Capitolo 1

GEOMETRIA AFFINE

1.1 Spazi affini

Lo *spazio affine* è l'ambiente geometrico corrispondente allo *spazio vettoriale* in Algebra lineare.

Definizione 1.1.1 (Assiomi di spazio affine)**.** Se K è un campo e V un K-spazio vettoriale, si dice *spazio affine su* V un insieme non vuoto $\mathbb{A}$ (i cui elementi sono detti *punti*) assieme a una applicazione

$$\phi : \ \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V \quad \text{denotata con} \quad (P, Q) \mapsto Q - P := \phi(P, Q)$$

tali che

SA1. $\forall P \in \mathbb{A}$, $\forall v \in V \ \ \exists!\, Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$;

SA2. **(Relazione di Chasles)** $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{A}$ vale

$$(Q - P) + (R - Q) = (R - P).$$

In particolare, $\mathbb{A}$ si dice *spazio affine reale* se $K = \mathbb{R}$ oppure si dice *spazio affine complesso* se $K = \mathbb{C}$.

Immediate conseguenze della definizione sono i seguenti fatti.

Proposizione 1.1.1. *Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V allora*

i) $\forall P \in \mathbb{A}$ *si ha che* $P - P = 0_V$*, vettore nullo di* V*;*

ii) $\forall P, Q \in \mathbb{A}$ *si ha che i vettori* $Q - P$ *e* $P - Q$ *sono opposti;*

iii) $\forall P \in \mathbb{A}$ *l'applicazione indotta da* ϕ

$$\phi_P : \ \mathbb{A} \longrightarrow V \quad \textit{definita da} \quad Q \mapsto Q - P$$

è biiettiva.

Dimostrazione.
i) Applicando SA2 al caso $P = Q = R$ si ottiene l'uguaglianza tra vettori

$$(P - P) + (P - P) = (P - P)$$

da cui segue $P - P = 0_V$.
ii) Applicando il punto (*i*) e SA2 al caso $P = R$ si ottiene l'uguaglianza tra vettori

$$(Q - P) + (P - Q) = (P - P) = 0_V$$

e dunque la tesi.
iii) La suriettività e l'iniettività di ϕ_P seguono entrambe da SA1: rispettivamente, dall'esistenza e dall'unicità del punto Q. □

I primi esempi di spazi affini sono il piano e lo spazio "ordinari". C'è anche un esempio naturale dato dalla struttura affine sull'insieme soggiacente a uno spazio vettoriale, come viene ora descritto.

Esempio 1.1.1. Siano V un K-spazio vettoriale, $\mathbb{A} := V$ e sia $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ definita da $\phi(P, Q) = Q - P$. In questo caso $Q - P$ non è una scrittura simbolica: è esattamente la differenza dei vettori $P, Q \in V$.
Si osservi che in questo caso i punti di $\mathbb{A}$ sono anche vettori di V e viceversa. Il nome e l'uso sono dati dal contesto. Questo appare chiaro verificando che valgono gli assiomi di spazio affine dati nella Definizione 1.1.1.
SA1. $\forall P \in \mathbb{A}$, $\forall v \in V$ $\exists!\, Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$. Infatti basta prendere $Q := P + v$ (qui è la somma tra due elementi di V).
SA2. $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{A}$ vale

$$(Q - P) + (R - Q) = (R - P).$$

Basta infatti applicare le proprietà associativa e commutativa della somma nello spazio vettoriale V a cui appartengono $P, Q, R, (Q - P), \ldots$.

Definizione 1.1.2. Lo spazio affine su V costruito nell'esempio precedente si dice *spazio affine naturale su* V e si denota con $\mathbb{A}(V)$.
Nel caso particolare in cui $V = K^n$, invece di $\mathbb{A}(K^n)$ scriveremo $\mathbb{A}^n_K$ (o semplicemente $\mathbb{A}^n$ se il campo è chiaro dal contesto) e tale spazio si dirà *spazio affine numerico su* K.

Esempio 1.1.2. Prendiamo i due punti $3, 7 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ sulla retta affine reale. La loro differenza come numeri reali coincide col vettore associato dalla struttura affine:

$$\phi(3, 7) = 7 - 3 = 4 \in V = \mathbb{R}.$$

Esempio 1.1.3. Prendiamo i punti $P = (1, -2)$ e $Q = (4, 0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$. Il vettore corrispondente è la loro differenza come coppie di numeri reali:

$$\phi(P, Q) = Q - P = (3, 2) \in V = \mathbb{R}^2.$$

In questi due esempi (e più in generale in $\mathbb{A}^n_K$) la struttura affine va intesa come una struttura aggiuntiva su $\mathbb{R}^n$ rispetto a quella di spazio vettoriale.

Definizione 1.1.3. Si dice *dimensione* di uno spazio affine $\mathbb{A}$ su V la dimensione dello spazio vettoriale V e si denota con $\dim(\mathbb{A})$.

In particolare, $\dim(\mathbb{A}^n_K) = n$. Se $K = \mathbb{R}$, diremo che $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è il *piano affine reale*, che $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ è lo *spazio affine reale*, ecc.
Se $K = \mathbb{C}$, con $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, ... indicheremo rispettivamente il *piano affine complesso*, lo *spazio affine complesso* ecc.

I vettori di V danno luogo a "traslazioni" di uno spazio affine associato mediante una "somma" (tra oggetti non omogenei) che va precisata.

Osservazione 1.1.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V, comunque scelti un punto $P \in \mathbb{A}$ e un vettore $v \in V$, la scrittura

$$P + v$$

denota l'unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$. (Tale punto esiste ed è unico per l'assioma SA1.) In particolare, è chiaro che

$$P + (Q - P) = Q.$$

Si osservi che la somma $P + v$ di cui sopra non è algebrica, ma simbolica. Tuttavia, se lo spazio affine è del tipo $\mathbb{A}(V)$, allora coincide col vettore somma dei vettori P e v e dunque è anche algebrica.

Proposizione 1.1.2. *Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V, l'applicazione*

$$t : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \quad \textit{definita da} \quad (P, v) \mapsto P + v$$

verifica le seguenti proprietà:

T1. *$\forall P \in \mathbb{A}$, $\forall v, w \in V$ vale $(P + v) + w = P + (v + w)$;*

T2. *$\forall\, P, Q \in \mathbb{A}$ $\exists!\, v \in V$ tale che $Q = P + v$.*

Inoltre, $P + 0_V = P$ per ogni $P \in \mathbb{A}$.

Dimostrazione.
$T1$) Per SA1, fissati P e v, esiste un unico punto Q tale che $v = Q - P$. D'altra parte, per la stessa ragione, esiste un unico punto R tale che $w = R - Q$. Pertanto

$$v + w = (Q - P) + (R - Q) = R - P,$$

dove la seconda uguaglianza segue da SA2. In conclusione si ha, utilizzando anche l'Osservazione 1.1.1,

$$(P + v) + w = Q + w = R = P + (R - P) = P + (v + w),$$

come volevamo.
$T2$) Per provare l'esistenza, basta osservare che $v := Q - P$ soddisfa il requisito, infatti $Q = P + (Q - P)$ per l'Osservazione 1.1.1. Per provare l'unicità, sia $w \in V$ tale che $Q = P + w$. Per SA1, esiste un unico punto $R \in \mathbb{A}$ tale che $w = R - P$. Allora $Q = P + w = P + (R - P) = R$ ancora per l'Osservazione 1.1.1. Pertanto $w = Q - P = v$.
Si osservi infine che per la Proposizione 1.1.1, per ogni $P \in \mathbb{A}$, vale $P - P = 0_V$. Pertanto $P + 0_V = P + (P - P) = P$, dove l'ultima uguaglianza segue dall'Osservazione 1.1.1. $\square$

Si vedrà in seguito che le proprietà T1 e T2 configurano t come un esempio di *azione* del gruppo additivo V sull'insieme $\mathbb{A}$.

Fissando il vettore v nel secondo fattore del dominio di t si ottiene una biiezione di $\mathbb{A}$ come segue.

Definizione 1.1.4. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V e $v \in V$, l'applicazione

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := P + v$$

si dice *traslazione di* $\mathbb{A}$ *lungo* v.

Si osservi che t_v è ben definita per l'Osservazione 1.1.1.

Esempio 1.1.4. Presi $P = (1, -2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e $v = (6, 2) \in V = \mathbb{R}^2$ si ha

$$t_v(P) = P + v = (7, 0).$$

Esempio 1.1.5. Si osservi che $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è una traslazione se e solo se

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

per un certo $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$, e si ha $f = t_a$.
Per esempio, l'applicazione $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$

$$f(x, y, z) = \left(x - \sqrt{2}, y + 3i, z - 1 - \frac{3i}{4} \right)$$

è una traslazione dello spazio affine complesso $\mathbb{C}^3$.

Esercizio A1. Si provi che, per ogni $v, w \in V$, valgono i seguenti fatti:

i) t_v è biiettiva;

ii) l'applicazione inversa di t_v è t_{-v};

iii) se v è il vettore nullo si ha $t_{0_V} = id(\mathbb{A})$;

iv) $t_{v+w} = t_v \circ t_w = t_w \circ t_v$.

Abbiamo visto nella Proposizione 1.1.1-(iii) che ogni scelta di un punto di $\mathbb{A}$ induce una biiezione (non canonica) tra $\mathbb{A}$ e lo spazio vettoriale V. Questo motiva a dare la seguente nozione.

Definizione 1.1.5. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine sul K-spazio vettoriale V, diciamo *sistema di riferimento affine* su $\mathbb{A}$ il dato di un punto $O \in \mathbb{A}$ (detto *origine*) e una base $\mathcal{B}$ di V come spazio vettoriale. Se $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, denoteremo il sistema di riferimento con $(O, \mathcal{B})$ o con $(O; e_1, \ldots, e_n)$. In tal caso, per ogni $P \in \mathbb{A}$, il vettore $P - O$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base scelta:

$$P - O = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Le componenti $(x_1, \ldots, x_n)$ di $P - O$ su tale base si dicono *coordinate* di P nel riferimento $(O; e_1, \ldots, e_n)$ e si scriverà anche

$$P = (x_1, \ldots, x_n).$$

Chiaramente le coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ di un punto sono un elemento di K^n, quindi il segno di uguaglianza nella scrittura "$P = (x_1, \ldots, x_n)$" è un abuso di notazione, in quanto (in generale) un punto di $\mathbb{A}$ non *coincide* con le sue coordinate.

Osservazione 1.1.2. Fissato un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ nello spazio affine $\mathbb{A}$, comunque scelti due punti $A, B \in \mathbb{A}$ di coordinate, rispettivamente, $A = (a_1, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, \ldots, b_n)$, il vettore $B - A$ ha componenti, rispetto a $\mathcal{B}$, date da

$$B - A = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

Infatti $B - A = (B - O) + (O - A)$ per SA2. D'altra parte, $B - O = (b_1, \ldots, b_n)$ e $O - A = -(A - O) = -(a_1, \ldots, a_n)$. Le regole della somma in K^n conducono alla tesi.

Questo motiva la scelta del simbolismo "$B - A$" anche se non ha, in generale, un significato algebrico.

Definizione 1.1.6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^n_K$ si dice *sistema di riferimento affine standard* quello in cui l'origine è $O = (0, \ldots, 0) \in K^n$ e la base $\mathcal{B}$ è quella canonica di K^n.

1.2 Sottospazi affini e loro intersezioni

Introduciamo la nozione di "sottostruttura" della struttura geometrica di spazio affine.

Definizione 1.2.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V. Se $P \in \mathbb{A}$ e W è un sottospazio vettoriale di V, diciamo *sottospazio affine passante per P di giacitura W* l'insieme

$$P + W := \{P + w \mid w \in W\}$$

Osserviamo che il punto P appartiene al sottospazio affine $P + W$ in quanto $P = P + 0_V \in P + W$ poiché $0_V \in W$.

Inoltre ogni punto $P \in \mathbb{A}$ è esso stesso un sottospazio affine, in quanto $P = P + (0_V)$, dove (0_V) indica il sottospazio vettoriale nullo di V.

Esempio 1.2.1. Siano dati il punto $Q = (1, -1, 2) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e il sottospazio vettoriale $W = \langle e_1 + e_2, e_2 + 2e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$, dove (e_1, e_2, e_3) denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$. I generatori di W sono linearmente indipendenti, quindi $\dim W = 2$. Il sottospazio affine $Q + W \subset \mathbb{A}^3$ è formato da tutti e soli i punti della forma

$$P = (1 + x, -1 + x + y, 2 + 2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Infatti, $P \in Q + W \iff P = Q + w$, per un certo $w \in W$. Ma

$$w = x(e_1 + e_2) + y(e_2 + 2e_3)$$

per certi $x, y \in \mathbb{R}$, da cui si ottiene l'espressione per P.

Si vede anche in modo esplicito che $Q + W$ è ottenuto traslando W:

$$Q + W = t_v(W)$$

con $v = Q - O = e_1 - e_2 + 2e_3$.

Vediamo ora che, mentre un punto e un sottospazio vettoriale individuano un sottospazio affine, non vale il viceversa. Precisamente: un sottospazio affine determina la sua giacitura ma non un suo punto preciso.

Proposizione 1.2.1. *Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V e $S = P + W$ è un suo sottospazio affine, allora*

i) $\forall P' \in S$ *vale che* $S = P' + W$*;*

ii) *se* $S = P + W'$ *allora* $W' = W$*;*

iii) *la giacitura di S può essere espressa come*

$$W = \{B - A \mid A, B \in S\}.$$

<u>Dimostrazione</u>.
i) Osserviamo preliminarmente che, comunque scelto $P' \in S$, per la Proposizione 1.1.2 - (T2), esiste $w' \in W$ tale che $P' = P + w'$ e precisamente $w' = P' - P$. Di conseguenza, $-w' = P - P'$ e quindi $P = P' - w'$.
Si consideri ora un qualunque punto $Q \in S$ che è quindi del tipo $Q = P + w$. Allora $Q = (P' - w') + w = P' + (w - w') \in P' + W$ e questo prova che $S \subseteq P' + W$. L'altra inclusione è analoga e quindi lasciata al lettore.
ii) Immediata.
iii) Per provare l'inclusione $\{B - A \mid A, B \in S\} \subseteq W$, si osservi che se $A, B \in S$ allora tali punti sono del tipo $A = P + u$ e $B = P + w$ per opportuni $u, w \in W$. Dunque, utilizzando anche la Relazione di Chasles, si ottiene

$$B - A = (B - P) + (P - A) = w - u \in W.$$

Viceversa, per ogni $w \in W$, sia $Q_w = P + w \in S$. Dunque $w = Q_w - P$ ed entrambi i punti appartengono a S. $\square$

Visto lo stretto legame tra un sottospazio affine e la sua giacitura, è naturale dare la seguente nozione.

Definizione 1.2.2. Se $S = P + W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, diciamo *dimensione* di S la dimensione di W come sottospazio vettoriale di V, cioè

$$\dim(S) := \dim_K(W).$$

In particolare, $\dim(S) = 0$ se e solo se S è un punto.
Se $\dim(S) = 1$ allora $S = P + \langle w \rangle$ si dice *retta affine* e w è detto *vettore direzionale di* S.
Se $\dim(S) = 2$ allora S si dice *piano affine*.
Se $\dim_K(V) = n$ e $\dim(S) = n - 1$ allora S si dice *iperpiano affine*.

Esercizio A2. Si provi che, se $\dim \mathbb{A} = n$ e S è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, allora vale: $\dim(S) = n \iff S = \mathbb{A}$.

Esercizio A3. Provare che ogni sottospazio affine $S = P + W$ è esso stesso uno spazio affine su W (vedi Definizione 1.1.1).

Esercizio A4. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_K$ lo spazio affine numerico su K dotato del riferimento affine standard $(O, \mathcal{E})$ (vedi Definizione 1.1.6). Dunque ogni punto di $\mathbb{A}^n$ è anche un vettore di $V = K^n$ (e viceversa) e ogni sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ è un sottoinsieme di K^n.

i) Se $P \in \mathbb{A}^n$ e $w \in K^n$, provare che il vettore $(P - O) + w$ e il punto $P + w$ coincidono nel senso precisato sopra.

ii) Sia $S = P + W$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$. Provare che S è sottospazio vettoriale di $K^n \iff S = W \iff O \in S$.

Osservazione 1.2.1. Se $S = P + W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, esso può essere interpretato come il traslato della sua giacitura. Infatti $W \subseteq K^n = \mathbb{A}^n$ e sia $v := P - O$. Allora, posta

$$t_v : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

la corrispondente traslazione, è chiaro (tenendo conto dell'Esercizio A4) che

$$t_v(W) = \{v + w \mid w \in W\} = \{P + w \mid w \in W\} = P + W = S.$$

Osservazione 1.2.2. Ricordiamo che, dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite su K, espresso in forma matriciale da

$$\Sigma : AX = B$$

dove

$$A \in K^{m,n},\ X = {}^t(x_1, \ldots, x_n),\ B = {}^t(b_1, \ldots, b_m)$$

è compatibile se e solo se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$.

Supponiamo che ciò accada e sia $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B) = r$. Allora è noto che lo spazio delle soluzioni di Σ è

$$S_\Sigma = \overline{X} + S_{\Sigma_0}$$

dove $\overline{X}$ è una soluzione particolare di Σ e $\Sigma_0 : AX = 0$ è il sistema lineare omogeneo associato a Σ. Essendo S_{Σ_0} un sottospazio vettoriale di K^n, è evidente che S_Σ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_K$.

Inoltre, posta $L_A : K^n \longrightarrow K^m$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio, si ha che $\ker(L_A) = S_{\Sigma_0}$. D'altra parte (per il Teorema della dimensione) si ha che $\dim_K(\ker(L_A)) = n - r$. Pertanto

$$\dim(S_\Sigma) = \dim_K(S_{\Sigma_0}) = \dim_K(\ker(L_A)) = n - r.$$

Consideriamo ora l'intersezione di sottospazi affini e studiamo quando essa stessa è un sottospazio affine.

Proposizione 1.2.2. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ si consideri la famiglia di sottospazi affini $\{S_i\}_{i \in I}$ indiciata su un insieme I, dove $S_i = P_i + W_i$ per ogni $i \in I$. Se $S := \bigcap_{i \in I} S_i$ allora si hanno due possibilità: o S è vuoto oppure è un sottospazio affine di giacitura $\bigcap_{i \in I} W_i$.*

Dimostrazione. Se $S \neq \emptyset$, si scelga un punto $Q \in S = \bigcap_{i\in I} S_i$. Ponendo $W := \bigcap_{i\in I} W_i$, vogliamo provare che

$$S = Q + W.$$

Sia $P \in S$; dunque $P \in S_i = Q + W_i$, per ogni $i \in I$. Quindi $P = Q + w_i$, per opportuni $w_i \in W_i$. Chiaramente $w_i = P - Q$ è un vettore indipendente da i; ponendo $w := P - Q$ si ha quindi che $w \in W_i$ per ogni i, cioè $w \in W$. In conclusione, $P = Q + w$ e quindi $S \subseteq Q + W$.
Per provare l'altra inclusione, basta osservare che $Q + W \subseteq Q + W_i = S_i$, per ogni $i \in I$. Pertanto $Q + W \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) = S$. □

Una conseguenza del precedente risultato è la seguente formula "tipo Grassmann" per gli spazi affini.

Corollario 1.2.3. *Siano S e S' due sottospazi affini di $\mathbb{A}$ e sia $n = \dim \mathbb{A}$. Se $S \cap S' \neq \emptyset$ allora*

$$\dim(S \cap S') \geq \dim S + \dim S' - n.$$

Dimostrazione. Siano W e W' le giaciture di S e S', rispettivamente. Per la Proposizione 1.2.2, il sottospazio affine $S \cap S'$ ha giacitura $W \cap W'$ e dunque $\dim(S \cap S') = \dim_K(W \cap W')$. D'altra parte, per il Teorema di Grassmann

$$\dim_K(W \cap W') = \dim_K W + \dim_K W' - \dim_K(W + W').$$

Ovviamente $\dim_K(W + W') \leq n$, quindi la relazione precedente implica

$$\dim_K(W \cap W') \geq \dim_K W + \dim_K W' - n,$$

da cui si ha la tesi. □

Caratterizziamo l'intersezione non vuota nel caso di due sottospazi.

Proposizione 1.2.4. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n si considerino due sottospazi affini S e S', dove $S = Q + W$ e $S' = Q' + W'$. Allora*

$$S \cap S' \neq \emptyset \iff Q - Q' \in W + W'.$$

In particolare, se $W + W' = V$ allora $S \cap S' \neq \emptyset$ e

$$\dim(S \cap S') = \dim S + \dim S' - n.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Sia $P \in S \cap S'$; dunque P è del tipo

$$P = Q + w = Q' + w'$$

per opportuni $w \in W$ e $w' \in W'$. Pertanto $P - Q = w$ e $P - Q' = w'$ e quindi, applicando SA2, si ottiene

$$Q - Q' = (Q - P) + (P - Q') = -w + w' \in W + W'.$$

"$\Leftarrow$" Se $Q - Q' \in W + W'$ allora esistono due vettori $w \in W$ e $w' \in W'$ tali che $Q - Q' = w + w'$. Pertanto i punti $Q - w$ e $Q' + w'$ coincidono. Ma il primo appartiene a S e il secondo a S', quindi $S \cap S' \neq \emptyset$.
Questo prova la prima parte. Si assuma ora che $W + W' = V$; in tal caso ovviamente $Q - Q' \in W + W'$ e quindi, per l'equivalenza appena provata, $S \cap S' \neq \emptyset$. Ripercorrendo la dimostrazione del Corollario 1.2.3 e tenendo conto del fatto che $\dim(W + W') = n$, si ha immediatamente la tesi. $\square$

Definizione 1.2.3. Due sottospazi affini si dicono *incidenti* se la loro intersezione non è vuota.

1.3 Sottospazi paralleli e sghembi

Definizione 1.3.1. Nello spazio affine $\mathbb{A}$ sullo spazio vettoriale V si considerino i due sottospazi affini S e S' di dimensione positiva e di giaciture W e W', rispettivamente. Diciamo che S e S' sono *paralleli* se $W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$. In tal caso scriveremo anche $S \parallel S'$.

Esempio 1.3.1. Si considerino i punti $Q = (2,0,1)$, $R = (1,0,0)$ di $\mathbb{A}^3$ e il sottospazio $W = \langle e_1 + 2e_2, e_3 \rangle$ e il vettore $v = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ di $\mathbb{R}^3$. La retta L passante per R e di vettore direzionale v è parallela al piano H passante per Q e di giacitura W, e inoltre $L \cap H = \emptyset$.

Se $\dim S = \dim S'$ è chiaro che $S \parallel S' \iff W = W'$. In particolare, due rette sono parallele se i rispettivi vettori direzionali sono proporzionali.

Osservazione 1.3.1. La relazione di parallelismo tra sottospazi affini (di dimensioni diverse) non è transitiva: si pensi ad esempio a due rette in $\mathbb{A}^3$ che sono parallele a uno stesso piano, ma non tra loro.

Vediamo ora come si comportano sottospazi paralleli che si intersecano.

Proposizione 1.3.1. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ si considerino i due sottospazi affini S e S' e sia* $\dim S \leq \dim S'$. *Se $S \parallel S'$ e $S \cap S' \neq \emptyset$ allora $S \subseteq S'$.*

Dimostrazione. Sia $Q \in S \cap S'$; allora possiamo scrivere $S = Q + W$ e $S' = Q + W'$. Per definizione di parallelismo e per l'ipotesi sulle dimensioni, deve essere $W \subseteq W'$. La tesi segue immediatamente. □

Ne segue una proprietà ben nota nella Geometria classica.

Corollario 1.3.2. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ si considerino un sottospazio affine S e un punto P. Allora esiste un unico sottospazio affine passante per P, parallelo a S e della stessa dimensione di S.*

Dimostrazione. Sia $S = Q + W$ e si ponga $S' = P + W$. Chiaramente S' soddisfa i requisiti richiesti. Supponiamo ora che esista un altro sottospazio affine S'' passante per P, parallelo a S e di uguale dimensione. Dunque S'' deve avere la stessa giacitura di S, pertanto $S'' = P + W = S'$. □

Nel caso del piano affine $\mathbb{A}^2$, il Corollario precedente equivale al V Postulato di Euclide sulle rette parallele del piano.

Definizione 1.3.2. Due sottospazi affini di dimensione positiva si dicono *sghembi* se non sono paralleli e non hanno punti in comune.

Esempio 1.3.2. Siano Q, R, v ed L come nell'esempio precedente, e sia T la retta passante per Q e avente vettore direzionale e_3. Le rette L e T sono sghembe.

Studiamo l'esistenza di coppie di sottospazi sghembi e, più in generale, la loro posizione reciproca.

Osservazione 1.3.2. Se $\dim \mathbb{A} = 2$, gli unici sottospazi affini non banali (cioè diversi da $\mathbb{A}$) e di dimensione positiva sono le rette. Siano dunque L e L' due rette di giaciture rispettive $W = \langle w \rangle$ e $W' = \langle w' \rangle$, rette vettoriali del K-spazio vettoriale V ove $\dim V = 2$. Si presentano 2 casi:

$$W + W' = \langle w, w' \rangle \begin{cases} = V \\ \subsetneq V \end{cases} .$$

Nel primo caso, per la Proposizione 1.2.4, si ha che $L \cap L' \neq \emptyset$ e precisamente $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - 2 = 0$. Quindi L e L' sono incidenti in un punto.
Nel secondo caso necessariamente $\langle w \rangle = \langle w' \rangle$ e dunque, per definizione, L e L' sono parallele.

Osservazione 1.3.3. Se $\dim \mathbb{A} = 3$, i sottospazi affini non banali e di dimensione positiva sono i piani e le rette. Siano L e L' due rette e H e H' due piani, di giaciture rispettive L_0, L'_0, H_0, H'_0. Si presentano quindi i seguenti casi, in cui si utilizza ancora la Proposizione 1.2.4.

I. Posizione reciproca di L e H

$$L_0 + H_0 \begin{cases} = V \Rightarrow \dim(L \cap H) = 0 : L, H \text{ incidenti in un punto} \\ \subsetneq V \Rightarrow L_0 \subset H_0 \Rightarrow L, H \text{ paralleli} \end{cases}$$

II. Posizione reciproca di H e H'

$$H_0 + H'_0 \begin{cases} = V \Rightarrow \dim(H \cap H') = 1 : H, H' \text{ incidenti in una retta} \\ \subsetneq V \Rightarrow H_0 = H'_0 \Rightarrow \ H \text{ e } H' \text{ paralleli} \end{cases}$$

III. Posizione reciproca di L e L'

In tal caso, $\dim L_0 = \dim L'_0 = 1$, quindi non può accadere che $L_0 + L'_0 = V$. I casi possibili sono dunque

$$\dim(L_0 + L'_0) = \begin{cases} = 2 \Rightarrow \begin{cases} L \cap L' \neq \emptyset \Rightarrow \ L \text{ e } L' \text{ incidenti in un punto} \\ L \cap L' = \emptyset \Rightarrow \ L \text{ e } L' \text{ sghembe} \end{cases} \\ = 1 \Leftrightarrow L_0 = L'_0 \Leftrightarrow \ L \text{ e } L' \text{ parallele} \end{cases}$$