FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE

Data l'eq. diff. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$ $\bar{x}(t)$ a valori in $\mathbb{R}^n$

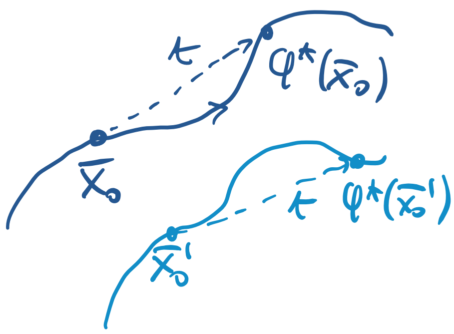
$\forall \bar{x}_0$, $\exists!$ soluz. $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ $(\bullet)$

- Fissato $\bar{x}_0$, la soluz. $(\bullet)$ descrive una curva in $\mathbb{R}^n$
- Fissato t, $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ è una funzione in $\bar{x}_0$, cioè descrive una mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x}_0 \longmapsto \varphi^t(\bar{x}_0) \equiv \underbrace{\bar{x}(t;\bar{x}_0)}_{\text{soluz. di } (*)}$$

t è un parametro della mappa $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



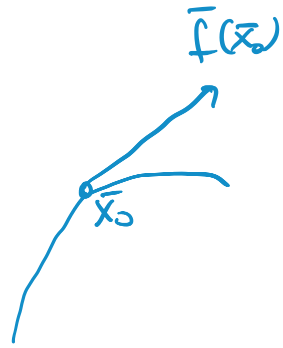
Al variare di t si ha una FAMIGLIA a un parametro di AUTOMORFISMI $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

La famiglia $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ si dice il FLUSSO relativo al campo vettoriale $\bar{f}$.

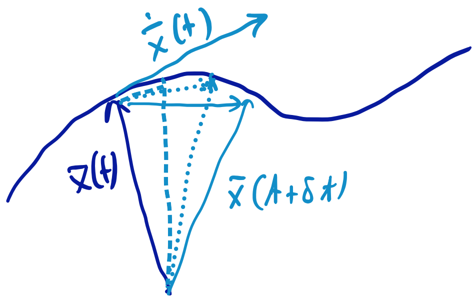
[$\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un GRUPPO

Id : φ^0 Inverso : φ^{-t} Composiz. : $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$]

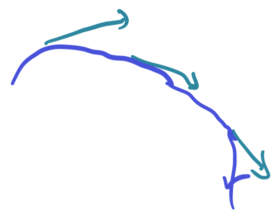
$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \rightsquigarrow$ curva $\bar{x}(t)$ che passa per $\bar{x}_0$ deve essere tangente al vettore $\bar{f}(\bar{x}_0)$



$$\dot{\bar{x}}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\bar{x}(t+\delta t) - \bar{x}(t)}{\delta t}$$



"Linee di forza"



COSTANTE DEL MOTO (INTEGRALE PRIMO, INVARIANTE DEL MOTO)

Def. Una funzione $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice COSTANTE DEL MOTO per l'equazione $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

se $I(\bar{x}(t;\bar{x}_0)) = I(\bar{x}_0)$ $\leftrightarrow$ $\frac{dI(\bar{x}(t;\bar{x}_0))}{dt} = 0$

$\forall t$ e $\forall$ soluzione $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ dell'eq. $(*)$

è la funz. composta $I \circ \bar{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto I(\bar{x}(t))$

ES. OSC. ARM.

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$
$$v(t) = -x_0\omega \sin\omega t + v_0 \cos\omega t$$
$\leftarrow$ soluz. di $(*)$

$$I(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$
$\leftarrow$ funz. $: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,v) \mapsto I(x,v)$

Verifichiamo che I soddisfi la def. per essere una cost. del moto:

$$I(x(t), v(t)) = \frac{1}{2}\left(x_0^2\omega^2 \sin^2\omega t - 2 x_0 v_0 \cancel{\omega} \sin\omega t \cos\omega t + v_0^2 \cos^2\omega t \right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^2\left(x_0^2 \cos^2\omega t + 2\frac{x_0 v_0}{\omega}\cancel{\cos\omega t \sin\omega t} + \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2}v_0^2 = I(x_0, v_0)$$

Consideriamo una funzione

$$I : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$$

Scriviamo la seguente eq

$I(\bar{x}) = \rho$ dove ρ cost. reale $\bar{x} \in \mathbb{R}^\ell$

$\downarrow$

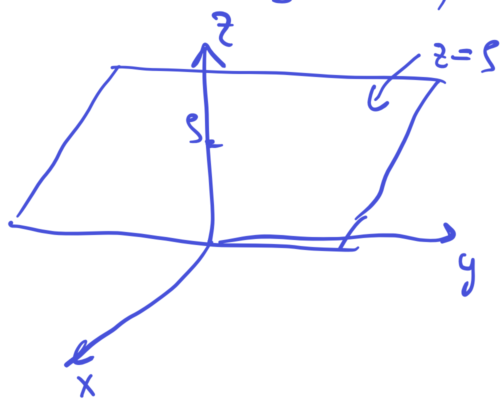
Le soluz. di questa eq. appartengono a un SOTTOINSIEME di $\mathbb{R}^\ell$ $\rightsquigarrow$ un' IPERSUPERFICIE

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) \equiv x^2 + y^2 + z^2$

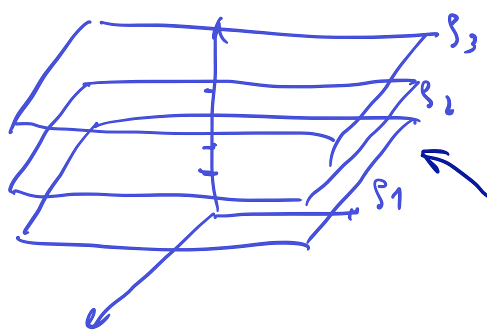
eq. $I(\bar{x}) = R^2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightsquigarrow$ SFERA

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) = z$

eq. $I(\bar{x}) = \rho \rightsquigarrow z = \rho$



Al variare del parametro ρ, ho una FAMIGLIA di IPERSUPERFICI (disgiunte) che costituisce una FOLIAZIONE (stratificazione) di $\mathbb{R}^\ell$ ← l'unione di tutte le ipersuperfici è $\mathbb{R}^\ell$ stesso.

ES) 

$I(\bar{x}) \equiv z$

"insiemi di livello"

Sia I una COSTANTE del MOTO per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

cioè una funz. $I : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ con

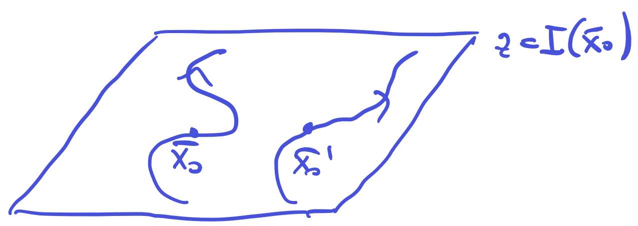
$I(\bar{x}(t)) = I(\bar{x}_0)$ ovvero $\frac{d}{dt} I(\bar{x}(t)) = 0$

$\forall t$ e $\forall \bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$

$\Rightarrow$ Tutti i pti di una traiettoria che risolve $(*)$ giacciono su un'ipersuperficie, in qto caso

$$I(\bar{x}) = I(\bar{x}_0)$$

ES) Immaginiamo che $I(\bar{x}) = z$ sia cost. del moto per $(*)$



$\rightarrow$ le traiettorie giacciono su un piano (parallelo al piano xy) $\Rightarrow$ si può ridurre il problema da tridimensionale a un probl. piano.

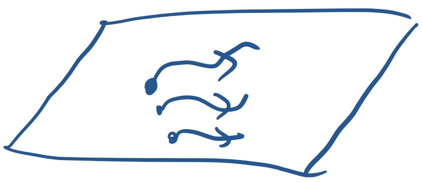
$\Rightarrow$ le cost. del moto permettono di ridurre il problema originario (cioè risolvere $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^l$) a un problema con un MINOR NUMERO di VARIABILI e di EQ. DIFF.

Servono dei criteri per individuare le cost. del moto prima di risolvere le eq. $(*)$.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^e$ si dice INVARIANTE per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ se il suo evoluto $\varphi^t(A)$ coincide con A $\forall t$

Se $\exists$ cost. del moto I, allora l'ipersup. $I(\bar{x}) = \rho$ è un insieme invariante

ES.



$\forall \bar{x} \in A \quad \varphi^t(\bar{x}) \in A$

ES.) osc. ARM. $\mathbb{R}^e \equiv \mathbb{R}^2$ con coor. (x, v)

$\omega = 1$, $m = 1$

$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \operatorname{sen} t$

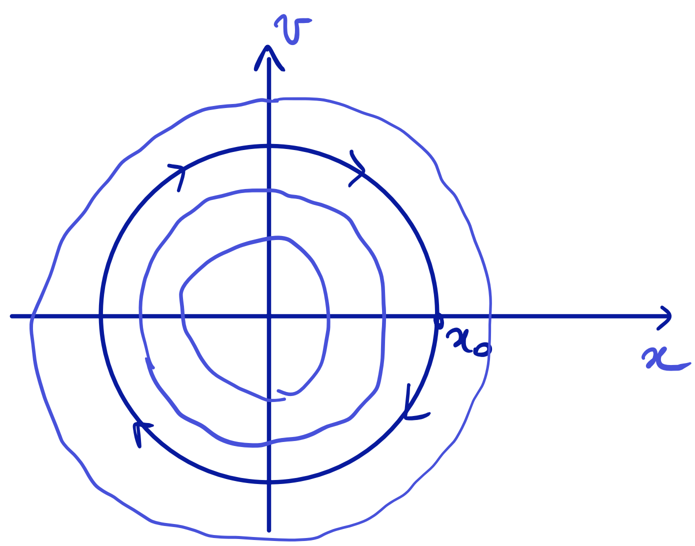
$v(t) = -x_0 \operatorname{sen} t + v_0 \cos t$

Prendiamo come dato iniz. $(x_0, 0)$ (cioè $v_0 = 0$)

$x(t) = x_0 \cos t$

$v(t) = -x_0 \operatorname{sen} t$

descrizione parametrica di una circonf. di raggio x_0



Cost. del moto $I(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} x^2$

Insiemi di livello sono $I(x, v) = I(x_0, v_0)$

cioè le "sup." $v^2 + x^2 = x_0^2$

ES. DI COST. del MOTO :

ENERGIA in sist. meccanici a 1 grado di libertà, autonomi e con forze puramente posizionali.

$$f(x,v) = f(x) \qquad f = \frac{F}{m}$$

$\Downarrow$

$\exists$ una primitiva di F $\quad (\; \bar{F} = -\bar{\nabla} V \;)$

$\exists V(x)$ t.c. $F = -V'$ $\qquad \frac{\partial E}{\partial x} = V'(x)$ $\qquad \ddot{x} = f(x)$

$\frac{\partial E}{\partial v} = mv$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad (*)$$

$$E(x,v) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

è una cost. del moto

solut. di eq. del moto

Dim. $\displaystyle \frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) =$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(x(t),v(t))\,\dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(x(t),v(t))\,\dot{v}(t)$$

$x(t), v(t)$ è solut. di $(*)$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(\ldots)\,v(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(\ldots)\,f(x(t))$$

$$= V'(x(t))\,v(t) + m v(t)\, f(x(t)) \qquad \begin{matrix} mf = F \\ V' = -F \end{matrix}$$

$$= -F(x(t))\,v(t) + v(t)\,F(x(t)) = 0 \quad //$$

DERIVATA DI LIE

Data una funzione $G : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ (detta VARIABILE DINAMICA), consideriamo la derivata totale di G lungo una traiettoria $\bar{x}(t)$ che soddisfa $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

$$\frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot \dot{x}_i(t)$$

soluz. di $(*)$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(\bar{x}(t))$$

È significativo introdurre una nuova variabile dinamica

$\mathcal{L}_{\bar{f}} G : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ detta DERIVATA DI LIE di G rispetto al campo vett. $\bar{f}$

def. da

$$(\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(\bar{x}) \frac{\partial G(\bar{x})}{\partial x_i} \leftarrow \bar{\nabla} G \cdot \bar{f} \quad (dG[\bar{f}])$$

derivata direzionale lungo campo vettoriale

$$\hookrightarrow \quad \frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t))$$

soluz. di $(*)$

Prop. $G : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ è una COST. del MOTO per $(*)$ $\iff$ $\mathcal{L}_{\bar{f}} G = 0$

Dim

$(\Leftarrow)$: $\dfrac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t)) = 0$ //

soluz. di $(*)$ $\quad$ $\overset{\shortparallel}{0}$

$(\Rightarrow)$: $\forall \bar{x}_0$ $\exists!$ soluz. $\bar{x}(t)$ che passa per esso:

$\forall \bar{x}_0$ $\quad \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}_0) = \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}(t_0)) = 0$ //