Introduzione alla fisica
261SM
Grandezze fisiche, unità, vettori

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it

Grandezze fisiche

Caratteristica di un corpo o di un fenomeno naturale a cui si può associare uno o più numeri

* Grandezze fundamentali (per noi 3 bastano - per la meccanica)
  - lunghezza
  - massa
  - tempo
* Definizione operativa: definite solo dalle operazioni necessarie per misurarle

* Le grandezze fisiche si esprimono in termini di campione, chiamato unità

Grandezze fisiche

Tempo: unità: secondo (s)

dal 1967: 9 192 631 770 volte il periodo di oscillazione di una risonanza del atomo ^{133}Ce

Lunghezza: unità: metro (m)

$\frac{1}{299\,792\,458}$ della distanza percorsa dalla luce in 1 s. nel vuoto

Massa: unità: chilogrammo (kg)

$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ kg m^2 s^{-1} costante di Planck

Dimensioni e unità di misura

Campione chilogramma mandato dalla Francia agli Stati Uniti in 1794, ma molto probabilmente rubato da pirati nei Caraibi.

Misura diretta, misura indiretta

* Misura diretta: confronto con campione (= unità) $1\,m$

$$\frac{L}{c} = 0,5 \qquad L = 0,5\, c = 0,5\, m$$

* Misura indiretta: relazione matematica

e.g. densità di un cilindro.

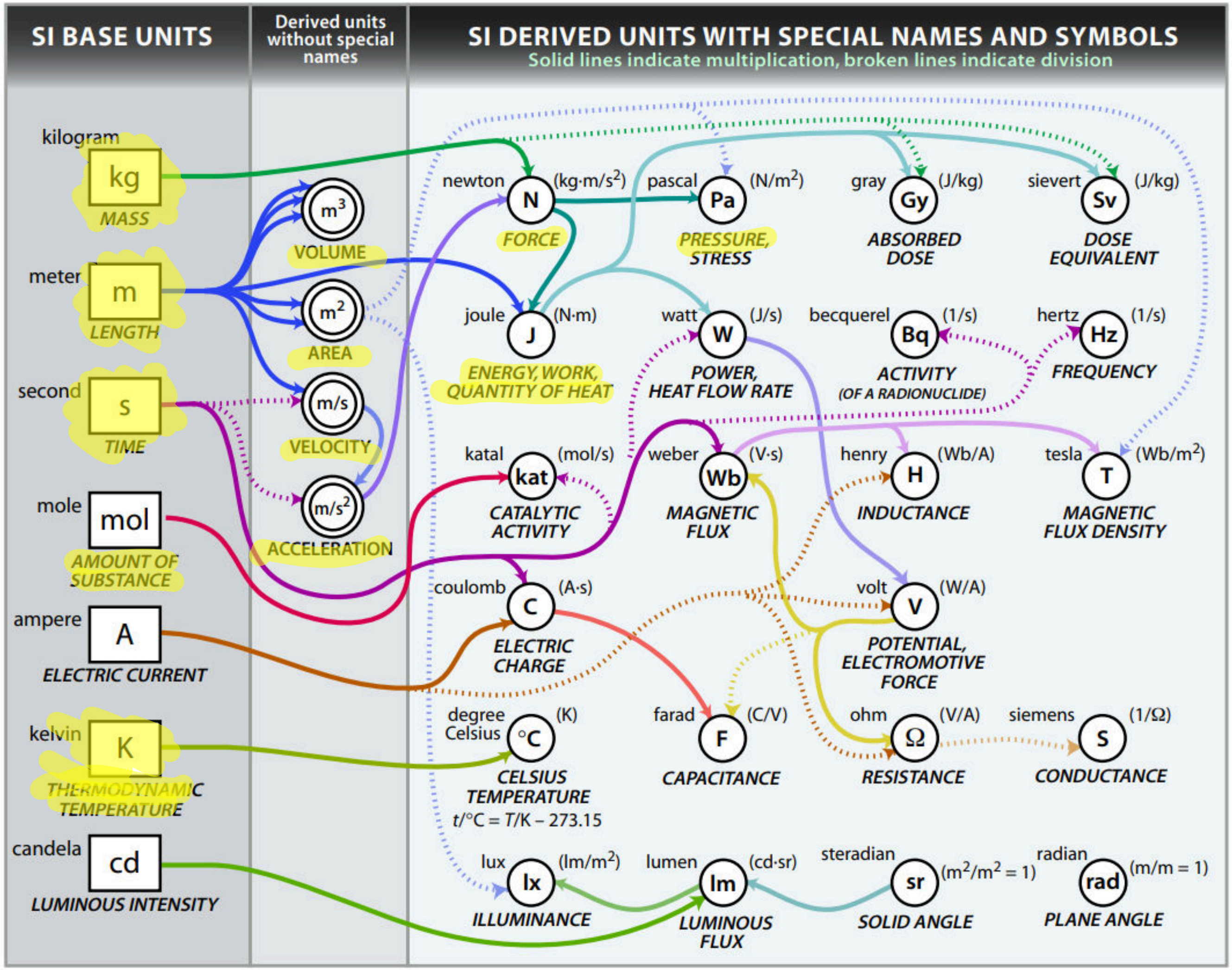
1) massa M
2) volume → lunghezza L
   ↳ diametro D

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{\pi D^2 L}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

unità della densità: kg/m^3

Unità derivate



Cifre significative e incertezza

In realtà, tutte le misure hanno un livello di incertezza

$$L = 1{,}82 \pm 0{,}02 \text{ m}$$

$$m = \underbrace{3{,}5}_{\text{misura}} \pm \underbrace{0{,}1 \text{ kg}}_{\text{incertezza}}$$

Cifre significative → indicare il livello di precisione

(In questo corso)

$$L = 1{,}82 \text{ m} \;(3 \text{ c.s.}) \longrightarrow 1{,}82 \pm 0{,}01 \text{ m}$$

$$m = 3{,}5 \text{ kg} \;(2 \text{ c.s.}) \longrightarrow 3{,}5 \pm 0{,}1 \text{ kg}$$

$$l = 1500 \text{ m} \;(2 \text{ c.s.}) \quad 1{,}5 \text{ km}$$

Cifre significative e incertezza

Operazioni:

* prodotto, divisione: tenere il numero più basso di cifre significative

e.g. $\underbrace{(1{,}1\ m)}_{2\ c.s} \times \underbrace{(3{,}45\ m)}_{3\ c.s.} = 3{,}\cancel{795}\ m^2 = \underbrace{3{,}8\ m^2}_{2\ c.s.}$

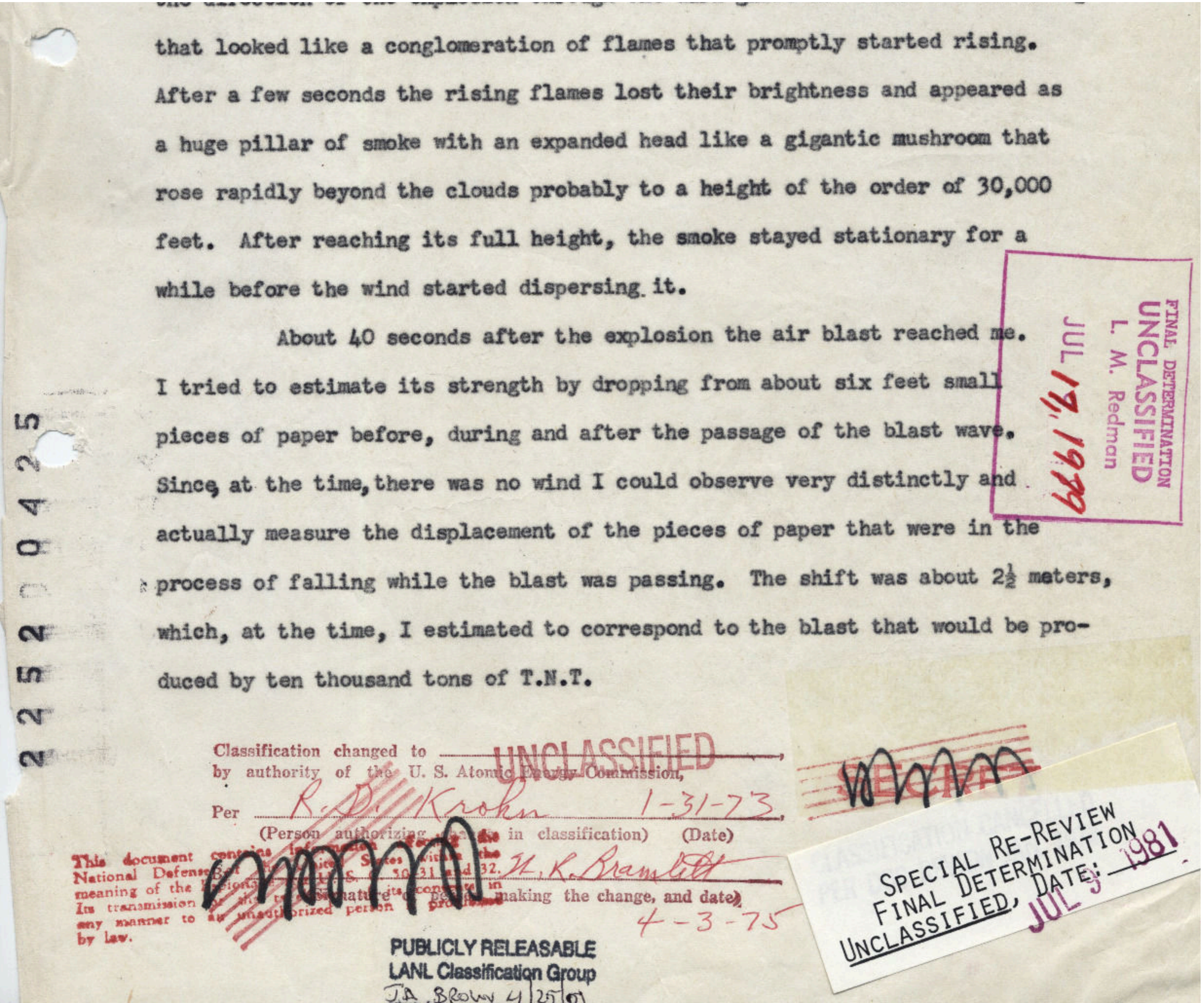
$\underbrace{1{,}10}_{3\ c.s.}$

* addizioni, sostrazioni: tenere il numero più basso di decimali

$1{,}1\ m - 12\ cm = 1{,}1\ m - 0{,}12\ m = 0{,}\cancel{98}\ m$

$1{,}0 \pm 0{,}1\ m$ $= 1{,}0\ m$

Ordini di grandezza



that looked like a conglomeration of flames that promptly started rising. After a few seconds the rising flames lost their brightness and appeared as a huge pillar of smoke with an expanded head like a gigantic mushroom that rose rapidly beyond the clouds probably to a height of the order of 30,000 feet. After reaching its full height, the smoke stayed stationary for a while before the wind started dispersing it.

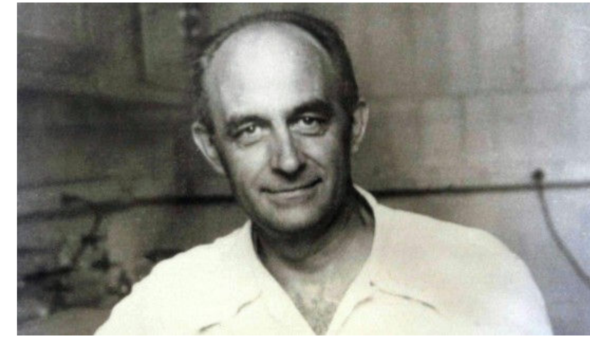
About 40 seconds after the explosion the air blast reached me. I tried to estimate its strength by dropping from about six feet small pieces of paper before, during and after the passage of the blast wave. Since, at the time, there was no wind I could observe very distinctly and actually measure the displacement of the pieces of paper that were in the process of falling while the blast was passing. The shift was about $2\frac{1}{2}$ meters, which, at the time, I estimated to correspond to the blast that would be produced by ten thousand tons of T.N.T.

FINAL DETERMINATION
UNCLASSIFIED
L. M. Redman
JUL 17, 1979

Classification changed to UNCLASSIFIED
by authority of the U. S. Atomic Energy Commission,
Per R. D. Krohn 1-31-73
(Person authorizing change in classification) (Date)
H. K. Bramlett 4-3-75
making the change, and date)

SPECIAL RE-REVIEW
FINAL DETERMINATION
UNCLASSIFIED, DATE: JUL 9 1981

PUBLICLY RELEASABLE
LANL Classification Group
J.A. Brown 4/25/01



Enrico Fermi (1901-1954)

Esplosione “Trinity”,
16 Luglio 1945

Ordini di grandezza

Scopo: calcolo veloce per una stima

ordine di granezza: ritenere la potenza di 10 più vicina

Notazione scientifica: 6 317 000 km → $6{,}317 \times 10^{6}$ km

ordine di grandezza

Esempio: un ingeniere deve fabricare un nuovo pacemaker
quanti battiti di cuore deve fare senza malfunzionamento?

$$1 \text{ battito}/\text{s} \times 100 \text{ anni} \times \pi \times 10^{7} \text{ s}/\text{anno} \approx 3 \times 10^{9} \text{ battiti}$$

Ordini di grandezza

Quanti capelli ci sono su una testa?

$$\# \text{capelli} = \underbrace{\frac{\# \text{capelli}}{\text{area}}}_{\text{densità}} \times \text{superficie}$$

densità: ~ 1 capello al mm^2 $\longrightarrow \sigma = 1\ mm^{-2}$

superficie: $\frac{1}{2}$ sfera di raggio ~ 10 cm $\rightarrow A = 2\pi R^2 \simeq 6 \times 10^2\ cm^2$

$(1\ cm = 10\ mm)$

$$N = \sigma \cdot A = 6 \times 10^2\ cm^2 \cdot mm^{-2}$$

$$= 6 \times 10^4 \quad \sim \text{circa } 10^5$$

Analisi dimensionale

Regole:

1) Somma e sottrazione di grandezze fisiche omogenee tra loro
2) Argomento di funzioni trascendenti adimensionale

$\sin(\quad)$
$\cos(\quad)$
$\exp(\quad)$

Utilità:

1) Verifica dimenzionale

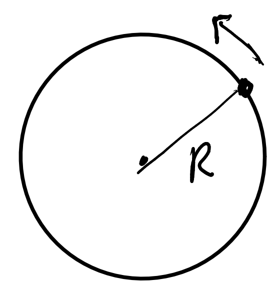
$$\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v \Delta t$$

$$[\Delta x] = \left[\frac{1}{2}\right] [a] [\Delta t]^2 + [v] [\Delta t]$$

$$L = 1 \cdot L \cancel{T}^{-2} \cdot \cancel{T}^2 + L \cancel{T}^{-1} \cdot \cancel{T}$$

2) Dipendenza funzionale

accelerazione centripeta



$[R] = L$

$[v] = L/T$

$[m] = M$

$$[a] = L/T^2 \qquad \left[\frac{v^2}{R}\right] = L/T^2$$

Fonti di incertezza

$\pm 0{,}5$ mm

± 1 mm

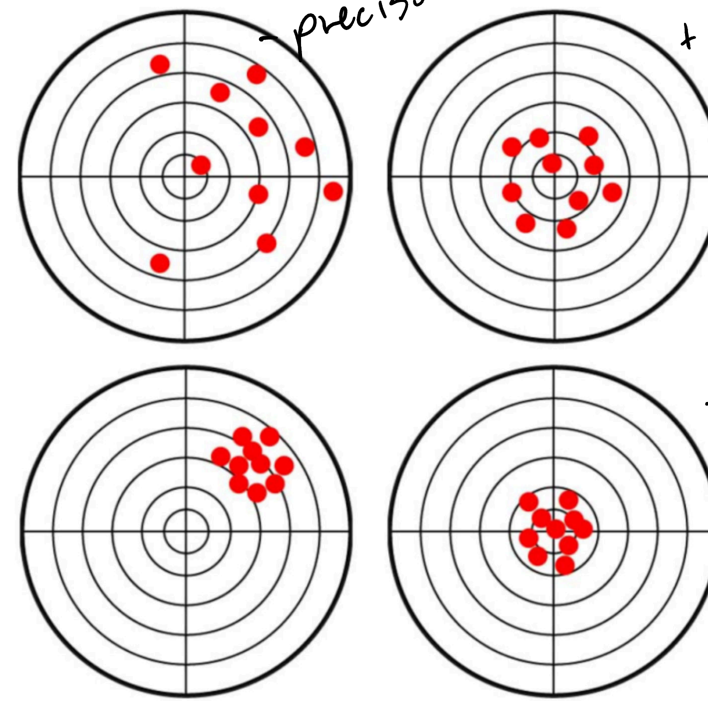
1) Risoluzione strumentale.

2) Incertezze statistiche (errori casuali)

precisione

3) Errori sistematici

accuratezza



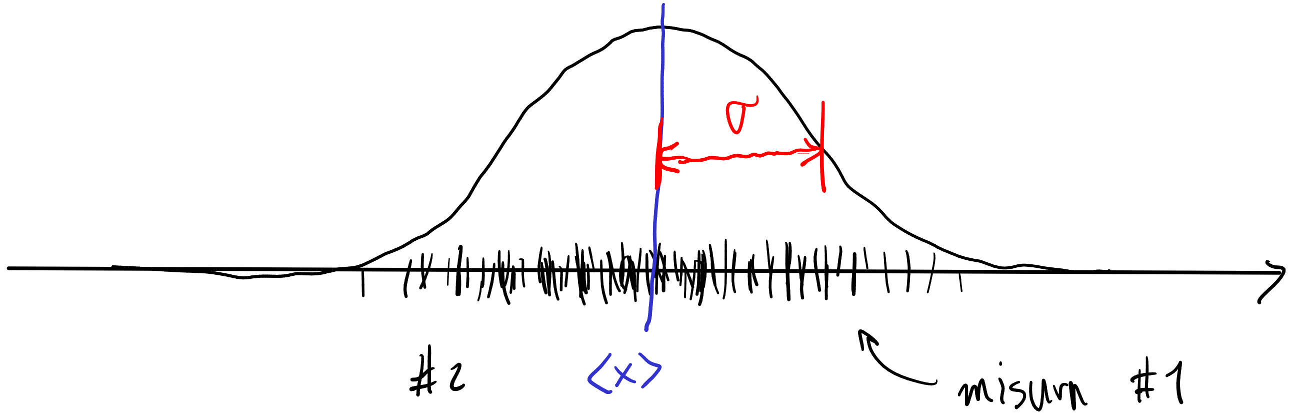
+ accurato
- preciso

- accurato
+ preciso

- accurato
+ preciso

+ accurato
+ preciso

Incertezze statistiche



media $\langle x \rangle = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N)$

media dei quadrati scarti alla media

varianza $\text{var}\, x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

$$= \frac{1}{N}\left[(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \ldots + (x_N - \langle x \rangle)^2\right]$$

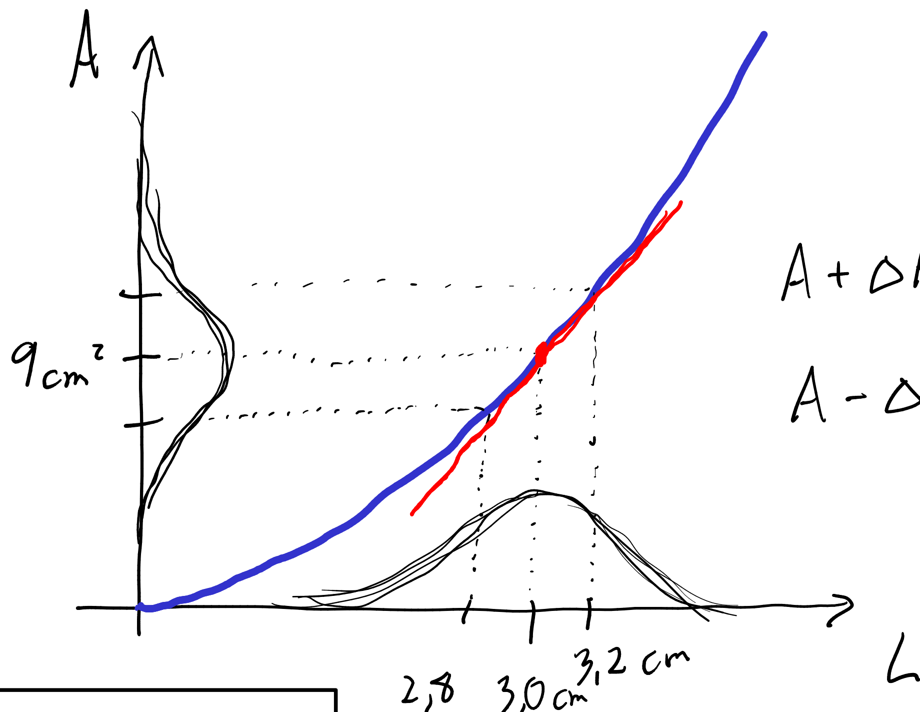
$\sigma = \sqrt{\text{var}\, x}$

incertezza: $\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Propagazione delle incertezze

e.g. superficie di un quadrato $A = L^2$

ad esempio: $L = 3{,}0 \pm 0{,}2$ cm $\qquad A = [9{,}0000 \pm ?]\,\mathrm{cm}^2$



$$A(L) = L^2$$

$$A + \Delta A = A(L + \Delta L) \simeq A(L) + \frac{dA}{dL}\Delta L$$

$$A - \Delta A = A(L - \Delta L) \simeq A(L) - \frac{dA}{dL}\Delta L$$

$$2\Delta A = 2\frac{dA}{dL}\Delta L$$

$$\Delta A = \frac{dA}{dL}\Delta L$$

$$\Delta A = 2L\Delta L \quad \Rightarrow \quad A = 9 \pm 1\ \mathrm{cm}^2$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0)}$$

Propagazione delle incertezze

grandezza derivata $\rightarrow f(x) \leftarrow$ misura

$$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x$$

$f(x,y)$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2}$$

a volte si usa $\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y$

e.g. $f = ax + by \qquad \Delta f = \sqrt{a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2}$

$$f = x^m y^n \qquad \Delta f = \sqrt{\big(\underbrace{m x^{m-1} y^n}_{\frac{mf}{x}} \Delta x\big)^2 + \big(\underbrace{n x^m y^{n-1}}_{\frac{nf}{y}} \Delta y\big)^2}$$

incertezza relativa $\frac{\Delta x}{x}$

$$\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(m \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(n \frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Il raggio di un circolo è misurato con un incertezza di 5 mm. Qual è l'incertezza della sua circonferenza?

$R = ? \pm 5 \text{ mm}$

$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x$

$C = 2\pi R$

$\Delta C = 2\pi \Delta R \simeq 31 \text{ mm} = 3 \text{ cm}$

1 cifra significativa

Scalari e vettori

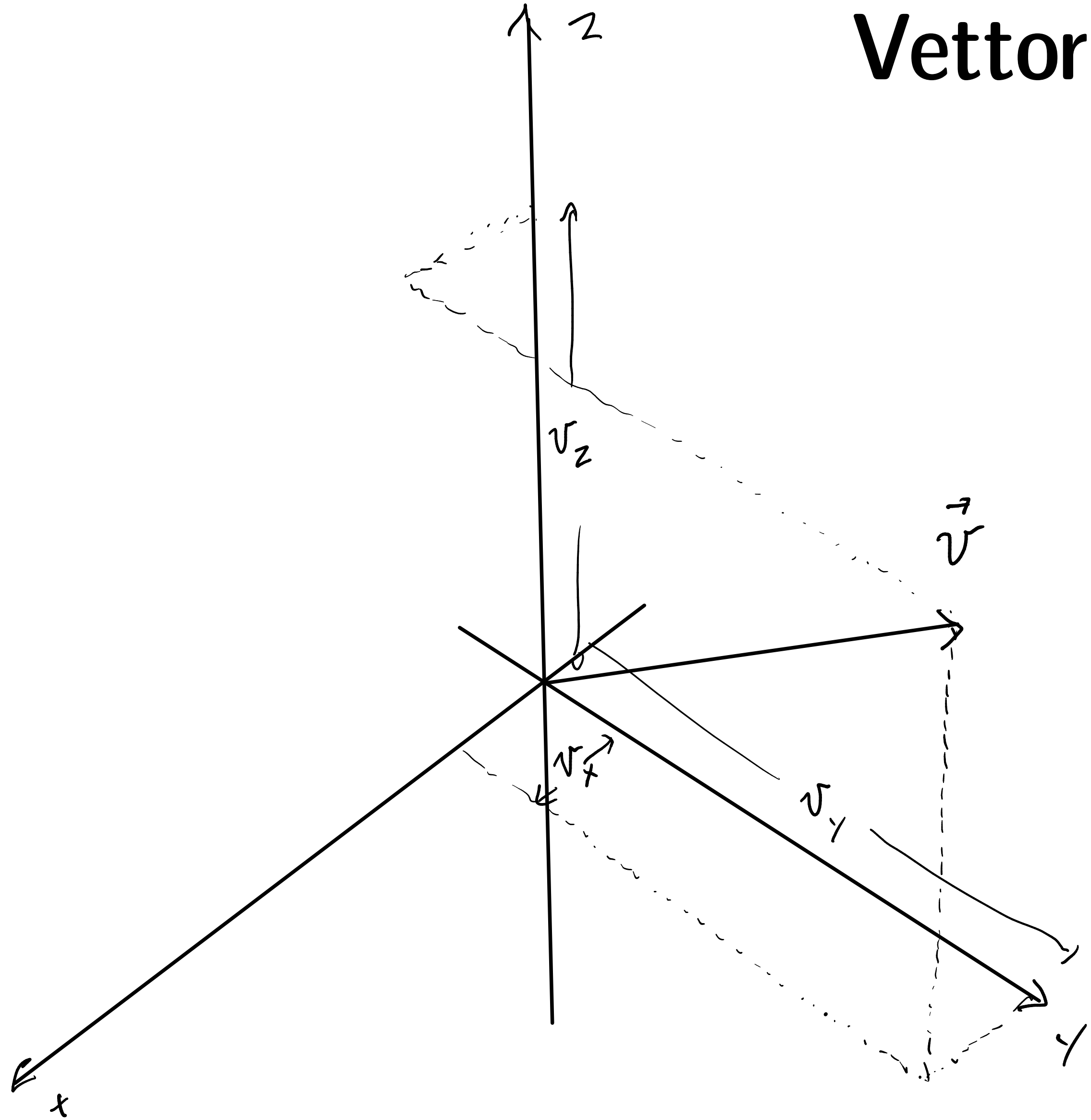
Scalare: una grandezza specificata da un numero + unità

e.g lunghezza, massa, energia

Vettore: una quantità definità da più valori + unità

oppure: definata da un valore + una direzione (e un verso)

Vettori



$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

* anche se questa definizione sembra identica alla definizione del punto, sono diversi:

  - un punto non ha una lunghezza

  - non si può fare la somma di due punti

  - ...

Prodotto con un scalare

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

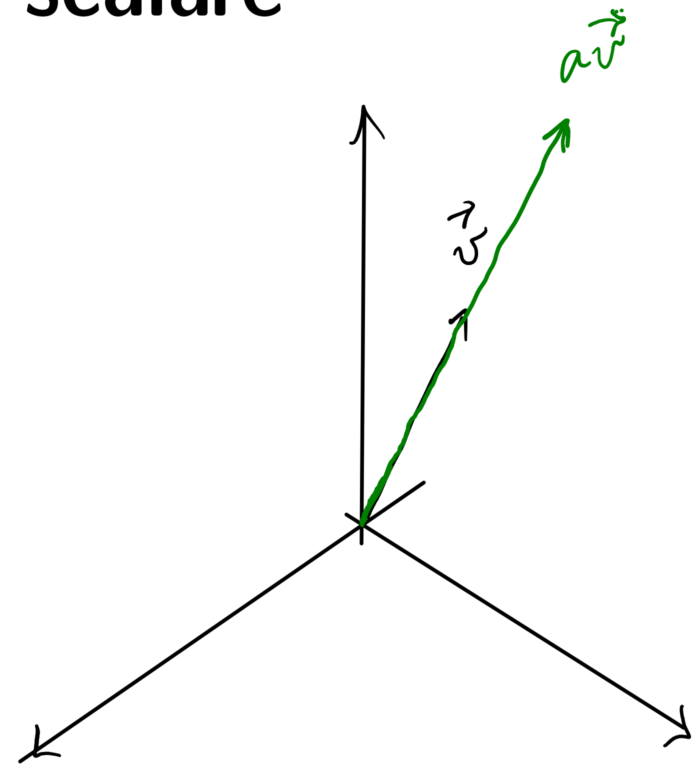
$$a\vec{v} = (av_x, av_y, av_z)$$

se a è senza unità:

allungamento / compressione

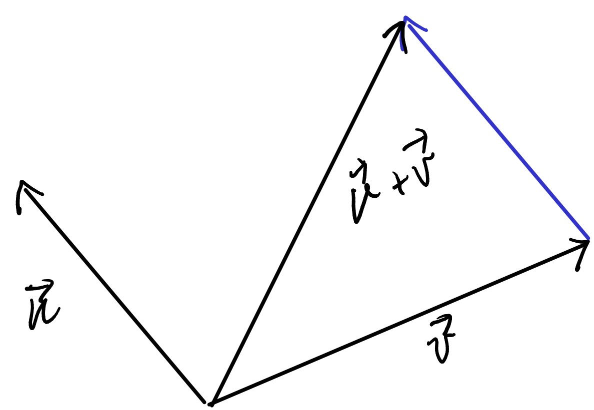
del vettore

se $a < 0$ $\rightarrow$ verso opposto



Somma vettoriale

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(u_x + v_x ,\ u_y + v_y ,\ u_z + v_z \right)$$



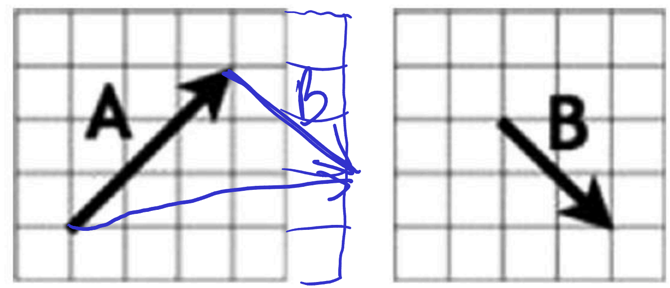
Somma grafica

1. Vectors **A** and **B** are shown.

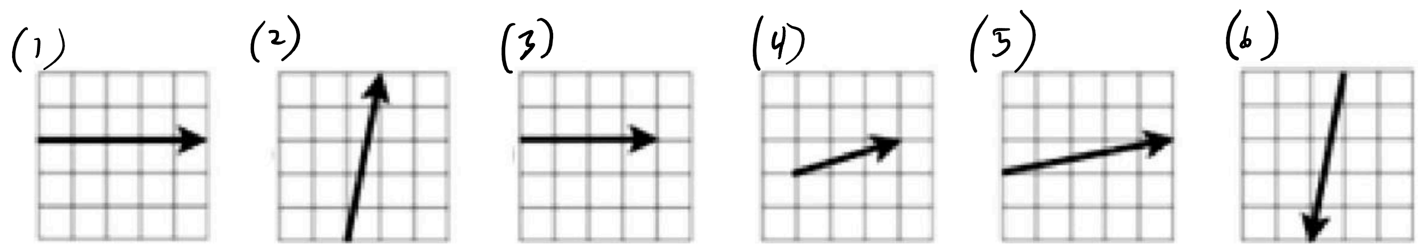
$A = (3,3)$

$B = (2,-2)$

$A + B = (5,1)$



Which of the following options represents the *vector sum*, **A** + **B**? Please circle your choice.



Fonte: Mikula et al., Phys. Rev. Phys. Ed. Res **13** 010122 (2017)
DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.010122

Modulo e direzione

Il modulo di un vettore è la sua lunghezza geometrica

$$v = |\vec{v}|$$

In termini delle componente

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{v_x}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{v}\right)^2} = \frac{1}{v}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{v}{v} = 1$$

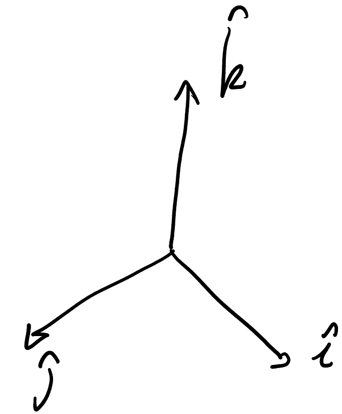
versore

$\hat{n}$ invece di $\vec{n}$

Versori

Definiamo

$$\hat{i} = (1,0,0)$$
$$\hat{j} = (0,1,0)$$
$$\hat{k} = (0,0,1)$$



$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1 \quad \text{versori}$$

Prodotto scalare

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}_{\text{scalare}}$$

(un altro modo di calcolare il modulo

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$
)

osservazioni

* $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$

* $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

* $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ ortogonalità

$\vec{v} \cdot \hat{i} = v_x \qquad \vec{v} \cdot \hat{j} = v_y \qquad \vec{v} \cdot \hat{k} = v_z$

angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Anche: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$