Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Prova scritta del 20.02.2024

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di rango di una matrice. Si dia la definizione di sistema di generatori per un sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale V su un campo K.

Si dimostri che l'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale e si dia un esempio del fatto che, in generale, l'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale.

(2) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(4 punti)** Si determinino delle basi di $\ker(f)$ e di $\operatorname{im}(f)$ e le dimensioni di questi ultimi. Si determini un vettore $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \ker(f)$ tale che $x_3 = 1$.

(c) **(3 punti)** Si trovi il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sia compatibile e si trovi la generica soluzione di tale sistema lineare.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 4 & -7 & -8 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L_A.
Si calcoli la matrice di cambio di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

(4) (a) **(3 punti)** Si determinino equazioni cartesiane di una qualsiasi retta $\ell \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che soddisfi **entrambe** le condizioni seguenti:

- ℓ è contenuta nel piano $H \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazione $x + y + z = 2$;
- ℓ passa per il punto $Q = (1, 0, 1)$.

(b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette r ed s

$$r\colon \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Descrivere la posizione reciproca tra r e s.
Se r e s sono incidenti in un punto, determinare tale punto.
Se r è parallela ad s ed $r \cap s = \emptyset$, trovare un piano H che le contenga entrambe.
Se r ed s sono sghembe, trovare equazioni parametriche di una retta t che le intersechi entrambe.