

## SUCCESSIONI

### Esercizi risolti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{1 + 3^n}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{(n+1)(n+2)}$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$m) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2}$$

$$o) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$$

$$q) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^n}{n^{2n}}$$

$$s) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)^n$$

$$u) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 2^{-\sqrt{n}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + 1}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log n}{\sqrt{n} - \log n}$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

$$\ell) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2 + 1}}$$

$$n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n}$$

$$p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

$$r) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n}$$

$$t) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \log n}$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right).$$

2. Verificare che per  $n \rightarrow \infty$

$$a) \frac{(n+3)! - n!}{(n+1)!} \sim n^2$$

$$b) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

3. Calcolare la parte principale per  $n \rightarrow \infty$  di

$$a) \binom{2n-1}{3}$$

$$b) \frac{\sqrt{n} - 2n^3 + n \log n}{5n + \log n}.$$

4. Sia  $d_n$  una successione convergente a  $l \in \mathbb{R}$ , e sia  $a_n = (-1)^n d_n$ . Studiare l'esistenza del  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  al variare di  $l$  in  $\mathbb{R}$ .

5. Dimostrare che  $3^n$  é un infinito di ordine inferiore a  $n!$  per  $n \rightarrow \infty$ .

## Soluzioni

1. a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} \right]^{2/3} = e^{2/3}.$$

Possiamo anche procedere utilizzando il limite fondamentale  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n)^n = e^a$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \right]^2 = (e^{1/3})^2 = e^{2/3}.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\eta^2 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{1 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (-1 + (\frac{2}{3})^n)}{3^n (1 + \frac{1}{3^n})} = -1.$$

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (1 + \frac{n^2}{2^n})}{3^n (1 + \frac{n^3}{3^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta \log n}{n^2} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log n}{\sqrt{n} - \log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{1}{\log n}}{1 - \frac{\log n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0.$$

g) Il limite vale zero perché la successione  $(-1)^n$  è limitata mentre  $\frac{n}{n^2+1}$  è infinitesima.

h) Il limite non esiste perché la successione dei termini di indice pari tende a  $+\infty$ , mentre quella dei termini di indice dispari tende a  $-\infty$ . Se il limite esistesse ( $= l$ ) queste due successioni dovrebbero invece tendere entrambe a  $l$  (vedi anche esercizio 4). Notiamo che non è sufficiente dire che “ $(-1)^n$  è oscillante e  $\frac{n^2+1}{n+1}$  tende a  $+\infty$ ” per concludere che il limite non esiste. Per esempio la successione  $a_n = ((-1)^n + 5)n$  tende a  $+\infty$  perché  $a_n \geq 4n \forall n$ , pur essendo il prodotto di una successione oscillante per una successione infinita.

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 3.$$

l)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{3 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

m)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n (1 - 3^{-2n})}{4^n (1 + \frac{n^2}{4^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(4/3)^n} = 0.$$

n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (1 + \frac{n^6}{3^n} + \frac{\log n}{3^n})}{2^n (1 + \frac{n^4}{2^n} + \frac{\log^5 n}{2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

o)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^2.$$

p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = (e^{-1})^{+\infty} = 0,$$

essendo  $1/e < 1$ .

q)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

r) Si ha

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log[n(1 + \frac{1}{n})]}{\log n} = \frac{\log n + \log(1 + \frac{1}{n})}{\log n},$$

e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\log n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

s)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)^n = 0^{+\infty} = 0.$$

t) È facile verificare che per ogni  $n \geq 3$  vale  $1 \leq \log n \leq n$ . Moltiplicando per  $n$  abbiamo che  $n \leq n \log n \leq n^2$ , e dunque

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n \log n} \leq (\sqrt[n]{n})^2, \quad \forall n \geq 3.$$

Ricordando che  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \log n} = 1.$$

u) Si ha

$$n^2 2^{-\sqrt{n}} = e^{2 \log n - \sqrt{n} \log 2} = e^{\sqrt{n}(-\log 2 + 2 \frac{\log n}{\sqrt{n}})} \rightarrow e^{-\infty} = 0.$$

v) Si ha

$$n^{\sqrt{n}} - 2^n = e^{\sqrt{n} \log n} - e^{n \log 2} = -e^{n \log 2} \left( 1 - e^{\sqrt{n} \log n - n \log 2} \right).$$

Ora

$$e^{\sqrt{n} \log n - n \log 2} = e^{n(-\log 2 + \frac{\log n}{\sqrt{n}})} \rightarrow e^{-\infty} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\sqrt{n}} - 2^n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log 2} = -\infty.$$

2. a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - n!}{n^2(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1) - 1}{n^2(n+1)} = 1.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \log e = 1.$$

3. a) Si ha

$$\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} \sim \frac{4}{3}n^3.$$

b)

$$\frac{\sqrt{n} - 2n^3 + n \log n}{5n + \log n} = -\frac{2n^3}{5n} \frac{1 - \frac{\sqrt{n}}{2n^3} - \frac{\log n}{2n^2}}{1 + \frac{\log n}{5n}} \sim -\frac{2}{5}n^2.$$

4. È facile verificare dalla definizione di limite che una successione  $a_n$  tende a  $l \in \mathbb{R}^*$  se e solo se le due successioni dei termini di indice pari e di indice dispari,  $b_n = a_{2n} = \{a_0, a_2, a_4, \dots\}$  e  $c_n = a_{2n+1} = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ , tendono entrambe a  $l$ . Nel nostro caso  $a_{2n} \rightarrow l$  mentre  $a_{2n+1} \rightarrow -l$ . Quindi se  $l = -l$  cioè  $l = 0$  allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; se invece  $l \neq 0$  il limite di  $a_n$  non esiste.

5. Scrivendo per esteso  $3^n/n!$  possiamo effettuare la seguente maggiorazione:

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdots n} = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n} \leq 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{2n}.$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$