Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 19.02.2024

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2022/2023

Esercizio 1

Si consideri un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà, con Lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

1. Sotto quale condizione si possono scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti? [1pt].
2. Scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti alle equazioni di Lagrange del sistema considerato e l'Hamiltoniana corrispondente [1pt].
3. Si dimostri l'equivalenza tra i due sistemi di equazioni [3pt].
4. Cos'è una coordinata ciclica in un sistema Hamiltoniano? Si dimostri, in meccanica Hamitoniana, che la sua presenza implica una costante del moto [2pt].
5. Si definiscano le parentesi di Poisson e si dica il loro legame con le costanti del moto [1pt].
6. Dimostrare che le equazioni di Hamilton possono essere scritte nella forma $\dot{p}_k = \{p_k, H\}$ and $\dot{q}_k = \{q_k, H\}$. Scrivere l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico e applicare le parentesi di Poisson per ricavare l'equazione del moto dell'oscillatore armonico [2pt].
7. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi. Si spieghi dettagliatamente perché trovare un integrale completo di tale equazione è equivalente a trovare una traiettoria che risolva le equazioni del moto [2pt].
8. *Facoltativo: Si consideri la trottola di Lagrange: è un sistema integrabile? Se sì, lo si dimostri. [1pt].*

Esercizio 2

Si consideri un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V = -\frac{2A}{m} \log\left[\frac{R(x,y,z)}{a}\right] + \frac{B}{2m} R(x,y,z)^2,$$

dove $R(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $A, B, a > 0$.

1. Si dimostri (giustificando ogni affermazione) che il moto avviene su un piano. [1pt]
2. Scelta l'asse z perpendicolare a tale piano, si scriva la Lagrangiana in coordinate polari piane e si ricavino le equazioni di Lagrange. [2pt]
3. Si trovi la coordinata ciclica e la relativa costante del moto ℓ. Si scriva la Lagangiana ridotta. [1pt]
4. Si trovino i punti di equilibrio del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità. A quali orbite corrispondono nel piano? Si scrivano esplicitamente le funzioni $x(y), y(t)$ che descrivono il moto sul piano. [4pt]

5. Si linearizzi la Lagrangiana ridotta attorno al suo punto di equilibrio stabile. Si risolva l'equazione del moto di tale Lagrangiana linearizzata. [2pt]

6. Scrivere la funzione $r(t)$ che descrive il moto delle piccole oscillazioni lungo la direzione radiale. [1pt]

7. *Facoltativo: Si discuta in dettaglio il diagramma di fase del problema ridotto. [1pt]*

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Scrivere, l'Hamiltoniana di tale sistema e la relativa equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x)$ ed energia E [1pt].

Si considerino le ridefinizioni $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q\right) = \varphi(q)$, $E = \lambda\hbar\omega$. Scrivendo l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ e inserendo $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ in tale equazione, si trova la seguente equazione per $\theta(q)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

Si ponga $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$.

2. Calcolare le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$ [1pt].

3. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r(r-1) = 0$ [1pt].

4. Determinare lo spettro dell'energia (e in particolare il valore minimo) [1,5pt].

5. Si trovino le autofunzioni normalizzate $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ relative allo stato fondamentale e al primo livello eccitato dell'energia [1,5pt].

6. Si consideri lo stato con funzione d'onda normalizzata $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\psi_0(x) + \psi_1(x)\right)$. Si calcoli il valor medio dell'energia nello stato $\psi(x)$ [1pt].