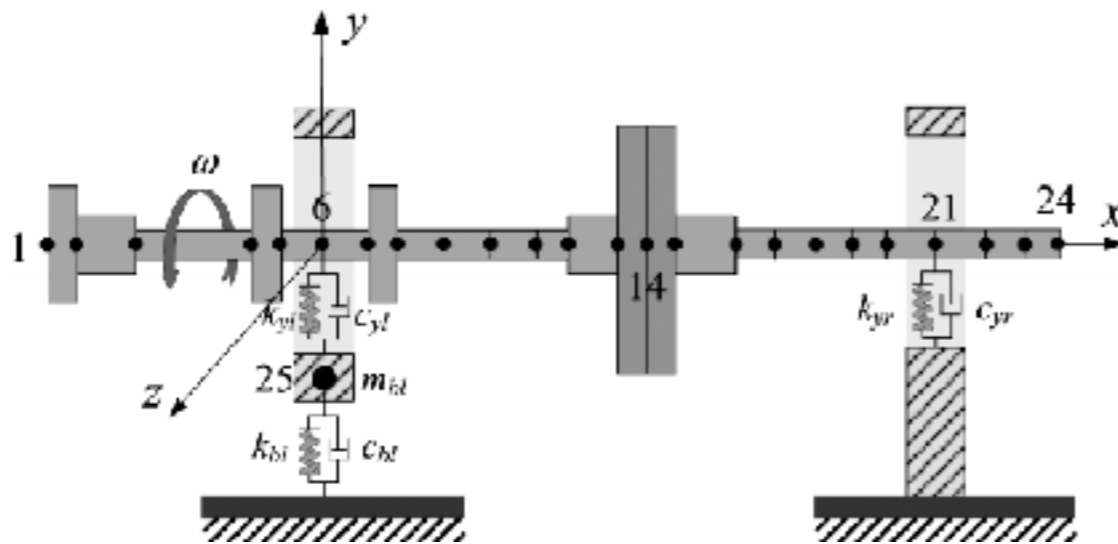
Diventa necessaria una formulazione MDOF.. o FEM..



# Rotodinamica - flessionale

I rotori complessi possono essere considerati come l'unione di elementi diversi, opportunamente combinati.

In prima battuta si può immaginare che i rotori subiscano solamente delle vibrazioni trasversali (o laterali), per cui ogni nodo del sistema può avere 4 **coordinate** (due traslazioni e due rotazioni)



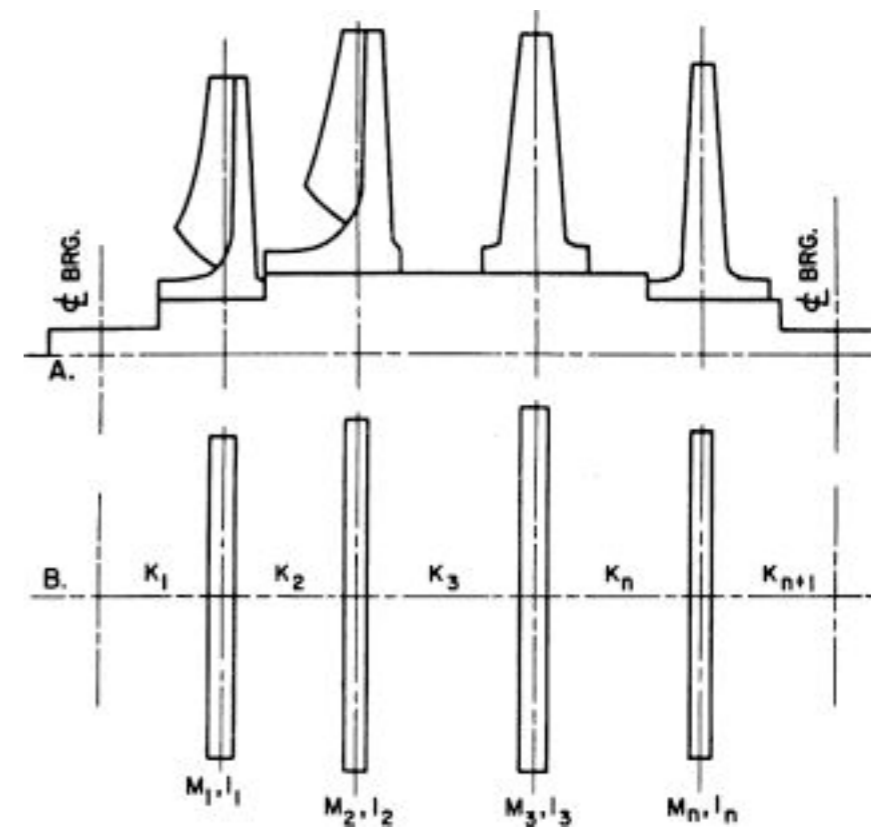


# Rotodinamica - flessionale

Gli elementi costitutivi sistema rotante da tenere in considerazione saranno:

- a. I **Volani** (dischi) caratterizzati da momenti d'inerzia polare  $I_p$  e diametrale  $I_d$  (sono rotori assialsimmetrici..  $I_d$  è unico..). Ciascun volano sarà caratterizzato da un' opportuna matrice inerziale e una per gli effetti inerziali:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}$$



Per geometrie complesse utilizzare il tensore d'inerzia calcolati dai programmi CAE



## Rotodinamica - flessionale

b. le sezioni di **Alberi** intermedie ai volani caratterizzati da masse (inerzie) e rigidezze (flessionali) e dalle rispettive matrici

In funzione della tipologia di analisi si possono utilizzare diverse teorie per studiare la deformazione di questi elementi (Eulero-Bernulli, Timoshencko..), includendo effetti relativi a:

Taglio

Coppia esterna

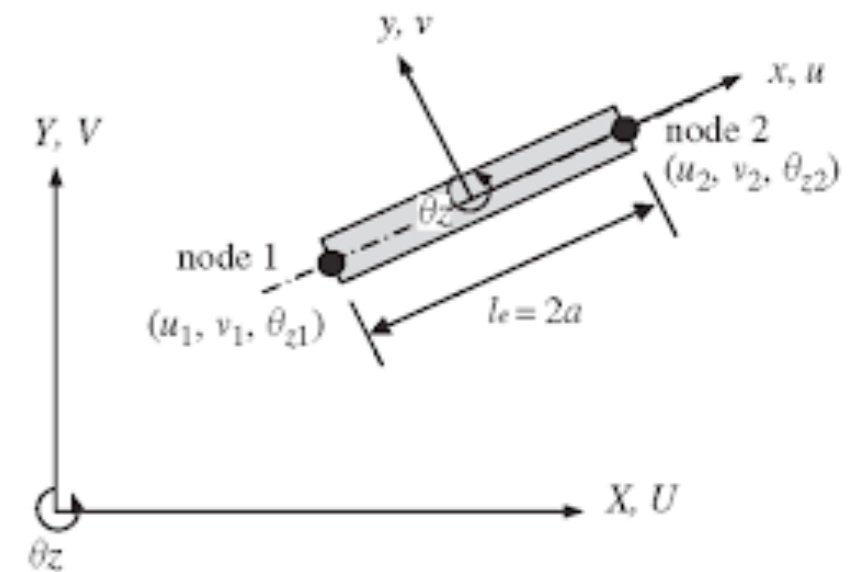
Momenti giroscopici

Sollecitazioni assiali

Variazioni di sezione

..

caratterizzando così le matrici di massa e rigidezza.



## Rotodinamica - flessionale

c. I **cuscinetti**, le **tenute**, ed in generale le **iterazioni tra rotore e statore**

Questi elementi sono in generale non lineari e dissipativi (non essendo infinitamente rigidi) e complicano la formulazione delle equazioni di moto.

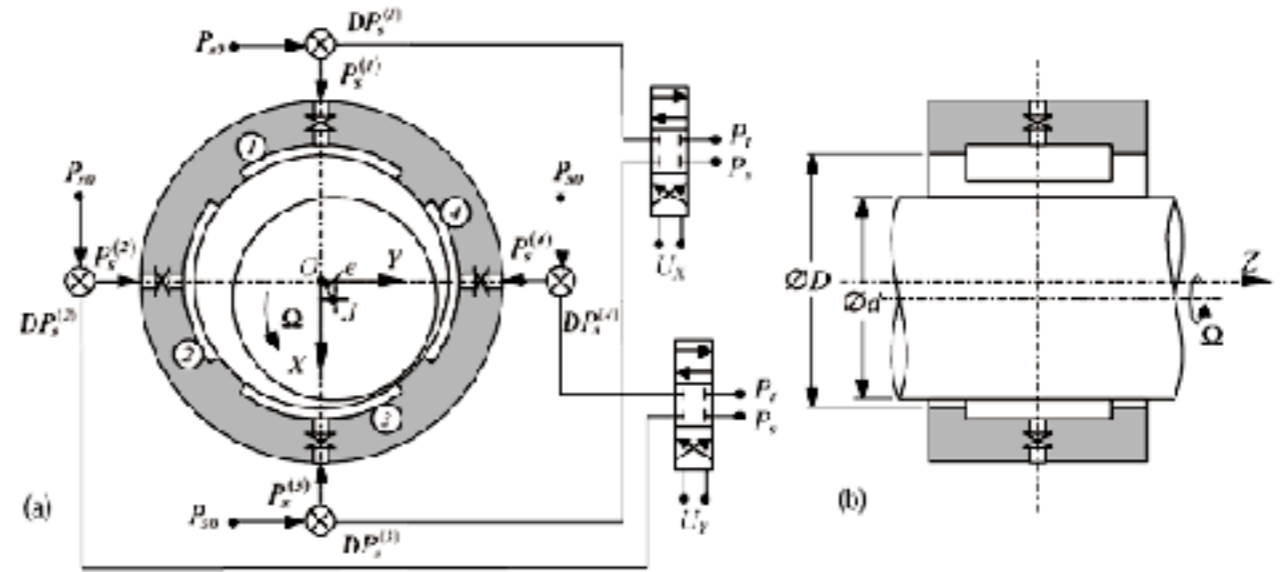
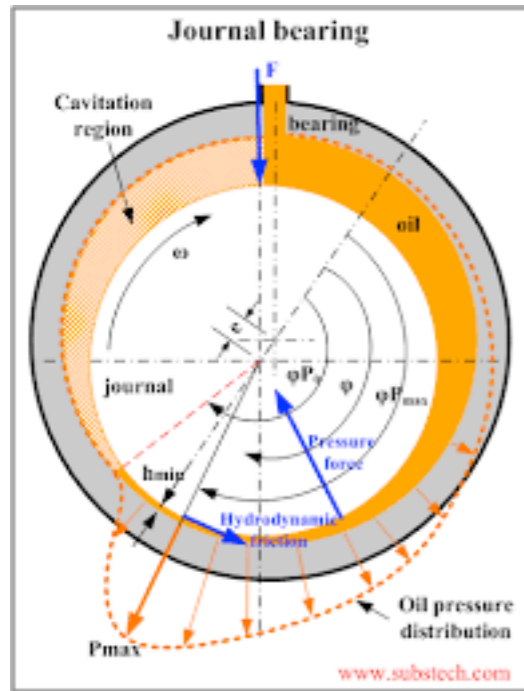
Linearizzando attorno al punto di funzionamento le forze saranno espresse dalla seguente relazione.. ricordando che le rigidzze e gli smorzamenti possono dipendere da  $\Omega$ ..

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

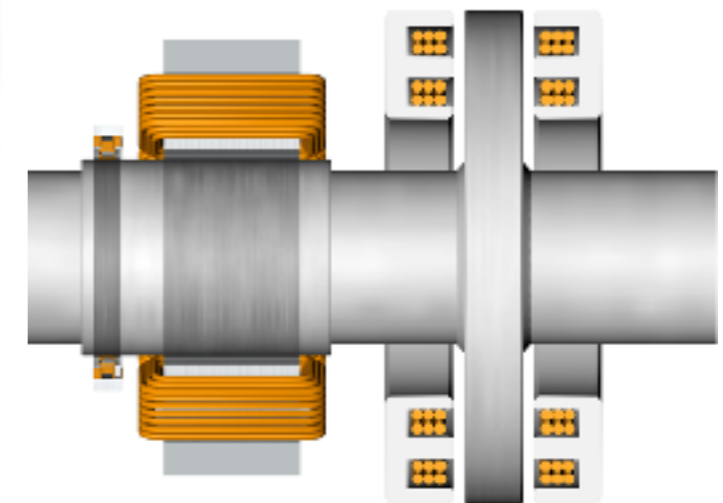
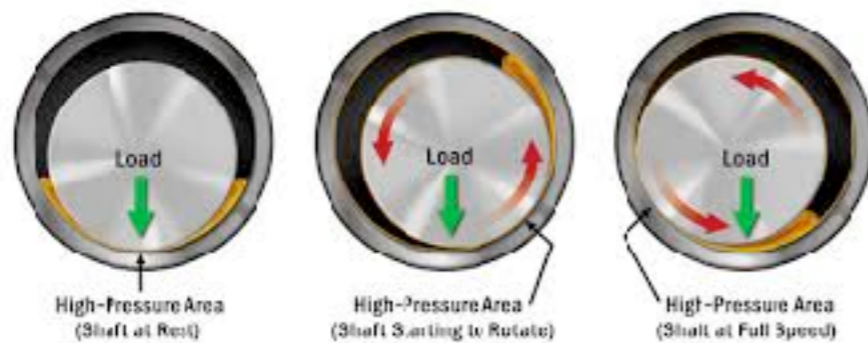
$$Q_s = -[K(\Omega)]\{q\} - [C(\Omega)]\{\dot{q}\}$$

I cuscinetti idrodinamici verranno modellati in funzione delle caratteristiche geometriche (dimensioni) e del fluido (tipo, portata, temperatura..)

# Rotodinamica - flessionale

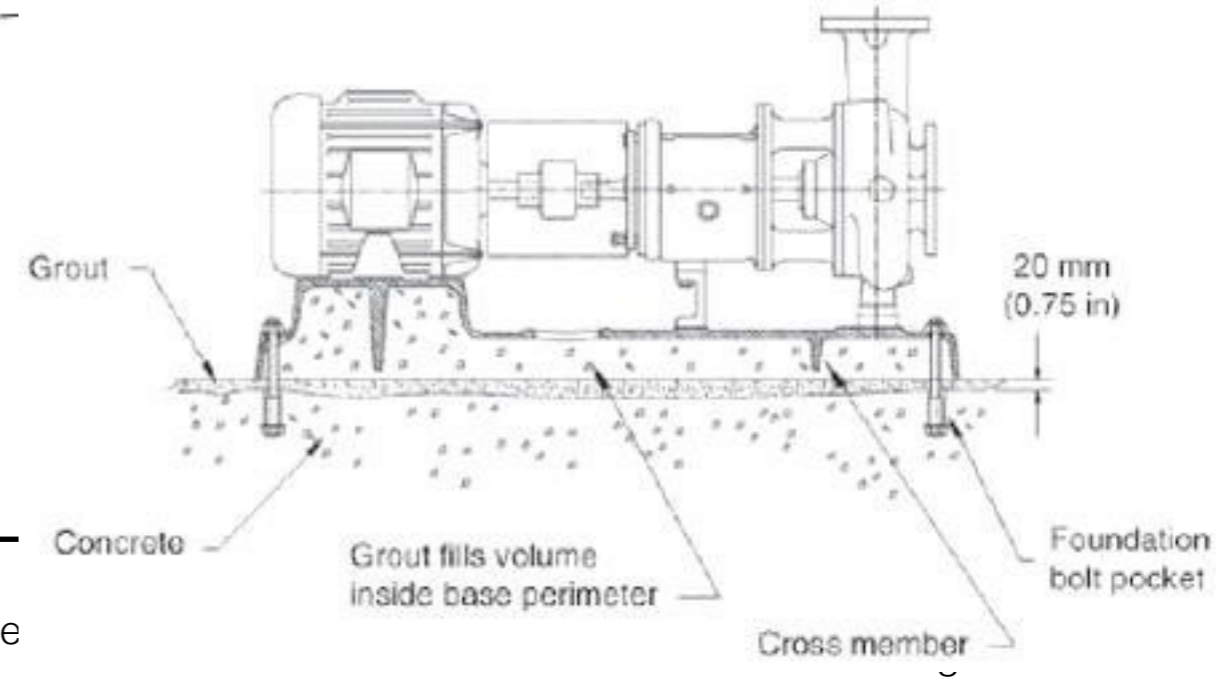
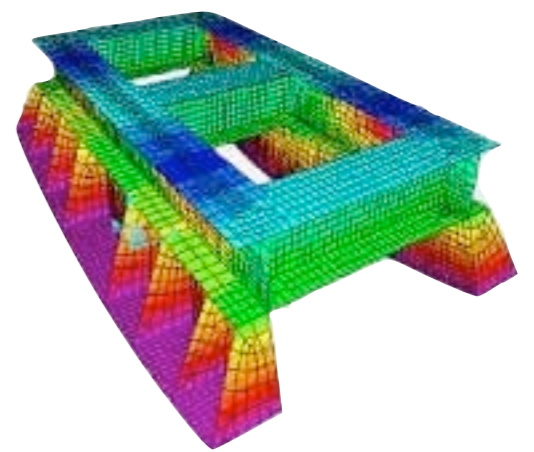
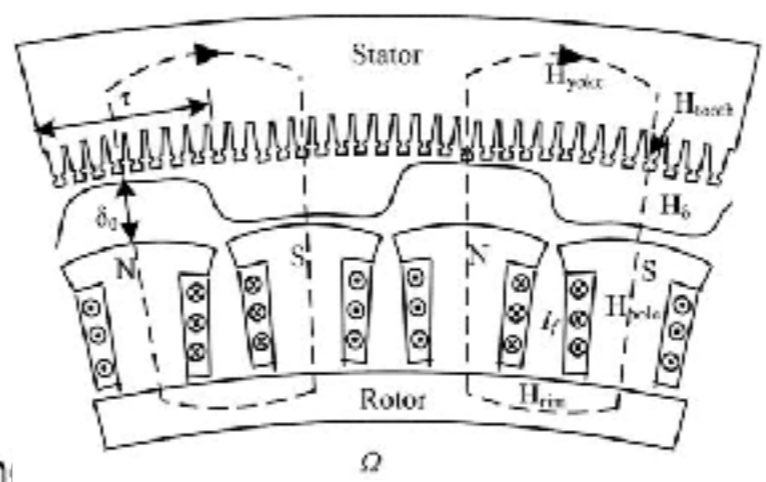
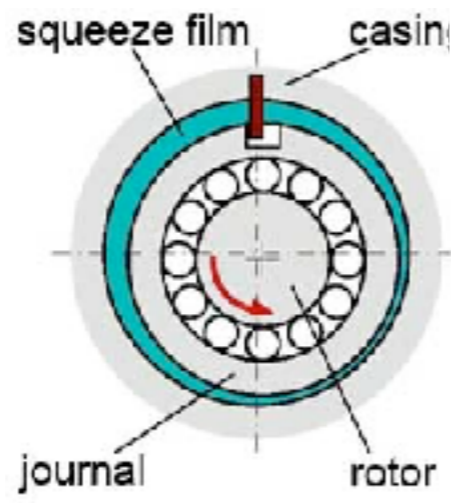
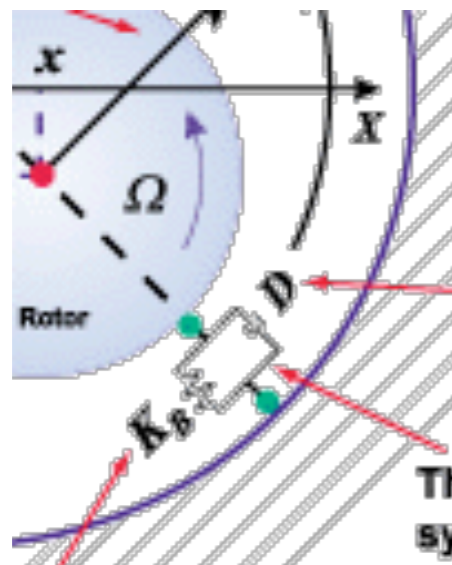


Ogni tipo di supporto avrà una modellazione diversa!



# Rotodinamica - flessionale

d.le forze generate da elementi particolari quali ad esempio la forza di **Alford** (instabilità delle turbine a gas), degli **smorzatori a filo d'olio**, dei **campi magnetici sbilanciati**, delle reazioni vincolari dei **supporti** di banco e delle **fondazioni**...

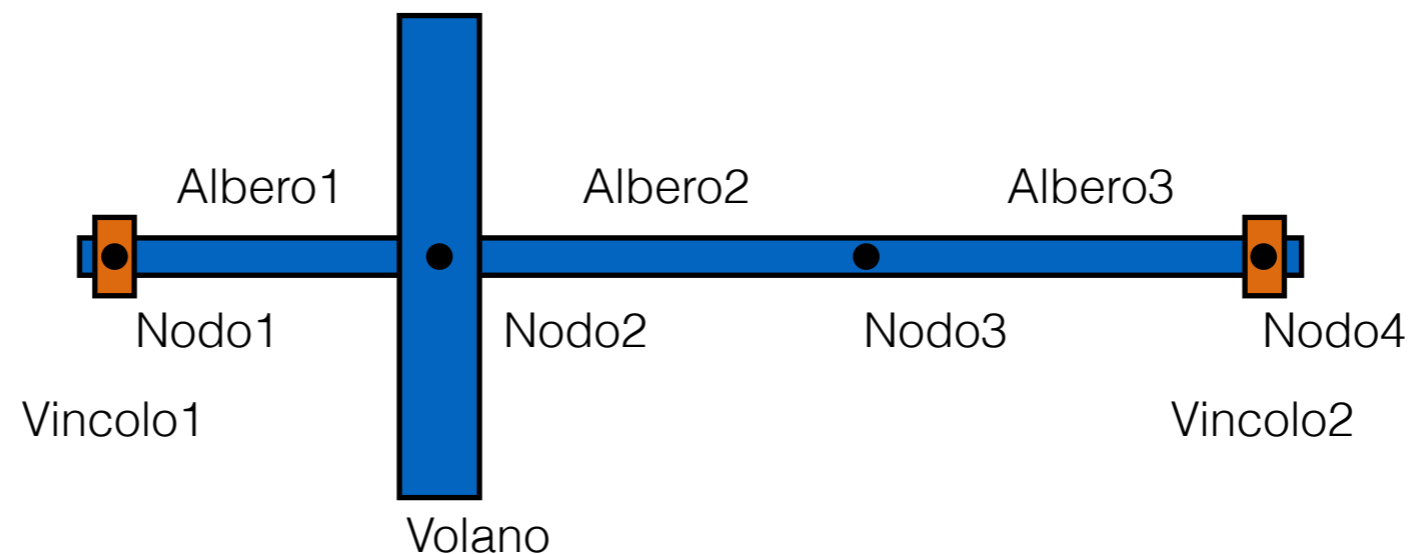
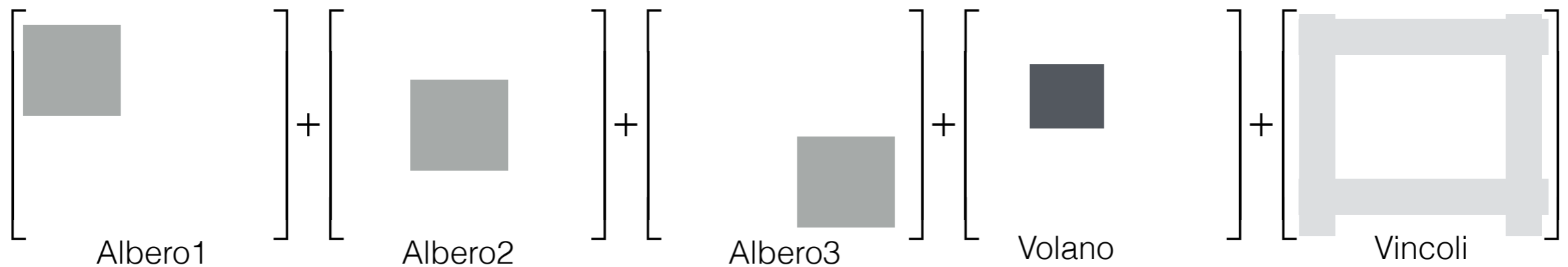


E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units  
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

# Rotodinamica - flessionale

Una volta note tutte le matrici dei diversi elementi, queste possono essere assemblate a formare il sistema completo..

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$





## Rotodinamica - flessionale

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

Dall'equazione del sistema completo si cercheranno gli autovalori (frequenze naturali) e gli autovettori (deformate modali)

$$\begin{bmatrix} C + \Omega G & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A] \frac{d}{dt} \{X\} + [B] \{X\} = \{0\}$$

Ricordarsi che le matrici dipendono da  $\Omega$  !!! e così gli autovalori trovati!  
Verificare che questi siano lontani dalle frequenze di funzionamento del rotore!!



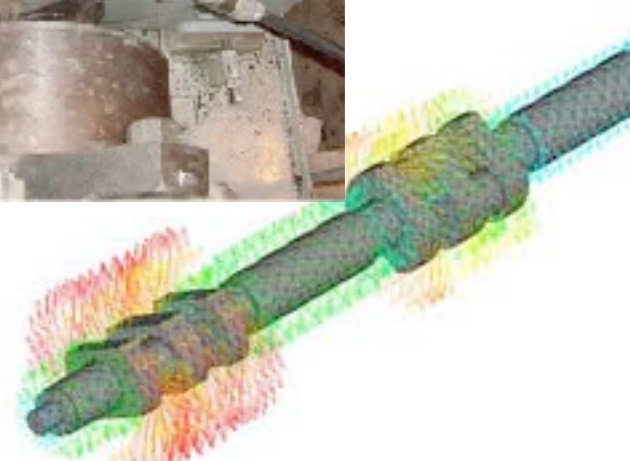
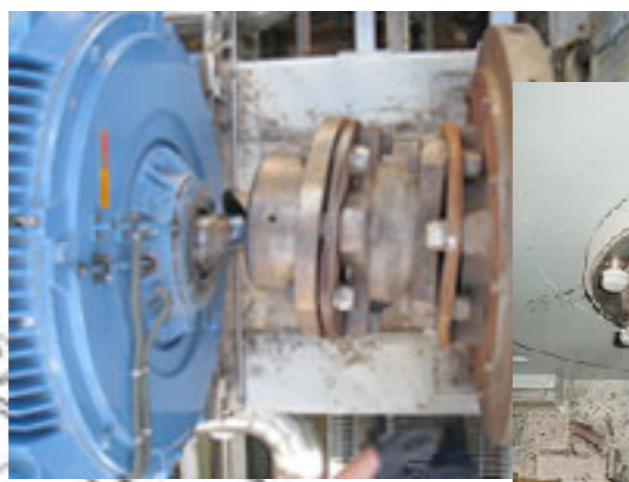
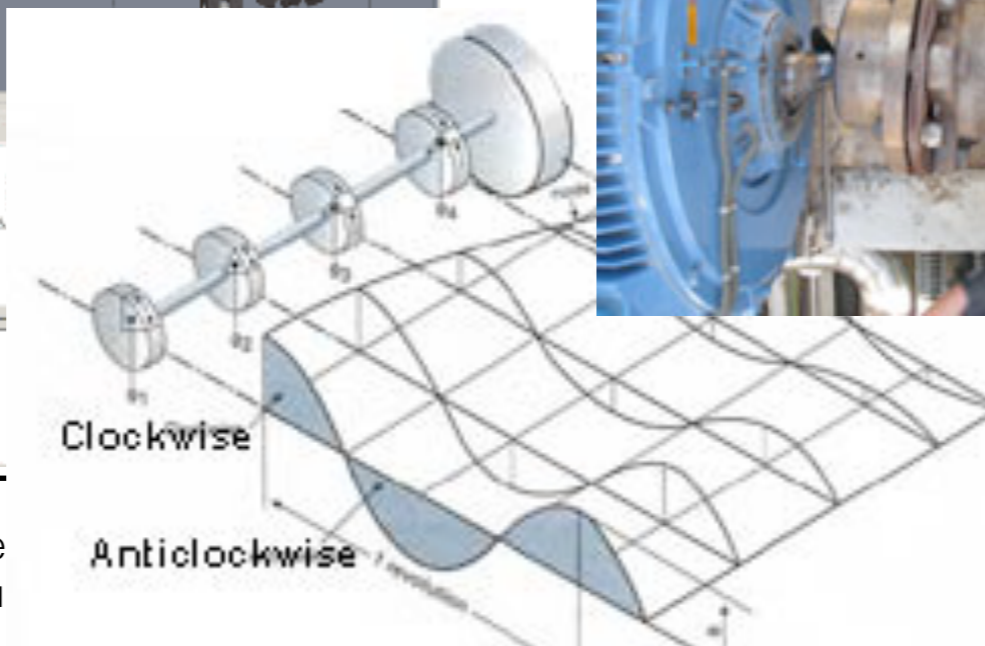
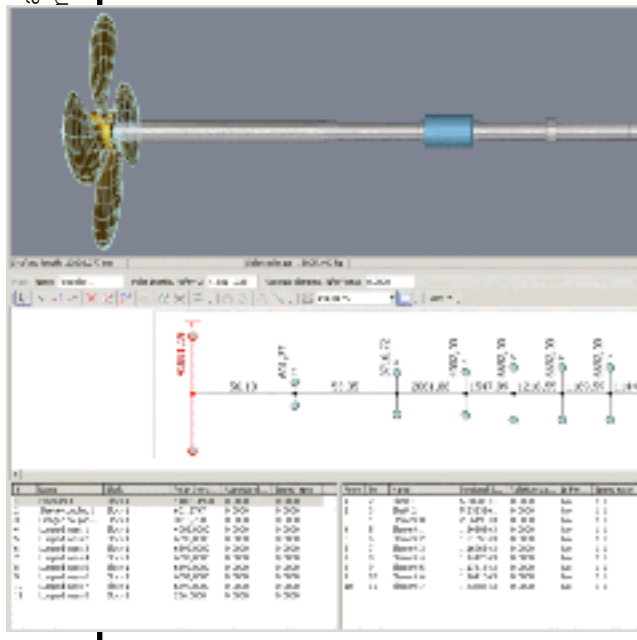


# Rotodinamica - torsionale

Non sempre i rotori subiscono deformazioni laterali, esiste la possibilità che l'asse del rotore resti rettilineo, ma i volani che lo formano ruotino relativamente tra loro.. si parla in questo caso di vibrazioni torsionali.

Sono altrettanto importanti, perché stressano gli elementi del rotore a torsione (alterna) causando problemi di fatica e di rotture.

Diventano particolarmente importanti quanto si connettono macchine differenti (mismatch tra inerzie, rigidità, torcenti..)



Vibrazioni

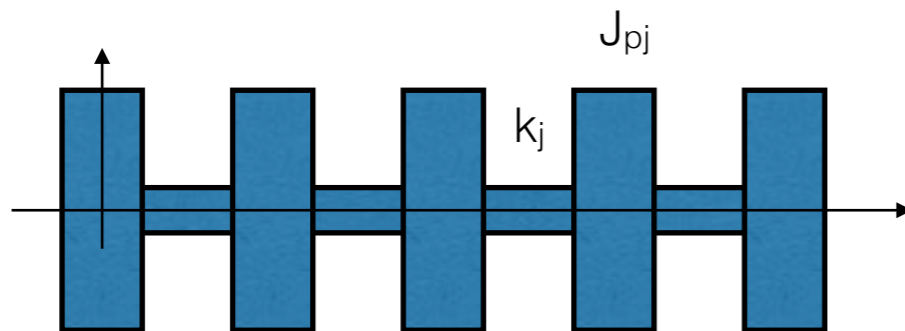
## Rotodinamica - torsionale

Anche per lo studio delle vibrazioni torsionali si procede

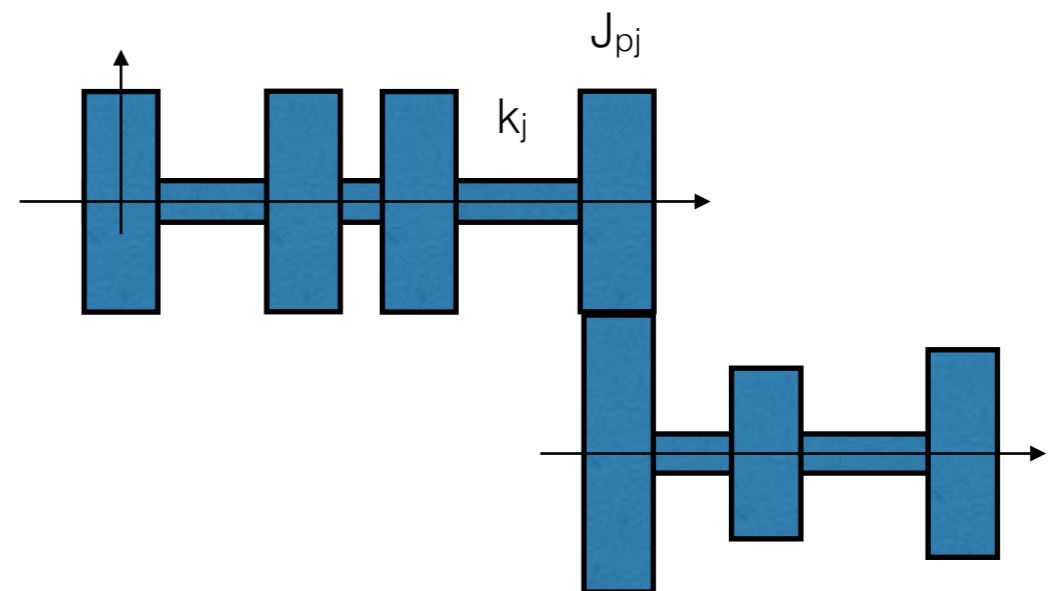
- scrivendo le equazioni di equilibrio dei elementi..
- ricercando gli autovalori e gli autovettori del sistema di equazioni.. considerando le opportune matrici di inerzia e rigidezza..

I rotori possono essere classificati in due grandi famiglie per lo studio delle vibrazioni torsionali..

..”in linea”..



..”ramificati”..



## Rotodinamica - torsionale

Anche per lo studio delle vibrazioni torsionali si procede

- scrivendo le equazioni di equilibrio dei elementi..
- ricercando gli autovalori e gli autovettori del sistema di equazioni.. considerando le opportune matrici di inerzia e rigidezza..

traslazionale

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$k_j = \frac{F}{x} = \frac{EA}{L}$$

$m_j \quad J_{pj}$

$k_j \quad k_{\theta j}$

torsionale

$$M = \begin{bmatrix} I_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p4} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{\theta 0} + k_{\theta 1} & -k_{\theta 1} & 0 & 0 \\ -k_{\theta 1} & k_{\theta 1} + k_{\theta 2} & -k_{\theta 2} & 0 \\ 0 & -k_{\theta 2} & k_{\theta 2} + k_{\theta 3} & -k_{\theta 3} \\ 0 & 0 & -k_{\theta 3} & k_{\theta 3} \end{bmatrix}$$

$$k_{\theta j} = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{L}$$

..formule approssimate...  
"Blevins 1979"

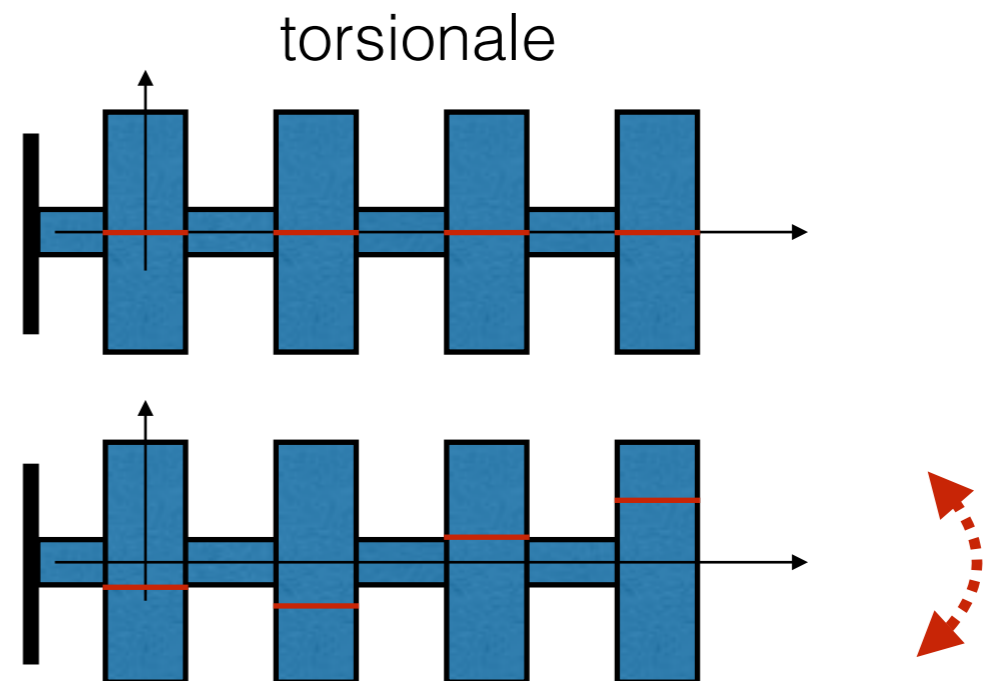
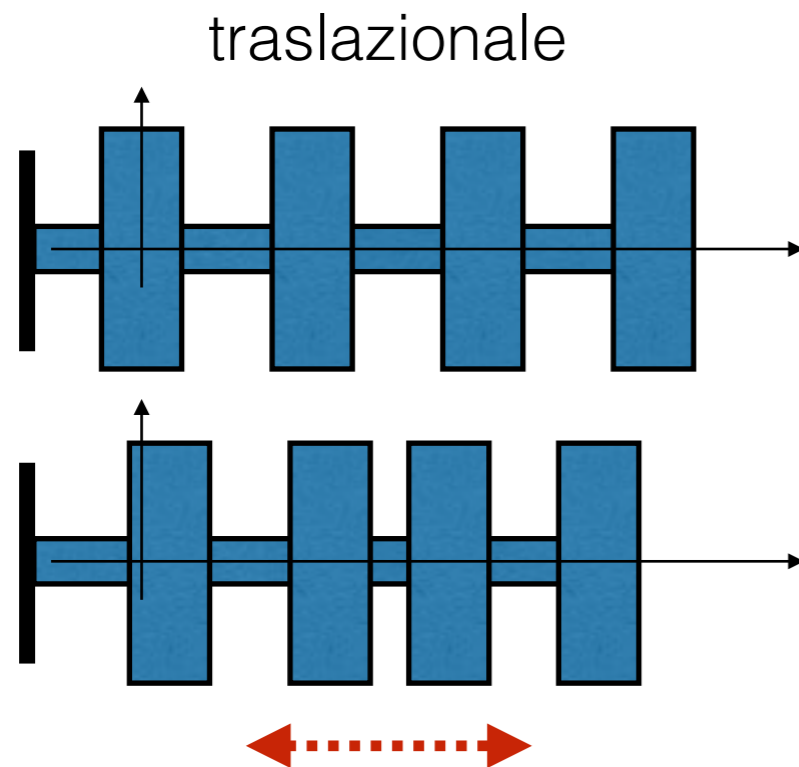
# Rotodinamica - torsionale

In entrambi i casi si tratta di ricercare gli autovalori del sistema di equazioni: già visto..

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

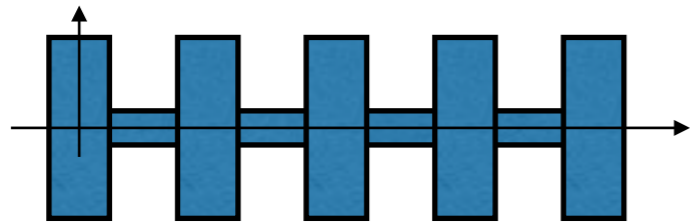
Non ci sono forzanti, smorzamento e effetti giroscopici...  
Le matrici possono tener conto di anisotropie..

$$\lambda[M]\{\varphi\} = [K]\{\varphi\}$$

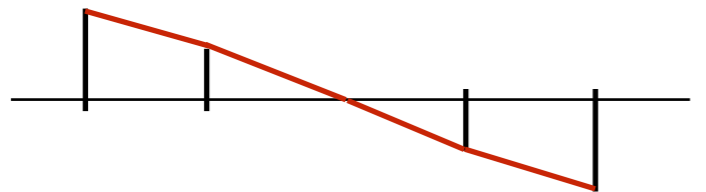


# Rotodinamica - torsionale

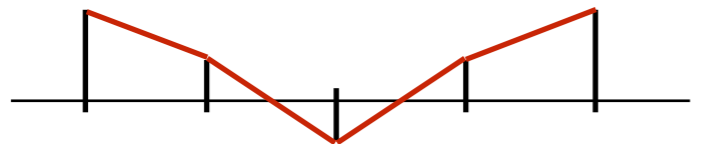
Esempio.. forme modali torsionali rotore con 5 volani



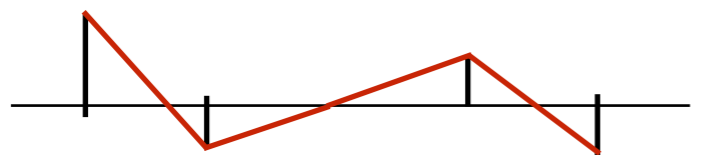
I modo (rigido)



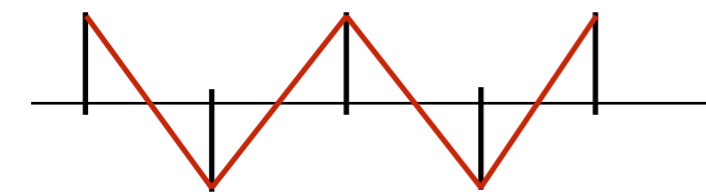
II modo (1 nodo)



III modo (2 nodi)



IV modo (3 nodi)



V modo (4 nodi)

Esistono diversi metodi iterativi per il calcolo delle vibrazioni torsionali..

Holzer..

Myklestad..

Prohl...

e con codici FEM..

..N volani..2N autovalori..N autovettori distinti  
..se il rotore non è vincolato al mondo esterno..  
modo di corpo rigido!

..se N è il modo che si considera,  
ci sono (N-1) nodi nella deformata!

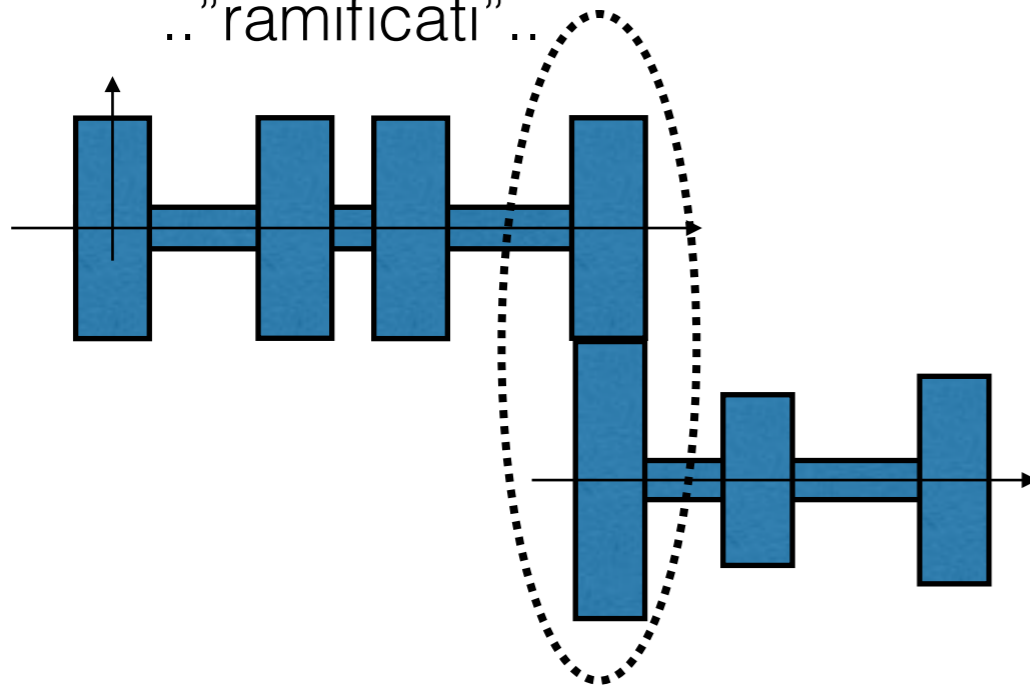


# Rotodinamica - torsionale

Nello studio dei sistemi rotanti è possibile trovare sistemi ramificati (in presenza di riduttori, divisori di coppia, derive di utenze)...

Bisogna trasformare tali sistemi in sistemi lineari equivalenti, tenendo conto del rapporto di trasmissione delle ruote dentate ingranate

.. "ramificati" ..



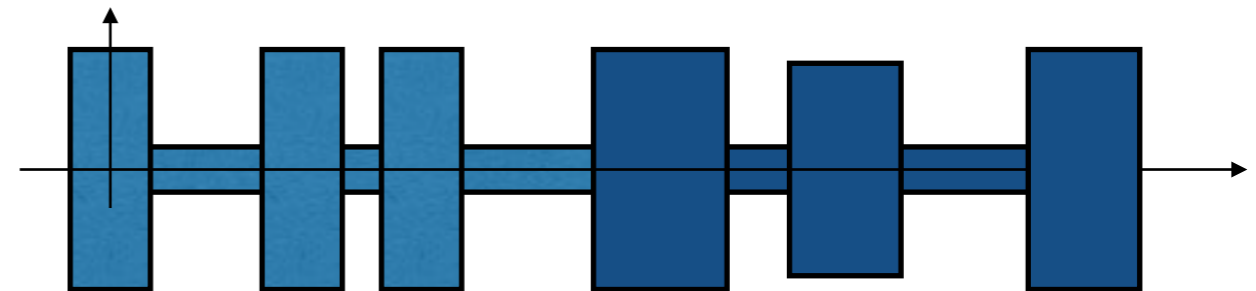
$$\frac{R_i}{N_i} = \frac{R_j}{N_j}$$

$$R_j \omega_j = -R_i \omega_i$$

$$\gamma = \frac{N_i}{N_j}$$

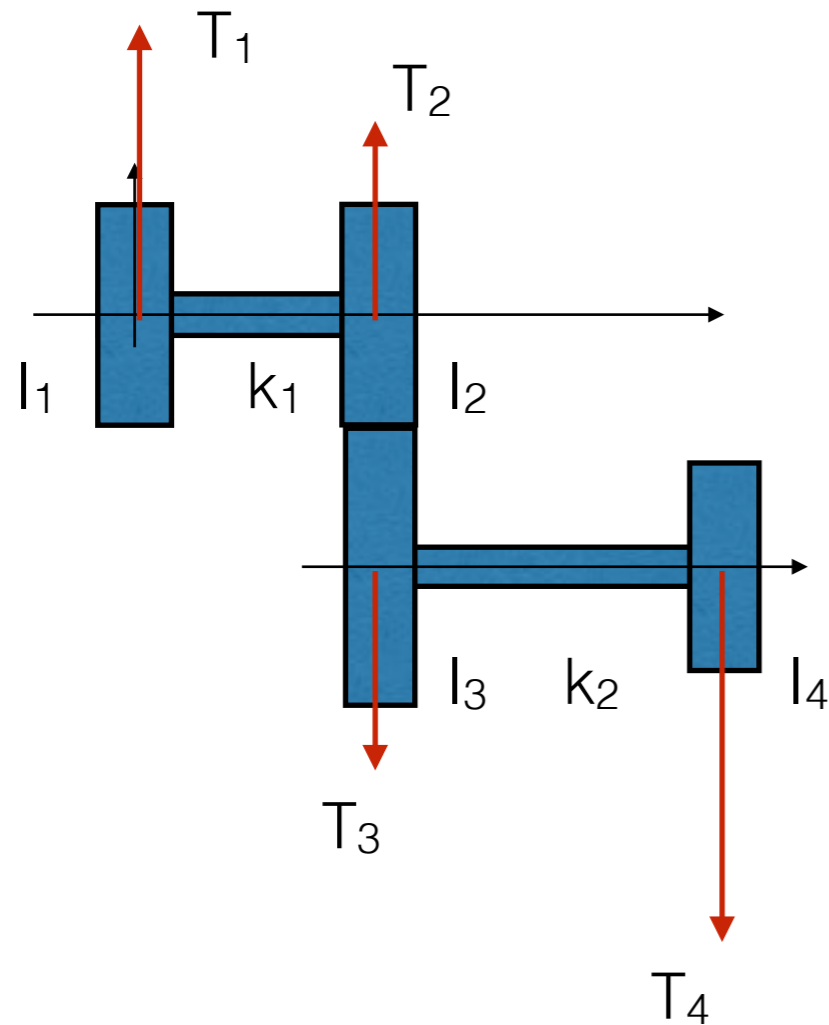
i entrante  
j uscente

.. "in linea" equivalente ..



# Rotodinamica - torsionale

Esempio..trovare il sistema in linea equivalente al sistema ramificato di figura:



$R_2$  ed  $R_3$  sono raggi delle ruote 2 e 3..  
 $N_2$  ed  $N_3$  sono i rispettivi numeri dei denti..

Sia  $\gamma$  il rapporto di trasmissione  $N_2/N_3$   
oppure  $R_2/R_3$

I quattro volani non sono più indipendenti!  
Le velocità tangenziali di  $I_2$  e  $I_3$  sono uguali!

Vale la relazione:  $\dot{\theta}_3 = -\gamma\dot{\theta}_2$

(NB c'è il segno - perché cambia il verso di rotazione!)

## Rotodinamica - torsionale

Le equazioni del moto dei 4 volani sono le seguenti..

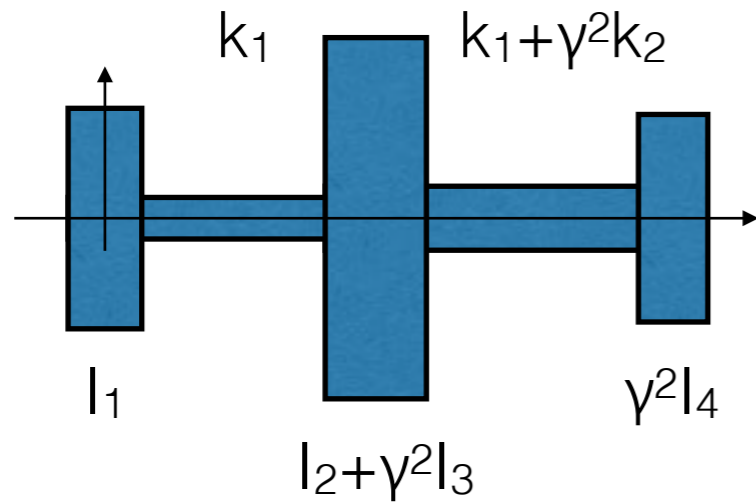
$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{23} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2 (\theta_3 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{23} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2 (\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{array} \right.$$

Ricordando che  $\theta_3 = -\gamma\theta_2$        $\theta_4 = -\gamma\theta_3$

facendo l'equilibrio dei momenti (sottraendo  $\gamma[3]-[2]$ ) si ottiene..

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + \gamma^2 I_3) \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) + \gamma^2 k_2 (\theta_2 - \theta_3') = T_2 - \gamma T_3 \\ \gamma^2 I_4 \ddot{\theta}_3' + \gamma^2 k_2 (\theta_3' - \theta_2) = -\gamma T_4 \end{array} \right.$$

# Rotodinamica - torsionale



..ottenendo il modello “in linea” equivalente..

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + \gamma^2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + \gamma^2 k_2 & -\gamma^2 k_2 \\ 0 & -\gamma^2 k_2 & \gamma^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 - \gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix}$$

..esiste una formulazione matriciale per i sistemi ramificati più complessi che porta alla scrittura equazioni per di sistemi “in linea” equivalenti.. (matrice forze interne, vincoli e rapporti di trasmissione)

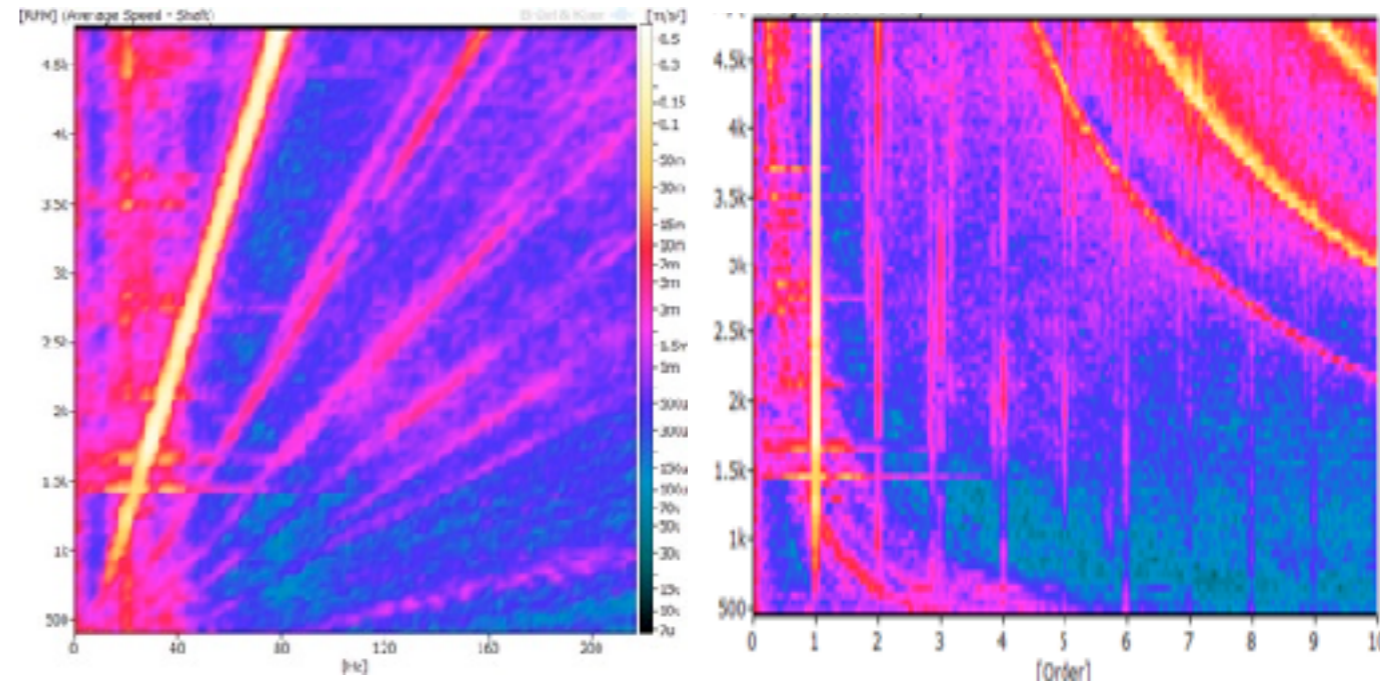
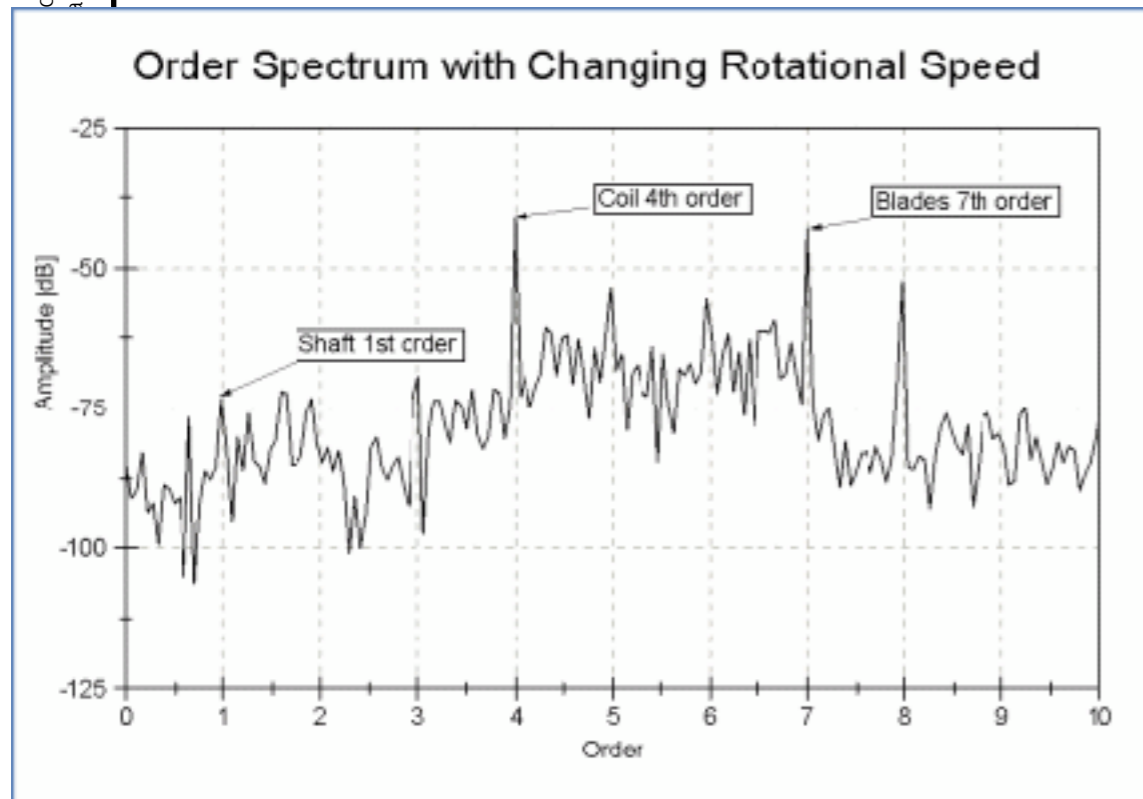
..analogamente ai sistemi lineari... si calcolano anche le risposte forzate!!

## Rotodinamica - torsionale

Le macchine rotanti hanno generalmente due modalità di funzionamento:  
 a regime costante (es. alternatore / turbina produzione elettricità)  
 a regime variabile (es. motore autoveicolo)..

..in entrambi i casi è interessante tracciare l'andamento nel tempo il livello (RMS) delle componenti armoniche delle forze che agiscono su queste..  
 (le vibrazioni che si generano e che bisogna controllare dipendono da queste forze!)

..effettuando l'analisi agli ordini!  
 (ricordiamo il legame tra il regime di funzionamento e le risonanze del sistema)



## Macchinario rotante - analisi agli ordini

Un ordine è un fenomeno che si presenta un certo numero di volte all'interno di un giro completo del rotore..

ad esempio..

lo squilibrio avrà un periodicità 1x

l'eccitazione delle palette una periodicità 7x

l'eccitazione elettrica una periodicità 4x

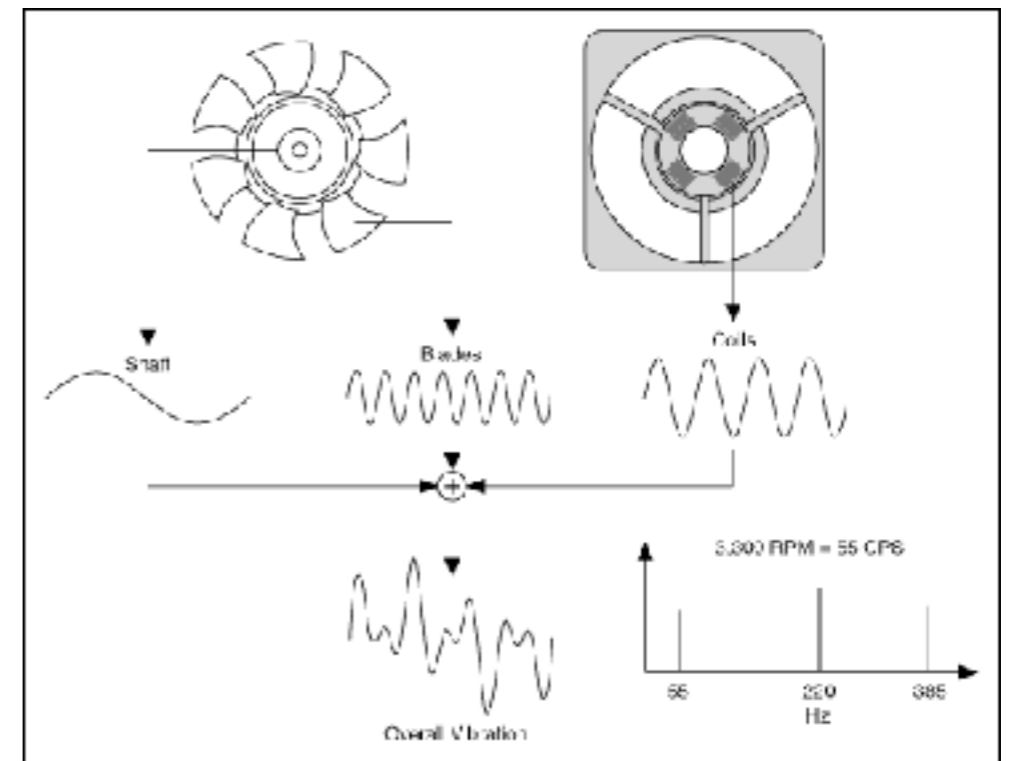
...indipendentemente dalla velocità di rotazione del ventilatore!

indipendentemente dalle risonanze del sistema!

**NB** gli ordini possono non essere numeri interi!

rapporto di trasmissione 1:2.3

ci saranno gli ordini x2.3 x4.6 x6.9...

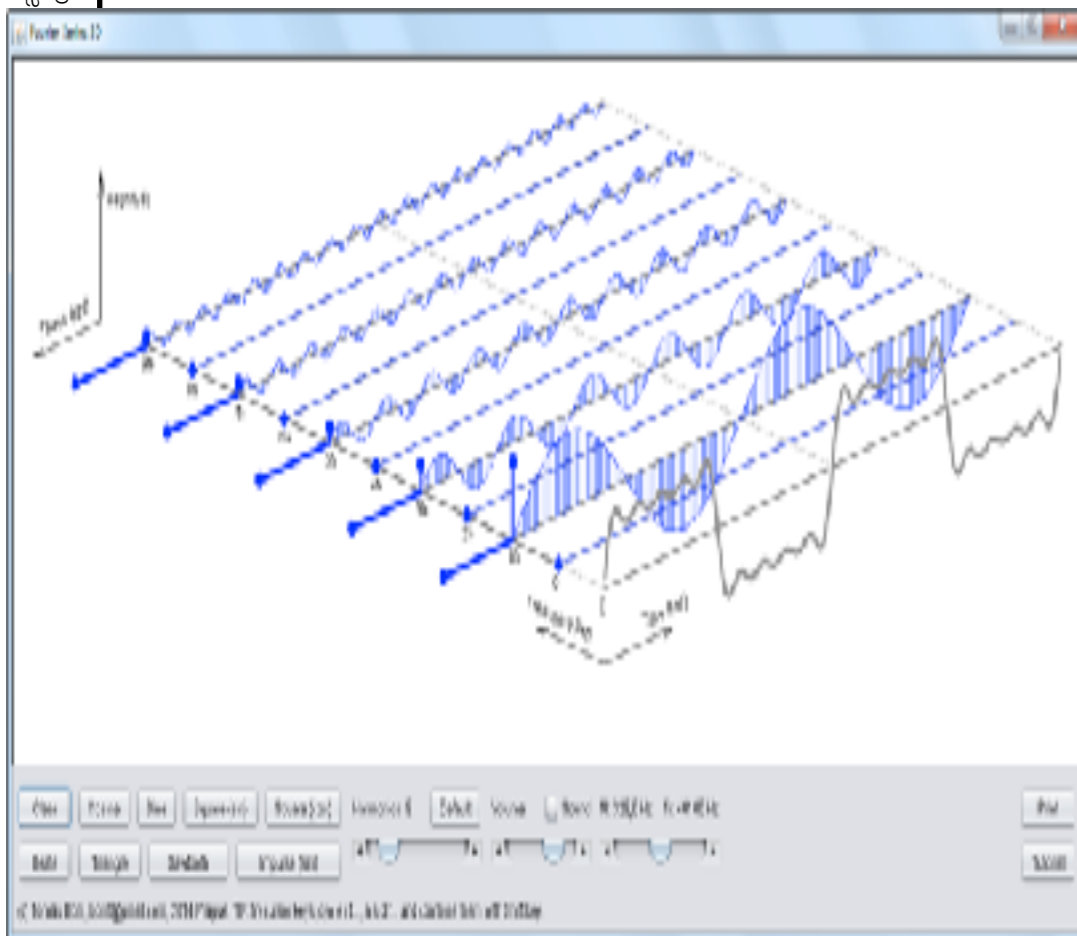




## Macchinario rotante - analisi agli ordini

Solitamente il segnale vibrazione misurato su una macchina, viene campionato a brevi intervalli di tempo equispaziati per fare l'analisi di Fourier e trovarne lo spettro in frequenza..(..more on this later on..)

Se la velocità della macchina è variabile il contenuto in frequenza del segnale cambia..(cambia lo spettro)  
e contemporaneamente cambia anche il numero di campioni per rotazione del rotore..(cambia la risoluzione)



Si vuole misurare la velocità istantanea del rotore (tachimetrica)  
e si vuole eliminare l'influenza delle variazioni di velocità  
(ricampionamento nel dominio dell'angolo)

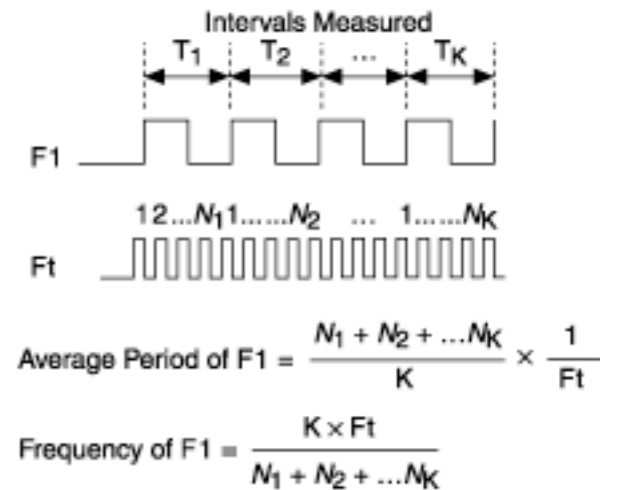
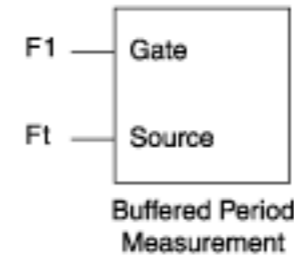
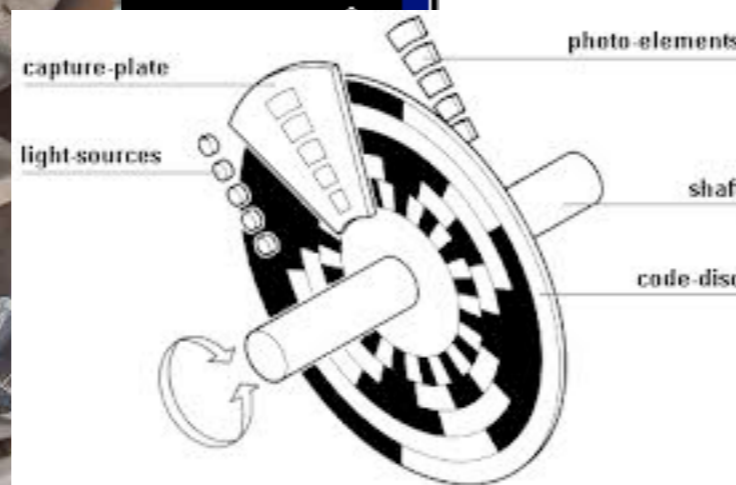
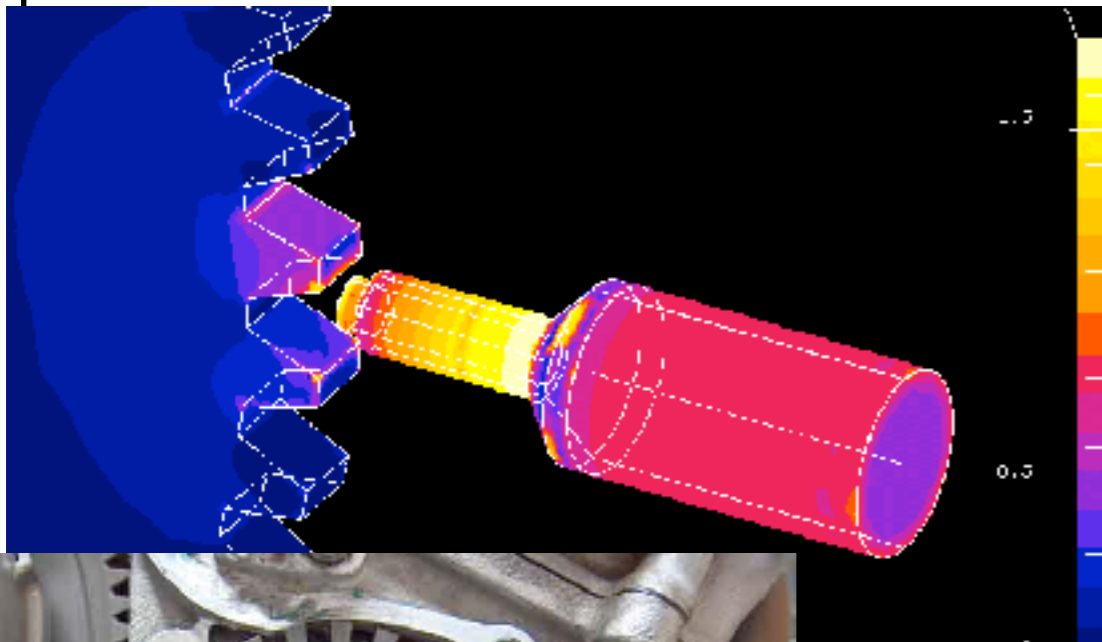
# Macchinario rotante - analisi agli ordini

Tachimetrica: si misura l'intervallo di tempo tra due impulsi successivi di un trasduttore

Sensori Induttivi, Capacitivi, Ottici, Counter...

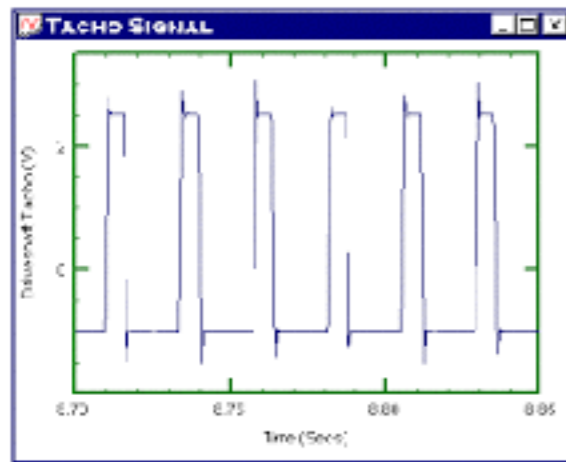
$$v_r(t) = \frac{60}{N_p (t_2 - t_1)}$$

$N_p$  numero di impulsi per giro



# Macchinario rotante - analisi agli ordini

Pick up elettromagnetico/ottico che fornisce esattamente l'intervallo di tempo tra due impulsi che definiscono un giro o una frazione di giro (in funzione della precisione con la quale si desidera tracciare l'andamento degli ordini)



es.

1 impulso giro sulla chiavetta di calettamento

8 impulsi giro sui bulloni di un giunto

60 impulsi giro su una ruota fonica

..

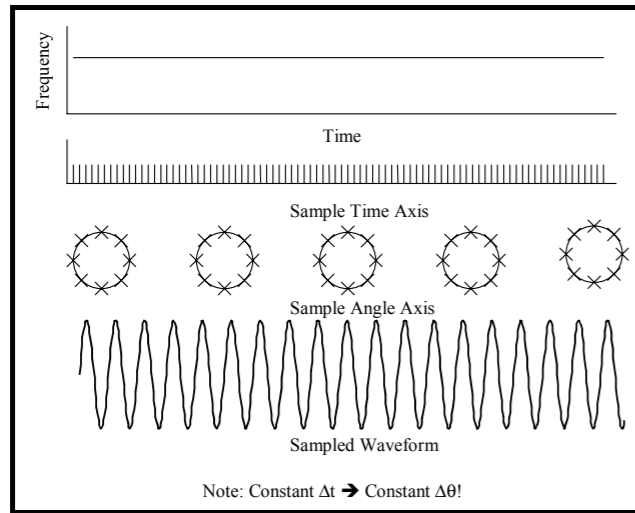
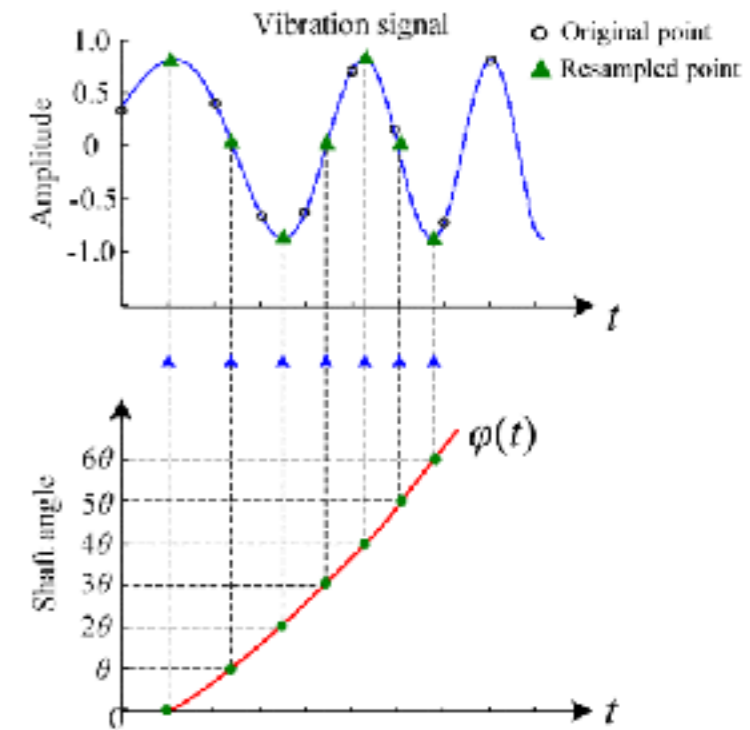
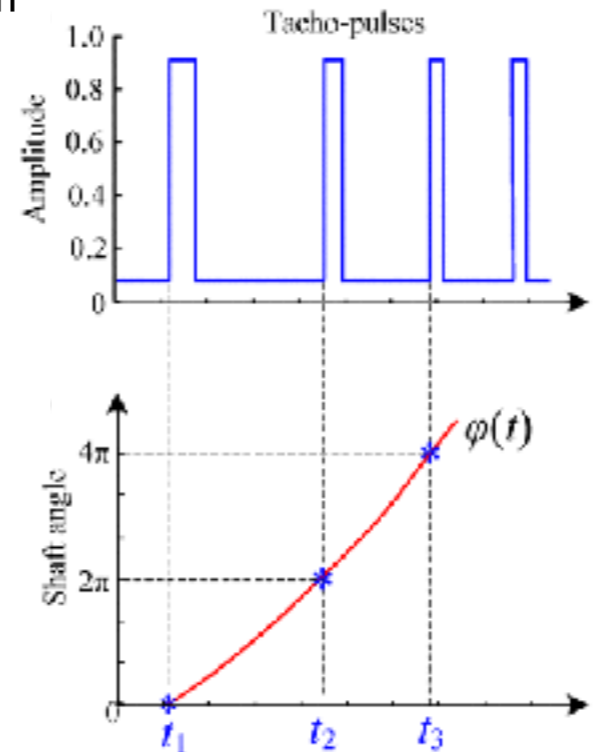
65536 impulsi giro su un encoder ottico

..

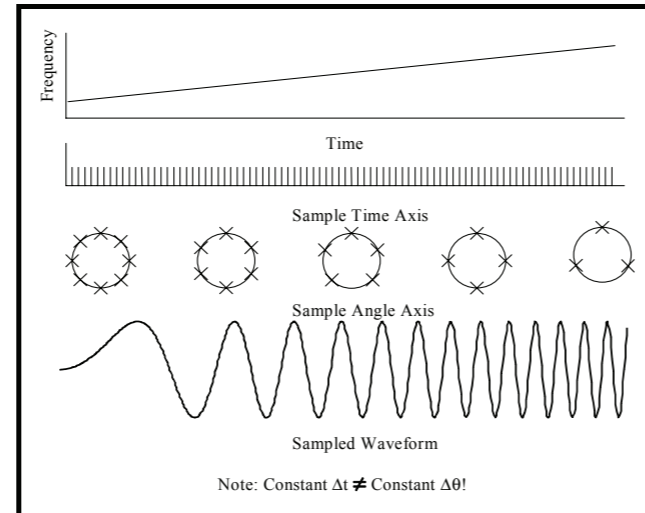


# Macchinario rotante - analisi agli ordini

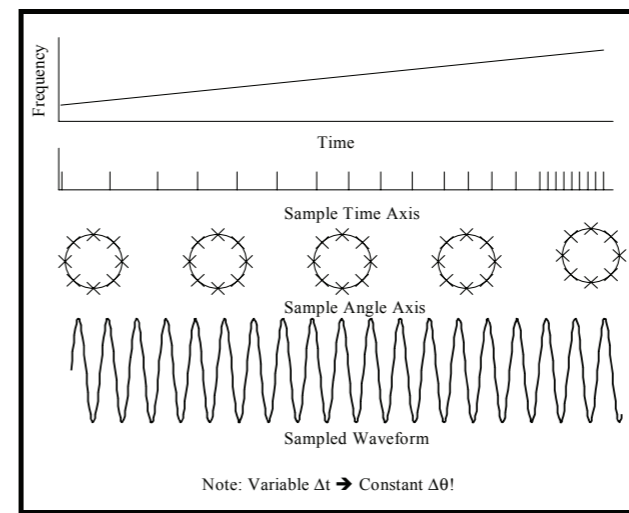
Ricampionamento nel dominio dell'angolo: si fa in modo che in un giro, indipendentemente dalla sua durata di questo ci siano N campioni  $\Delta t \rightarrow \Delta\theta$



RPM costante tempo



RPM variabile tempo



RPM variabile angolo

## Regime Stazionario

Ac. Tempo  
(equispaziata t)

Aggiunta Tachimetrica  
(equispaziata t)



Trasformata di Fourier

## Regime NON Stazionario

Ricampionamento nell'angolo  
(equispaziato nell'angolo)

Trasformata di Fourier

Spettro in Frequenza

(risoluzione in frequenza dipende da numero di campioni acquisiti)  
(range di frequenza dipende da frequenza di acquisizione)

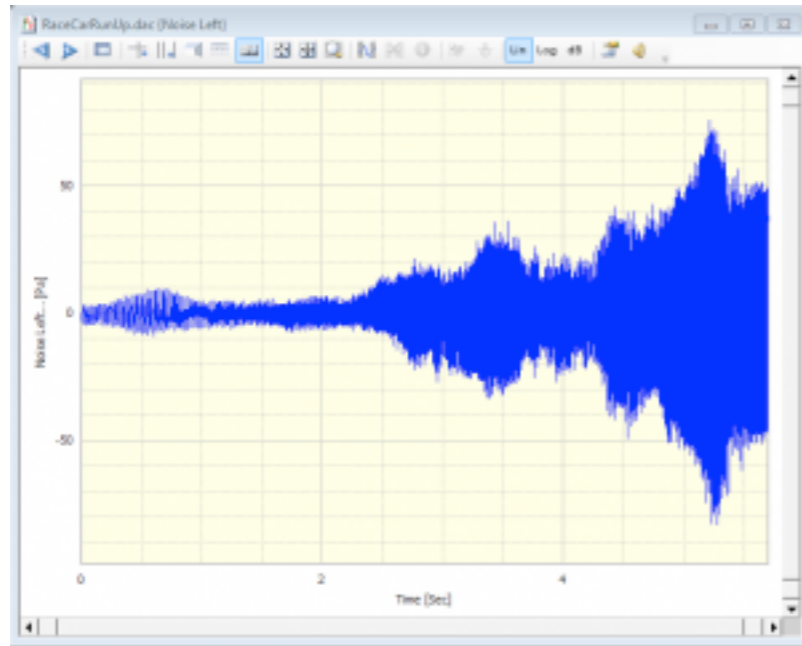
Spettro in Ordine

(risoluzione in ordine dipende da numero di giri acquisiti)  
(range di ordini dipende da numero di campioni in un giro)

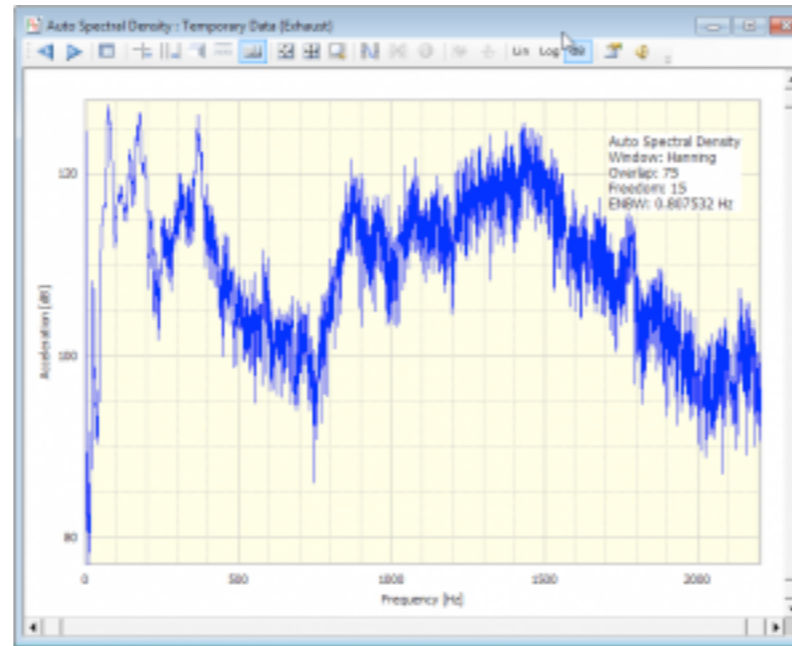


# Macchinario rotante - analisi agli ordini

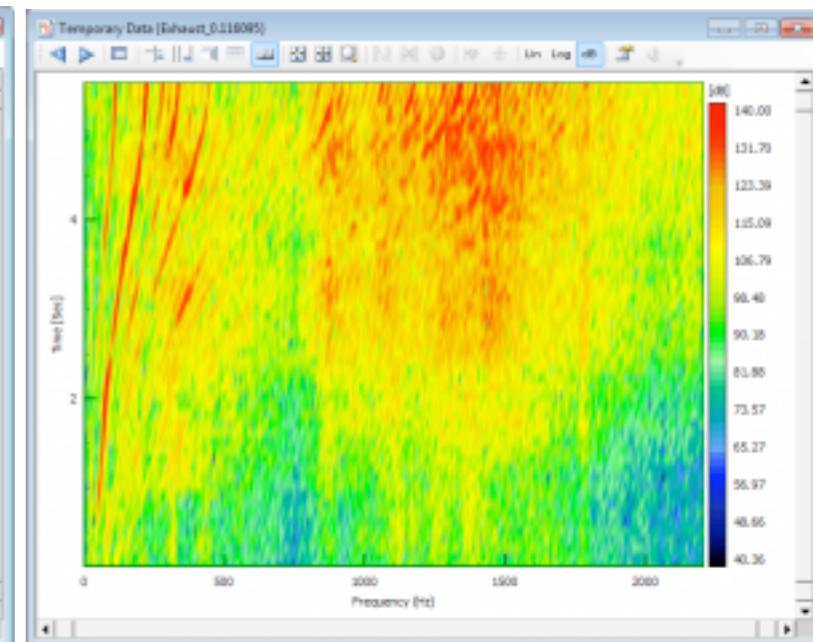
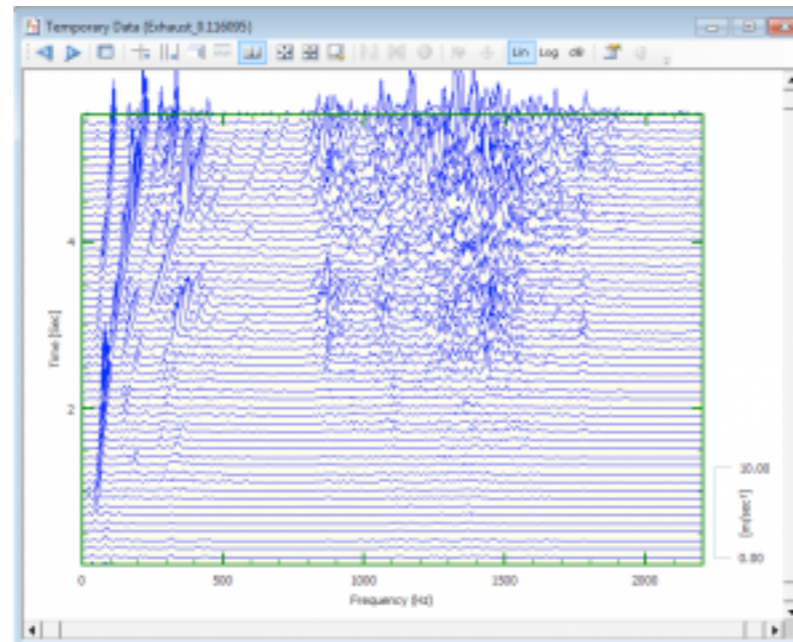
Segnale nel tempo..  
run up di un macchinario



Segnale in frequenza..  
diversi contributi in frequenza... spettro rumoroso



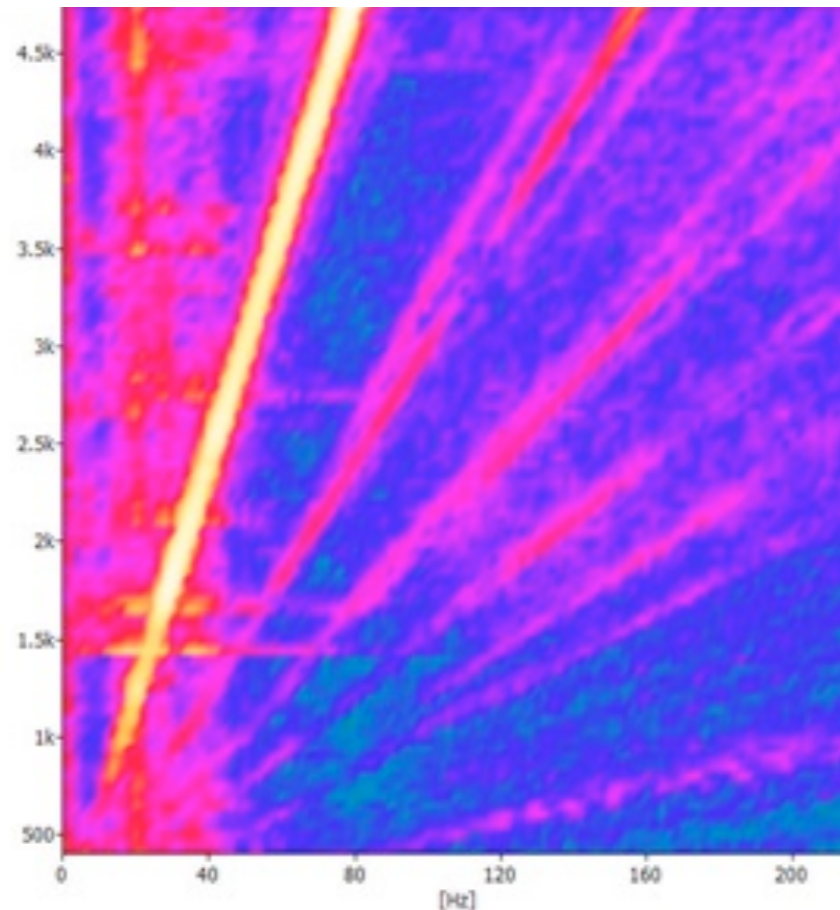
Segnale in frequenza..  
(STFT)  
al variare di RPM varia  
il contenuto spettrale





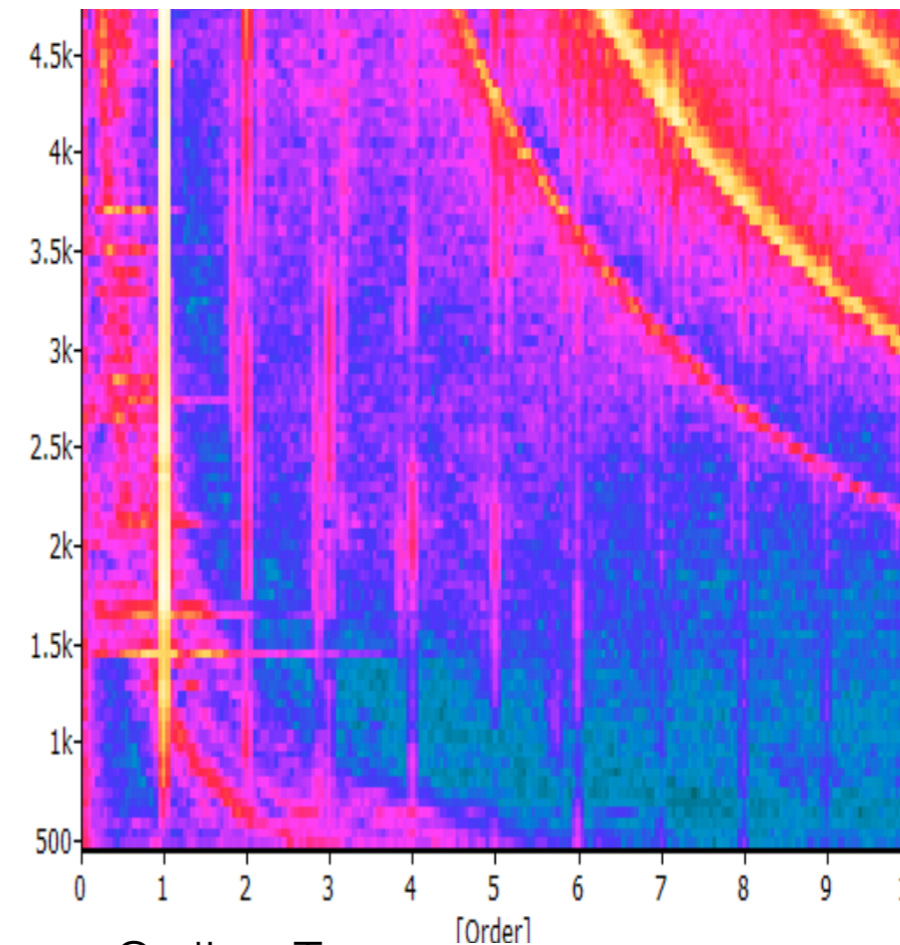
# Macchinario rotante - analisi agli ordini

Squilibrio residuo  
in run-up



Frequenza-Tempo  
La frequenza del fenomeno dominante  
varia durante la rampa

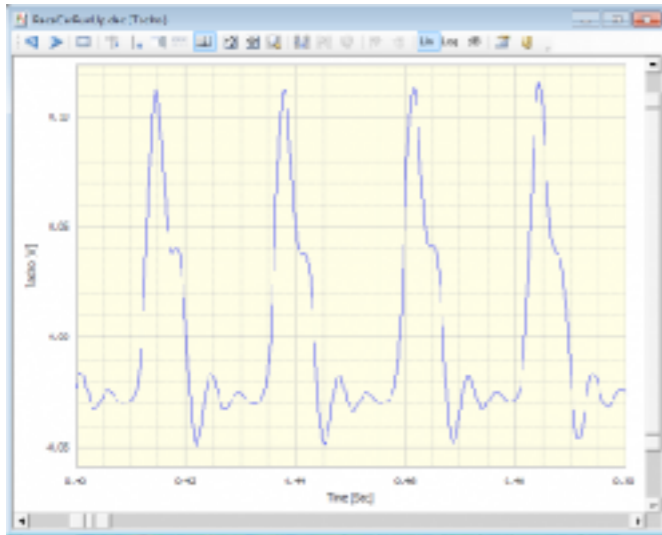
Frequenze di risonanza  
del sistema



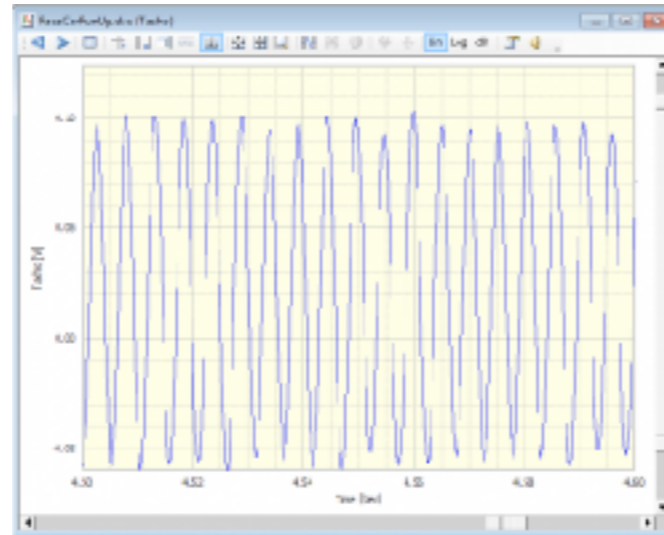
Ordine-Tempo  
L'ordine 1x squilibrio resta dominante  
durante la rampa

# Macchinario rotante - analisi agli ordini

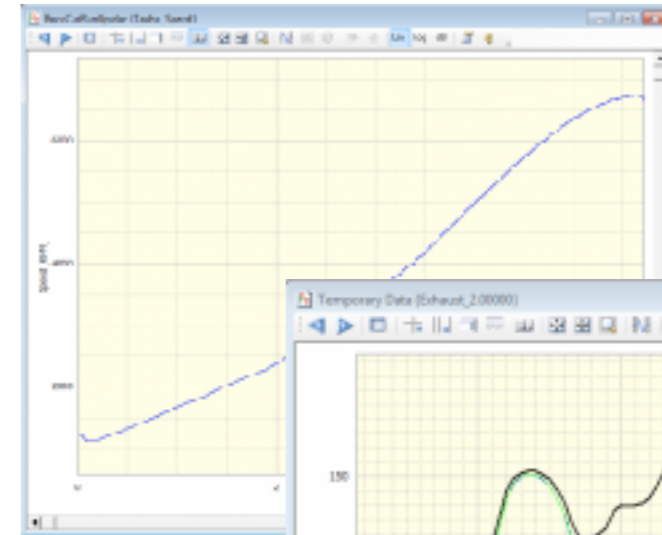
Tachimetrica a bassa velocità



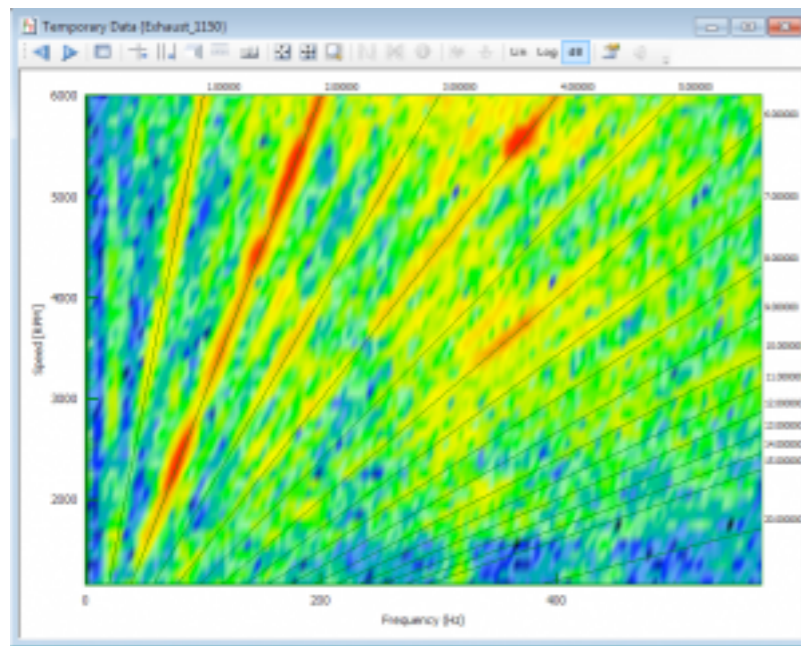
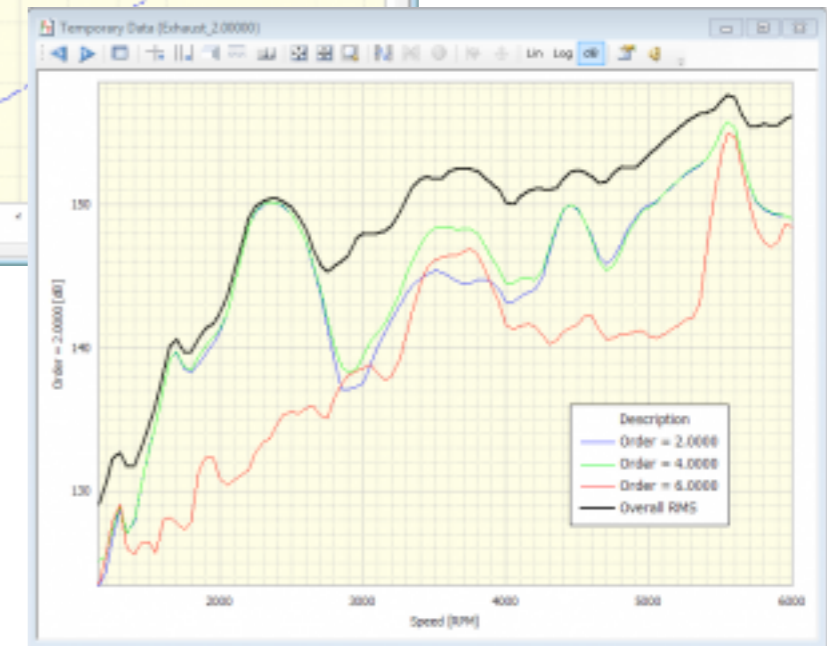
Tachimetrica a alta velocità



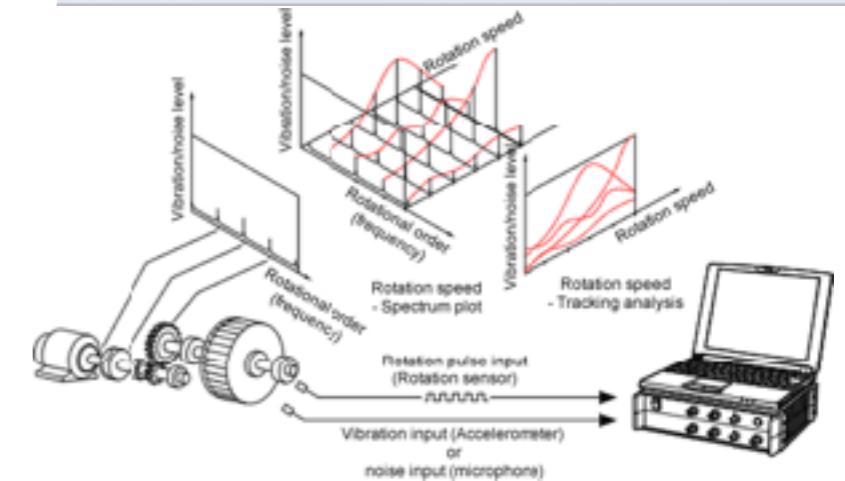
Profilo di velocità



Ordini



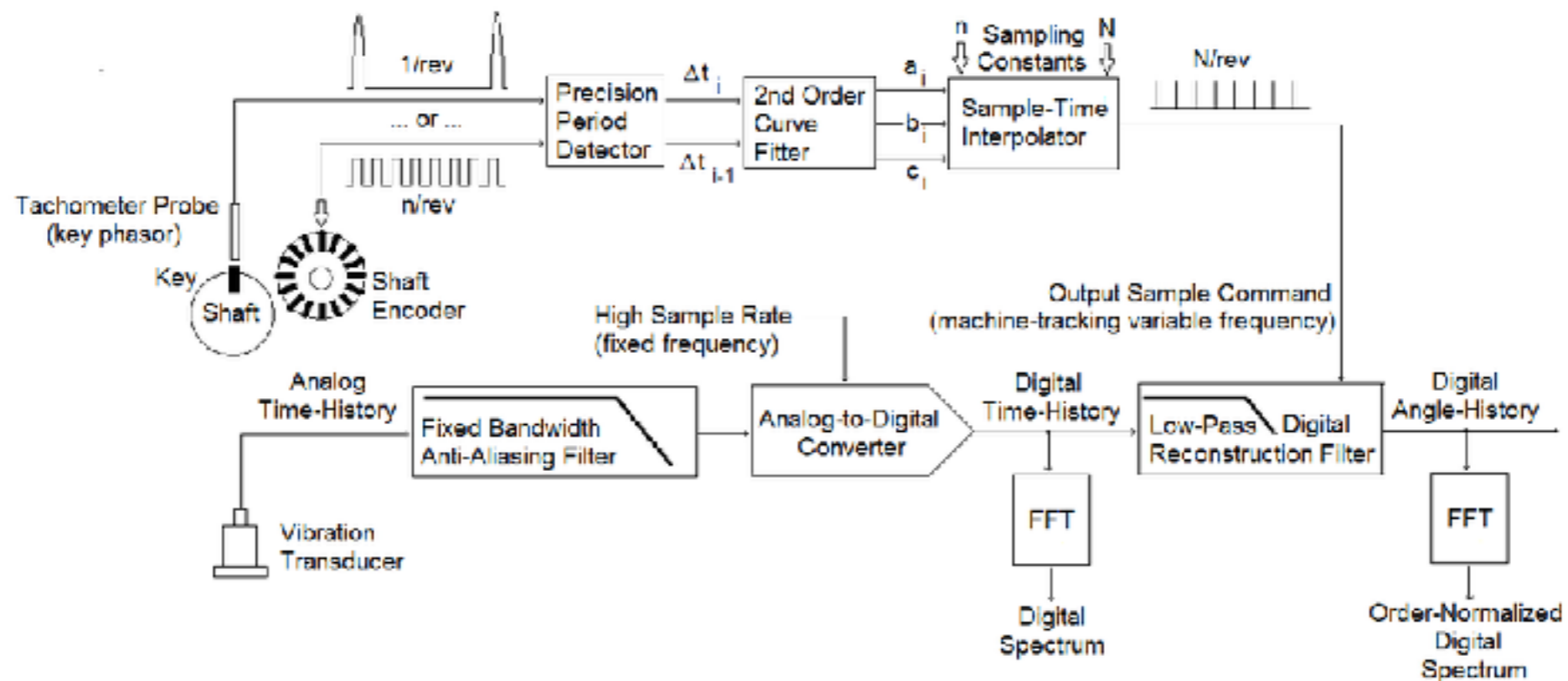
Nello spettrogramma si vede cambiare frequenza e ampiezza dell'ordine in funzione della velocità



E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units  
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

## Macchinario rotante - analisi agli ordini

Lo schema generale di un'acquisizione dati per l'analisi agli ordini è un po' più articolato di una semplice misura di vibrazioni



Come esiste la risoluzione in frequenza.. esiste la risoluzione in ordine.

Come si aumenta la risoluzione in ordine??

mega.nz  
luigi\_matto@libero.it  
MDVbregant

