

# BASI per il corso

## SPAZI VETTORIALI

Spazio vettoriale  $V$  def. su  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}, \dots$ )

è un INSIEME di oggetti che chiamiamo VETTORI

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \in V \quad \alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R}$$

su cui definiamo le operazioni  $+$  e "prodotto per un numero":

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &\in V & \text{A.c.} & \alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2 \\ \alpha\vec{v}_1 &\in V \end{aligned}$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  sono LINEARMENTE DIPENDENTI se

$\exists$  una comb. lin. nulla, cioè se

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  A.c.

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_m\vec{v}_m = 0$$

$$\equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{v}_i$$

(I vett. sono lin. indep. & non sono lin. dep.)

BASE per  $V$ : insieme di vettori <sup>lin.</sup> indep.

$$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \quad \text{A.c.}$$

$\forall \vec{v} \in V \quad \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  A.c.

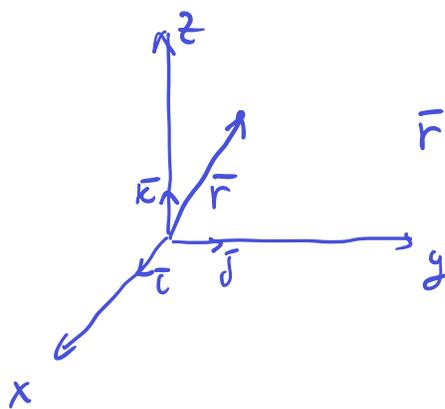
$$\vec{v} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

componenti del vettore

Es.

$$V = \mathbb{R}^3$$



$$\vec{r} = x\vec{e}_i + y\vec{e}_j + z\vec{e}_k$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \mapsto \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \in \mathbb{R}$$

prodotto scalari def. positivi

$$\downarrow$$

$$\rightsquigarrow \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$\rightsquigarrow$  Base ortonormale  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$= \delta_{ij}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$$

$$\vec{v}_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{e}_i$$

$$\vec{v}_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{e}_j$$

$$= \sum_{k=1}^m \alpha_k \vec{e}_k$$

$$= \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_m \vec{e}_m$$

$$(a+b)(c+d)$$

$$= a(c+d) + b(c+d)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{e}_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ \vec{e}_i \cdot \left( \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{e}_j \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^m \beta_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left( \sum_{j=1}^m \beta_j \delta_{ij} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m \beta_j \delta_{ij} &= \beta_1 \delta_{i1} + \beta_2 \delta_{i2} + \beta_3 \delta_{i3} + \dots + \beta_m \delta_{im} = \\
 &= \beta_1 \delta_{i1} + \dots + \beta_i \delta_{ii} + \dots + \beta_m \delta_{im} \\
 &= 0 + \dots + \beta_i + 0 + \dots + 0 = \beta_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

## Operatori lineari su $V$

- Dato sp. vett.  $V$  di dim.  $n$ , consideriamo gli op. lin.  $A: V \rightarrow V$  (endomorfismi)

$$\text{lin: } A(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha(A\bar{v}_1) + \beta(A\bar{v}_2)$$

- Scelta una base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  di  $V$ ,  $A$  è rappresentato da una matrice che agisce sulle componenti dei vett. in  $V$  rispetto alla base scelta:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i$$

$$A\bar{e}_i \in V \Rightarrow A\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n (A_{ji}) \bar{e}_j$$

$$A\bar{v} = A \sum_i \alpha_i \bar{e}_i = \sum_i \alpha_i (A\bar{e}_i) = \sum_j \left( \sum_i A_{ji} \alpha_i \right) \bar{e}_j$$

componenti di  $A\bar{v}$  sono  
date da prodotto matrice  
con vett.  
colonna  
di comp.

$$\text{Se base } \bar{e} \text{ o.n. } A_{ki} = \bar{e}_k \cdot A\bar{e}_i$$

# Spazio vettoriale duale

Spazio Vett. DUALE

1-forme, differenziale

- Dato uno sp. vett.  $V$  di dim  $n$ , viene definito lo spazio vettoriale DUALE come lo spazio dei FUNZIONALI LINEARI su  $V$

$$V^* = \left\{ a: V \rightarrow \mathbb{R} \mid a(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha a(\bar{v}_1) + \beta a(\bar{v}_2) \right. \\ \left. \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \right\}$$

$V^*$  è uno sp. vett. di dim  $n$ .

- Data una base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ , possiamo definire la BASE DUALE in  $V^*$   $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  d.c.

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

In componenti  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$   $e_1^* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots)$

# DIFFERENZIALE

Prendiamo una funzione  $\bar{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$

il differenziale  $D\bar{f}(\bar{x}_0)$  (vedi Analisi II)

è un'applicazione lineare

$$D\bar{f}(\bar{x}_0): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

che agisce nel seguente modo:

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^N \mapsto D\bar{f}(\bar{x}_0)[\bar{v}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(\bar{x}_0 - \epsilon \bar{v}) - \bar{f}(\bar{x}_0)}{\epsilon}$$

derivata d'ordine  
lungo  $\bar{v}$

Da Analisi II, ricordiamo che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(\bar{x}_0 - \epsilon \bar{v}) - \bar{f}(\bar{x}_0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L[\epsilon \bar{v}] + R(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{v})}{\epsilon} = L[\bar{v}]$$

Se applichiamo il differenziale su  $\bar{e}_i$  otteniamo

$$D\bar{f}(\bar{x}_0)[\bar{e}_i] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$$

• Ora consideriamo il caso di una FUNZIONE

$$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \underline{\mathbb{R}} \quad (M=1)$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^N \mapsto f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

Il suo DIFFERENZIALE è di solito indicato con  $df$ :

$$df(x): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

è un FUNZIONALE LINEARE, cioè un vett. dello spazio vett. duale a  $\mathbb{R}^N$ .

Come prima  $df(\bar{x}_0)[\bar{e}_i] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$

Se prendiamo la funzione  $x_i : \bar{x}_0 \mapsto (x_0)_i$ , il suo differenziale  $dx_i$  è tale che

$$dx_i[\bar{e}_j] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \{dx_i\}_{i=1, \dots, N}$  è la base duale di  $\{\bar{e}_i\}_{i=1, \dots, N}$

$\Rightarrow df(x)$  può essere espresso in tale base

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i$$

$$\left[ \begin{aligned} df\left[\sum_i \alpha_i \bar{e}_i\right] &= \sum_i \alpha_i df[\bar{e}_i] = \sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow (df)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \sum_j (df)_j dx_j\left[\sum_i \alpha_i \bar{e}_i\right] &= \sum_j (df)_j \alpha_j \end{aligned} \right]$$

Vediamo in componenti:  $\bar{v} = \sum_i v_i \bar{e}_i$

$$df(x_0)[\bar{v}] = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) dx_k\left[\sum_j v_j \bar{e}_j\right] =$$

$$= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_j v_j \underbrace{dx_k[\bar{e}_j]}_{\delta_{kj}} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} v_k = \bar{\nabla} f \cdot \bar{v}$$

• Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(t) \rightarrow df = \frac{df}{dt} dt$$

• Consideriamo ora una TRASFORMAZ. di COORDINATE, cioè una funzione

$$\bar{\varphi} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (\text{INVERTIBILE!})$$

$$\bar{x} \mapsto \bar{x}' = \bar{\varphi}(\bar{x})$$

$x'_i$  sono nuove coord. di  $\mathbb{R}^N$

In componenti:

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_N)$$

$$x'_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_N)$$

⋮

$$x'_N = \varphi_N(x_1, \dots, x_N)$$

Es. coord. polari vs Cartesiane

$$x'_1 = r \cos \theta \leftarrow \varphi_1(r, \theta)$$

$$x'_2 = r \sin \theta \leftarrow \varphi_2(r, \theta)$$

Il differenziale di  $\varphi$ ,  $D\varphi(x_0)$ , è un operatore lineare  $:\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , e quindi può essere rappresentato da una matrice quadrata  $N \times N$ .

Ricordiamo che per un generico op. lin.  $A$ , la sua matrice è  $A_{ki} = \bar{e}_k \cdot A \bar{e}_i$  (vedi sopra).

In qto caso indichiamo con  $J_{ki}$  (MATRICE JACOBIANA) la matrice di  $D\bar{\varphi}$ :

$$J_{ki} = \bar{e}_k \cdot D\bar{\varphi}[\bar{e}_i] = \bar{e}_k \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_N} \right)$$

← Matrice INVERTIBILE (det  $J \neq 0$ ) per buon cambiam. di coord.

# • Differenziale delle FUNZIONE COMPOSTA

$$f: \mathbb{R}^N \xrightarrow{\partial t^a} \mathbb{R}^M$$

$$t \mapsto f(t)$$

$$g: \mathbb{R}^M \xrightarrow{\partial x^i} \mathbb{R}^L$$

$$x \mapsto g(x)$$

Chiamiamo  $h = g \circ f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^L$  (FUNZIONE COMPOSTA)

$$t \mapsto g(f(t))$$

Il diff. della funt. comp. (vedi Analisi II)

$$Dh(t_0) = D(g \circ f)(t_0) = Dg(f(t_0)) \cdot Df(t_0) \quad (*)$$

↑  
prodotto di op. lineari  
(cioè prodotto di matrici  
se in componenti)

$$Df(t_0): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

$$Dg(f(t_0)): \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^L$$

Vediamo in componenti:

$$(Dh)_{\alpha a} = \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial t^a} \quad (Dg)_{\beta i} = \frac{\partial g_{\beta}}{\partial x^i} \quad (Df)_{i a} = \frac{\partial f_i}{\partial t^a}$$

$$(*) \rightarrow \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial t^b}(t_0) = \sum_j \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x^j}(f(t_0)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial t^b}(t_0) \quad (*)$$

Derivate  $\uparrow$   $\uparrow$   
 delle funzione  $g$  derivate dell'argom.  
 rispetto al suo argomento rispetto a  $t$

(\*) Notazione usata anche in Analisi II  
anche se non in componenti

Prendiamo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $t \mapsto f(t)$   $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $x \mapsto g(x) \Rightarrow h = g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $t \mapsto h(t)$

- derivate parziali diventano derivate semplici

es:  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} = f'$

- $h(t) = g(f(t))$

$$h'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$$

$\uparrow \equiv \frac{dh}{dt}$       $\uparrow \equiv \frac{dg(f(t))}{dx}$       $\uparrow \equiv \frac{df}{dt}$

← Solite regole delle derivate di una funzione composta

Qui vorrebbe da scrivere

$$\frac{dg(f(t))}{dt} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dt}$$

$\uparrow$

MA QTO SIMBOLO NON

È BEN DEFINITO

Invece " $\frac{dg}{dx}$ " si vuol dire

"derivate di  $g$  rispetto al suo argomento"

$$\frac{dg}{dx}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ è una funt.}$$

$$x_0 \mapsto \frac{dg}{dx}(x_0)$$

Si può trovare scritto anche

$$\frac{\partial g(f(t))}{\partial t_b}$$

Verrebbe allora da scrivere

$$\frac{\partial g_d}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t_b}$$

↑

Ma qto simbolo non è ben definito;  
invece la funzione  $\frac{\partial g_d(x)}{\partial x_i}$  si.

ES. Partiamo da una funt. a tre variabili

(Vedi Analisi II)

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

→ c'è una mappa  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

Le sue derivate parziali sono ancora delle funzioni

$$\frac{\partial g}{\partial x}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}: \dots$$

Prendiamo la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

Immagine di  $f$  è una CURVA in  $\mathbb{R}^3$  ( $t$  è detto parametro della curva).

Possiamo definire la funzione composta

$$h = g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto h(t) = g(f(t))$$

$$h(t) = g(\cos t, \sin t, t) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

La derivata di tale funzione è

$$\dot{h}(t) = 2t$$

D'altra parte posso calcolarla con la regola di derivazione della funzione composta

$$\dot{h}(t) = \frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(t)) \cdot \dot{f}_i(t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

$$\dot{f}_1 = -\sin t \quad \dot{f}_2 = \cos t \quad \dot{f}_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{h}(t) &= 2(\cancel{\cos t})(-\sin t) + 2(\cancel{\sin t})(\cos t) \\ &+ 2(t)(1) = 2t \end{aligned}$$